CAPÍTULO 5

5

TEORÍA DE GRAFOS

Patricia Pascual Ortigosa
Universidad de La Rioja

Palabras clave

- *Grafo*
- *Grafo dirigido*
- *Grafo de Euler*
- *Grafo de Hamilton*
- *Grafos coloreables*

La Teoría de Grafos es una rama de las Matemáticas que comenzó a desarrollarse hace más de tres siglos y, desde sus inicios, ha ido mostrando su amplio abanico de utilidades.

Un grafo no es más que un conjunto de puntos (vértices) y líneas que los unen (aristas) que nos pueden ayudar desde saber si podemos recorrer todos los puentes de una ciudad sin repetir ninguno hasta optimizar la ruta de un autobús en una ciudad.

En este capítulo haremos un breve repaso del inicio de la Teoría de Grafos y daremos conceptos clave que nos serán de gran ayuda para poder resolver ejercicios de Olimpiadas Matemáticas.

5.1 Introducción

La Teoría de Grafos tiene su origen en una ciudad llamada Kaliningrado (véase Figura 5.1), anexionada a Rusia en el año 1945. La ciudad de Kaliningrado se encuentra en la desembocadura del río Pregel y, antiguamente, era conocida por el nombre de Königsberg. Una imagen de la antigua ciudad de Königsberg se puede ver en la Figura 5.2.

Figura 5.1: Ciudad de Kaliningrado.

Figura 5.2: Ciudad de Königsberg.

Quizá, a quién esté leyendo esto, la ciudad de Königsberg le resulte familiar o crea que ha escuchado ese nombre en algún sitio... ¡y es más que probable! La Teoría de Grafos tiene su origen en Königsberg. Vamos a ver cómo surgió. Si os fijáis en el centro de la ciudad de Königsberg -Figura 5.3-, podéis observar que hay cuatro regiones separadas por el río Pregel. Cada una de ellas está conectada con las otras a través de puentes. En concreto, hay siete. Así, los ciudadanos de Königsberg se plantearon la siguiente pregunta: *¿Es posible dar un paseo de forma que, comenzando en cualquiera de las regiones y pasando una única vez por cada puente, regresemos a la región de partida?*

Quizá la persona que esté leyendo esto piense: "¡Qué fácil! Hago todas las posibles opciones que hay y seré capaz de responder la pregunta". Querido lector, para aquí un momento. Coge papel y boli. Pon tu cerebro a pleno funcionamiento y trata de pensar una solución a este problema. ¿Ya lo has hecho? ¡Pues continuemos! Puede que hayáis usado la *fuerza bruta* para resolver el problema (está bien no quedarnos parados si no se nos ocurre otra forma de resolverlo), puede que se os haya ocurrido otra forma de resolverlo (si es así, me encantaría ver la forma que se os ha ocurrido) o puede que no se os haya ocurrido nada -a los que no hayáis encontrado la respuesta, lo siento por el *spoiler*, pero todos tendríais que haber llegado a la misma respuesta: no es posible dar dicho paseo por el centro de Königsberg.

Llegados a este punto, querido lector, te estarás preguntando qué tiene que ver todo esto con las matemáticas. Me has hablado de Königsberg, me has hablado de unos puentes y de un paseo pero, y la Teoría de Grafos, ¿dónde está? Allá vamos.

El matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) fue el encargado de encontrar las matemáticas en este problema... ¡y de iniciar una teoría! La Teoría de Grafos. La solución planteada por Euler en su trabajo *Los siete puentes de Königsberg* (1736) fue general. Es decir, no servía únicamente para el caso particular de la ciudad de Königsberg, si no que se podía utilizar para cualquier región parecida. Y, ¿qué es lo que se le ocurrió? ¡Vamos a verlo!

Euler realizó una abstracción del mapa: cada región del mapa, la representó por un punto y, cada puente entre las regiones (puntos, en la abstracción) lo representó con una línea que unía dichas regiones.

De nuevo, para un momento. Coge papel y boli. Trata de realizar la abstracción del mapa de la Figura 5.3 con la información que tienes. Piénsalo un poco. No te rindas a la primera. ¿Ya? Si no se te ha ocurrido cómo hacer la abstracción, no te preocupes. Lo importante es intentarlo. Trata de seguir pensándolo conforme va avanzando la explicación de cómo hacerlo. Si has sido capaz de hacerlo, vamos a comprobar si hemos llegado al mismo resultado.

