http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i2p159-162

De 2D para 3D: investigando generalizações de propriedades de triângulos para tetraedros

From 2D to 3D: Investigating Generalizations of Triangles' properties to Tetrahedra.

HUMBERTO JOSÉ BORTOLOSSI [1]
https://orcid.org/0000-0003-1212-6252

ROGÉRIO VAZ DE ALMEIDA JUNIOR [2]
https://orcid.org/0000-0003-3965-3124

RESUMO
Este artigo apresenta uma proposta de investigação em sala de aula usando o GeoGebra que consiste no estudo de generalizações de resultados de triângulos para tetraedros como um processo de investigação que articula as geometrias plana e espacial.
Palavras-chave: *geometria, investigação matemática, generalização de resultados, GeoGebra.*

ABSTRACT
This article presents an enquiry-based activity that articulates plane and spatial geometries in GeoGebra through the study of possible generalizations of triangles' properties to tetrahedra.
Keywords: *geometry; enquiry-based activity; GeoGebra.*

Introdução

O GeoGebra já é bem conhecido por oferecer um ambiente de representações múltiplas ao disponibilizar duas Janelas: a de Álgebra e a de visualização (Geometria Plana) que se comunicam. Com a inclusão da Janela 3D, agora também é possível explorar construções envolvendo geometria espacial. Neste texto, propomos uma atividade de exploração em sala de aula, que consiste em investigar quais propriedades de triângulos no plano continuam ou deixam de valer para tetraedros (generalizações naturais de triângulos para o espaço).

1. Dois exemplos

No Plano, é bem estabelecido o fato de que todo triângulo possui um circuncentro C, que é o centro do círculo que circunscreve o triângulo. Se U, V e W são os vértices do triângulo, então C deve ser equidistante de U, V e W. Assim, C deve pertencer à mediatriz do segmento UV, que é o lugar geométrico (L.G.) dos

[1] Universidade Federal Fluminense- hjbortol@gmail.com
[2] SEEDUC-RJ/CEDERJ– rogermatuff@gmail.com

pontos equidistantes de U e V. Do mesmo modo, C também deve pertencer à mediatriz do segmento VW e C é equidistante de U e V e de V e W, então C é equidistante de U e W, sendo assim, C pertence à mediatriz do segmento UW. Desta maneira C é obtido pela interseção das mediatrizes (Figura1). O mesmo argumento se aplica a um tetraedro qualquer, mas agora, o lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois dados pontos é um plano (o plano mediador). (Figura 2)

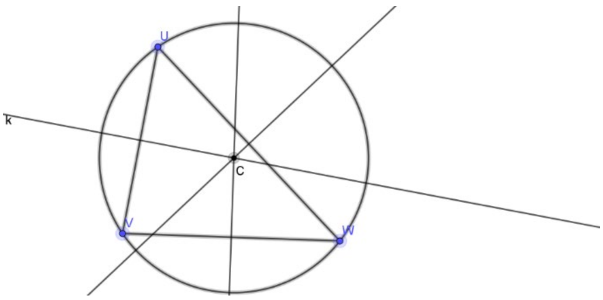

FIGURA 1: existência do círculo circunscrito à triângulos.
FONTE: os autores

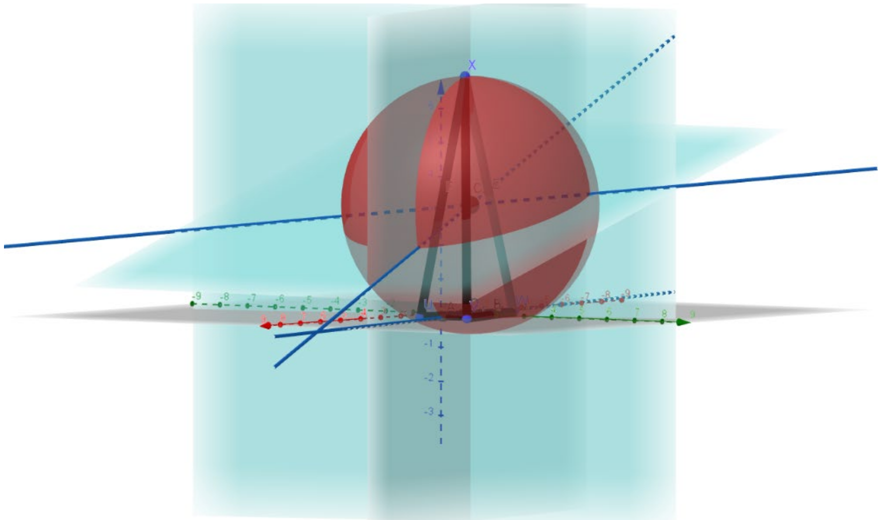

FIGURA 2: existência de esfera circunscrita à tetraedros.
FONTE: Os autores

Por outro lado, enquanto no plano, as três alturas de qualquer triângulo são sempre concorrentes (no ortocentro do triângulo), o mesmo não acontece com as alturas de um tetraedro qualquer (Figura 3).