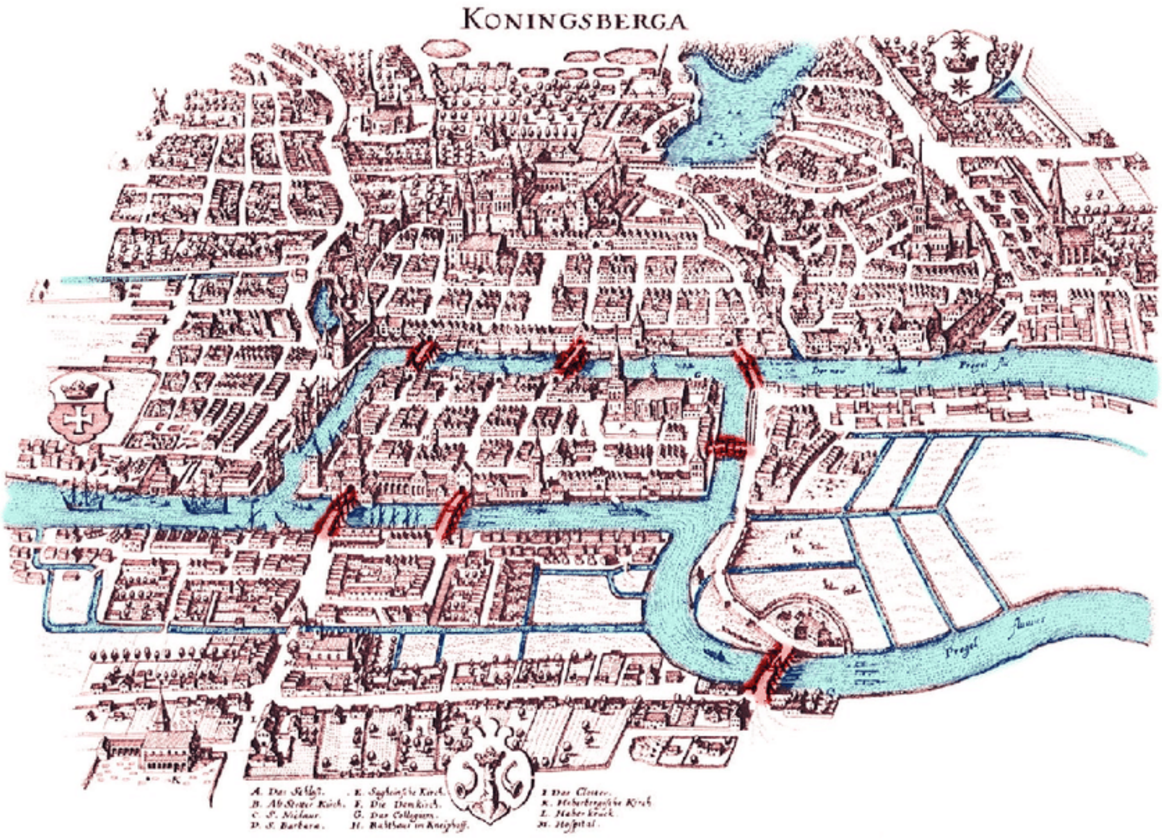


Figura 5.3: Centro de la ciudad de Königsberg.

Vamos a trabajar, como hemos dicho anteriormente, con la Figura 5.3. Si nos fijamos bien, el centro de Königsberg cuenta con cuatro regiones (la región superior, la región inferior, la región central - que parece una "isla"- y la región de la derecha). Por cada una de las regiones, dibujaremos un punto. Cuatro regiones, cuatro puntos. Bien. Vamos ahora a ver qué pasa con los puentes. Tenemos lo siguiente:

- La región superior está unida con la región central (y viceversa) por dos puentes. Es decir, el punto que representa a la región superior y el punto que representa a la parte central estarán conectados por dos líneas.
- La región superior está comunicada con la región derecha por un puente. Por lo tanto, los puntos que representan a la región superior y la región derecha estarán unidos por una línea.
- La región central está comunicada con la región inferior por dos puentes. En nuestra abstracción del mapa, los puntos que representan a la parte central y a la parte inferior estarán conectados con dos líneas.
- La región central y la región derecha están counicadas por un puente, por lo que el punto que representa a la región central estará unido con una línea al punto representando a la región derecha.
- Por último, el punto que representa a la región derecha y el punto que representa a la región inferior estarán conectados por una línea puesto que las regiones están comunicadas por un único puente.

Este proceso de abstracción del mapa queda resumido en la Figura 5.4 que, para el que no lo haya adivinado todavía, es un *grafo*.

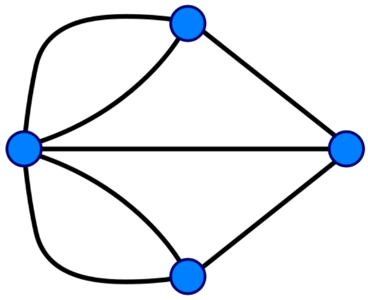


Figura 5.4: Grafo asociado al centro de la ciudad de Königsberg.

Espero que todos hayáis llegado a este grafo. De nuevo, os voy a pedir que os toméis un momento para ver si se os ocurre, mirando el grafo que hemos obtenido, la respuesta para la pregunta *¿Es posible dar un paseo de forma que, comenzando en cualquiera de las regiones y pasando una única vez por cada puente, regresemos a la región de partida?* Poned un temporizador de cinco minutos. Tratad de pensar, nuevamente, qué podéis hacer. Cinco, cuatro, tres, dos, uno... ¡volvemos! El razonamiento que vamos a hacer ahora va a ser un poco más completo de lo que necesitamos para responder la pregunta.

Vamos a responder a la pregunta sin tener en cuenta que la región inicial y final son la misma. Observad que, si llegamos a una región, la única forma de salir de ella es por otra línea diferente porque, recordad que solo podíamos recorrer los puentes una vez. Por lo tanto, las regiones deben tener un número par de líneas: una para entrar y otra para salir. Pero... ¿en todas las regiones ocurre esto? Tomaos un minuto para pensar si esto es así. Seguramente os hayáis percatado de que las regiones inicial y final pueden tener un número impar de aristas entrando/saliendo de ellas. Esto es así puesto que en estas regiones podríamos salir, volver a entrar y salir de nuevo. O, en la inicial, podríamos salir y no volver a ella, resultando un número impar de aristas y pasando por el puente una única vez. Usando el mismo razonamiento, a la región final podríamos entrar y no volver a salir, teniendo esta un único puente de entrada. Es decir, *para poder pasar por todos los puentes una única vez, sería necesario un grafo en el que todos los vértices tengan un número par de aristas entrando o saliendo de ellos, salvo en los vértices inicial y final*. En el caso de la pregunta que hemos planteado nosotros, hay una pequeña diferencia: la región de inicio tiene que ser la misma que la de llegada. Por lo tanto, la región de inicio/final también debe de tener un número par de aristas. Así, *para poder pasar por todos los puentes una única vez y que la región inicial sea la misma que la final, necesitaríamos un grafo en el que todos los vértices tengan un número par de aristas entrando o saliendo de ellos*.

Centrándonos de nuevo en nuestro problema inicial, podemos observar que todos los vértices del grafo de la Figura 5.4 tienen un número impar de aristas entrando o saliendo de él. Teniendo en cuenta el razonamiento que hemos hecho en el párrafo anterior, la respuesta es que *no es posible dar un paseo de forma que, comenzando en cualquiera de las regiones, pasar una única vez por cada puente y regresar a la región de partida*.

Ejemplo 5.1 Mi casa y la de mis amigos están comunicadas de la siguiente forma:

- Desde mi casa, puedo ir a casa de Juanmi cruzando un puente por encima de las vías del tren o también puedo ir a casa de Dani, cruzando un puente que hay sobre el río.
- Desde casa de Juanmi se puede venir a mi casa cruzando el puente de las vías; también se puede ir a casa de Jorge, cruzando el puente por encima del río; y a casa de Judit, cruzando las vías del tren.

- Desde la casa de Jorge, se puede ir a la casa de Juanmi o a la casa de Judit a la que podemos ir cruzando un puente por encima de la vía o un puente por debajo.
- Desde casa de Ángela, se puede ir a casa de toda la cuadrilla menos a la mía.
- Desde la casa de Dani, se puede ir a mi casa o a la de Judit.

Un día, reunidos toda la cuadrilla de amigos, surgió la duda de si era posible que, saliendo de cualquiera de las casas, fuera posible recorrer todas las conexiones que hay entre ellas y volver a llegar a la casa desde la que habíamos salido. Dani dice que da igual quién sea el que comience la ronda, que nunca será posible pasar por todos los puentes y túneles una única vez y regresar al punto de partida. Jorge, por su parte, dice que seguro que desde una de las casas podremos hacerlo. Estoy indecisa y no sé a quién darle la razón. ¿Me ayudáis a pensarlo?

Lo primero que vamos a hacer va a ser una abstracción de las conexiones que hay entre las casas. Es decir, vamos a dibujar el grafo asociado. Tomaos vuestro tiempo. Releed de nuevo la introducción si es necesaria. Tratad de hacerlo sin mirar. ¿Ya lo habéis intentado? ¡Pues continuamos!

El grafo asociado a las conexiones entre las casas de mis amigos se puede ver en la Figura 5.5.

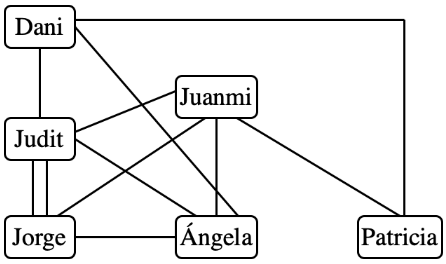


Figura 5.5: Grafo asociado a las conexiones entre las casas de mis amigos.