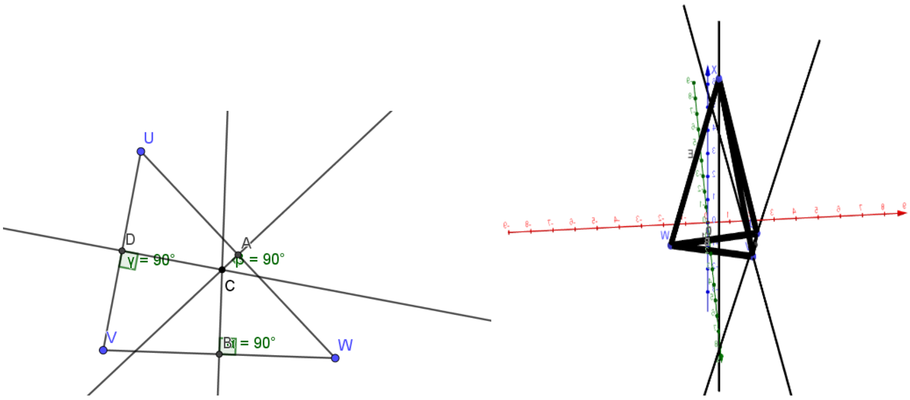

FIGURA 3: interseção de alturas de triângulos e tetraedros
FONTE:Os autores

Os tetraedros que possuem um ortocentro são denominados ortocêntricos. O tetraedro regular é ortocêntrico. Court (1934) dá caracterizações de outros tetraedros ortocêntricos.

2. Outros resultados.

A tabela seguir apresenta generalizações já estabelecidas pela literatura.

resultado	triângulos	tetraedros
baricentro	Sim (MUNIZ NETO, 2018)	Sim (MUNIZ NETO, 2018)
incentro	Sim (WAGNER, 2007)	Sim (MUNIZ NETO, 2018)
Teorema de Viviani	Sim (KaWASAKI, 2015	Sim (KATSUURA, 2019
Ortocentro	Sim (WAGNER 2007)	Não
Lei dos Senos	Sim (MUNIZ NETO, 2018)	SIM (ERIKSSON, 1978
Teorema de Pitágoras	Sim (WAGNER 2007)	Sim (conhecido como teorema de Gua (WEISSTEIN, 2022
Coordenadas baricêntricas	Sim (CHEUNG, 2018)	Sim (CHEUNG, 2018).
Soma dos ângulos internos	Sim (ALLENDOERFER, 1965).	Sim (ALLENDOERFER, 1965).

Quadro 1.Compilação de Resultados.

Para triângulos, o baricentro divide cada mediana na proporção 2:1; Para tetraedros, a proporção é 3:1 propriedade numérica que também pode ser investigada no GeoGebra. Cheung, (2018) faz uma discussão mais geral sobre outros centros clássicos.

Considerações finais

Acreditamos que a proposta de investigação matemática em sala de aula que propomos aqui seja especialmente útil para uma revisão do material de geometria plana de triângulo: quais resultados os alunos conhecem? Eles continuam válidos no espaço para tetraedros? O GeoGebra pode ser útil para experimentar, estabelecer conjecturas, fazer adaptações incluindo hipóteses adicionais ou obter contraexemplos para uma formalização subsequente. Este tipo de investigação pode levar a questões sofisticadas de pesquisa matemática, como observam HONNER (2022) e HARTNETT (2022).

Referências

ALLENDOERFER, C. B. Generalizations of Theorems about Triangles. **Mathematics Magazine**, v.8, n. 5, p. 253-259, 1965.

AWASAKI KEN-ICHIROH. Three-Dimensional Viviani Theorem on a Tetrahedron. **ournal for Geometry and Graphics**, v.23, n. 2, p. 179182, 2019.

CHEUNG, K. H., CHEUNG P. L., Old and New Generalizations of Classical Triangle Centres to Tetrahedra. **Hang Lung Mathematics Awards,** v.8, p. 173-230, 2018.

COURT, N. A. Notes on The Orthocentric Tetrahedron. **The American Mathematical Monthly**.v. 41 n. 8,p. 499-502, 1934.

HARTNETT, K. Tetrahedron Solutions Finally Proved Decades After Computer Search. Quanta, 2022 https://www.quantamagazine.org/tetrahedron-solutions-finally-proved-decades-after-computer-search-20210202

HONNER, P. Why Triangles Are Easy and Tetrahedra Are Hard. **Revista Quanta**, 2022 https://www.quantamagazine.org/triangles-are-easy-tetrahedra-are-hard-20220131/

ERIKSSON, F. The law of sines for tetrahedra and n-simplices. **Geom Dedicata** V.7, pp. 71–80, 1978.

KATSUURA, IDEFUMI. Journal for Geometry and Graphics Volume 23 (2019), No. 2, 179–182. Three-Dimensional Viviani Theorem on a Tetrahedron. **Mathematics Magazine**, v.78, n. 3, p. 213, 2015

MUNIZ NETO, A; C. **An Excursion through Elementary Mathematics, Volume II: Euclidean Geometry**. CHAM:Springer Nature, 2018.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro SBM: 2007.

WEISSTEIN, Eric W. de Gua's theorem. **MathWorld**.2022 https://mathworld.wolfram.com/deGuasTheorem.html