Observando el grafo, y gracias al razonamiento que hemos hecho antes, tenemos que darle la razón a Dani: como, por ejemplo, la casa de Dani tiene tres salidas/entradas, no va a ser posible recorrer todas y cada una de las conexiones que existen entre nuestras casas y volver al punto inicial. ¡Gracias por ayudarme a resolverlo!

5.2 Conceptos clave

Una vez que hemos puesto en contexto cómo nació la Teoría de Grafos, toca ponerse un poco técnico y dar definiciones y conceptos clave de manera rigurosa. Que no os asuste ese *palabro* que acabáis de leer. Riguroso quiere decir preciso. Y, en matemáticas, tenemos que ser precisos.

Como os digo, esta sección va a contener mucha información y toda ella relevante a la hora de resolver los problemas de las Olimpiadas Matemáticas. Aunque las definiciones puedan parecer demasiado largas y complejas, leedlas con atención. Tratad de entenderlas. Escribid con vuestras palabras lo que creéis que significa. Si no las entendéis, hay muchos ejemplos que van a hacer que la definición cobre sentido. Pero no os quedéis solo con mirar los ejemplos. Cuando hayáis entendido el ejemplo, mirad de nuevo las definiciones y comprobad que la entendéis. Dedicadle un ratito a cada definición y cada ejemplo, valdrá la pena. Y, una vez dicho esto... ¿estáis preparados para empezar? ¡Vamos allá!

Ya hemos visto en la introducción la idea de *grafo*. Pero... ¿cómo definimos un grafo de manera precisa? En la siguiente definición encontrarás la respuesta:

Definición 5.1 (Grafo simple)

Un grafo simple *es un par $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G)$ y $E(G)$ son conjuntos finitos. El conjunto $V(G)$ se denomina* conjunto de vértices *y el conjunto $E(G)$ se denomina conjunto de aristas.*
Cada elemento $e \in E(G)$ es de la forma $\{u, v\}$, donde $u, v \in V(G)$. En este caso decimos que u y v son vértices adyacentes.

En el siguiente ejemplo tienes un grafo *desgranado*: puedes ver cómo lo definimos y cuál es su conjunto de vértices y aristas. Si has entendido la definición a la primera, te diré dos cosas: la primera, ¡enhorabuena! Entender definiciones matemáticas fácilmente es bastante complicado; la segunda, coge papel y lápiz y trata de escribir el grafo de la Figura 5.6 tú solo y, después, comprueba que lo has hecho bien. Si no has entendido la definición, también te diré dos cosas: la primera, no desesperes, hacerse a la *jerga* matemática no es fácil; la segunda es que mires el ejemplo con detenimiento, lo entiendas y, después, vuelvas a leer la definición, ¡seguro que ahora la entiendes!

Ejemplo 5.2 Dado el grafo $G = (V(G), E(G))$ de la Figura 5.6 tenemos que el conjunto de vértices viene dado por $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. El conjunto de aristas, por su parte, viene dado por

$$E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}.$$

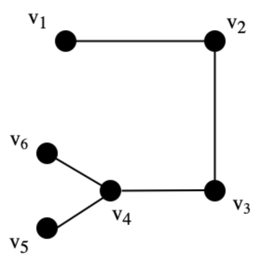


Figura 5.6: Grafo del Ejemplo 5.2.

Fijaos que, los vértices v_1 y v_2 son adyacentes, mientras que los vértices v_1 y v_3 no lo son. Queda como pequeño problema para el lector encontrar todos los vértices que son adyacentes y todos los que no lo son.

Vamos ahora a introducir una nueva definición. La definición de *grado* de un vértice.

Definición 5.2 (Grado)

Un vértice de un grafo tiene grado *m si de dicho vértice está conectado con m aristas.*

Ejemplo 5.3 (Continuación del Ejemplo 4.2). Los grados de los vértices del grafo del Ejemplo 5.2 son $\mathrm{gr}(v_1) = 1$, $\mathrm{gr}(v_2) = 2$, $\mathrm{gr}(v_3) = 2$, $\mathrm{gr}(v_4) = 3$, $\mathrm{gr}(v_5) = 1$ y $\mathrm{gr}(v_6) = 1$.

En el apartado anterior hemos presentado definiciones básicas en la Teoría de Grafos. Seguro que, alguno de vosotros se ha preguntado si, dado un grafo, la arista $\{u, v\}$ es la misma que la $\{v, u\}$. O si hay casos en las que es diferente. O si es posible que las distingamos. Pues allá vamos con las respuestas a todas estas preguntas:

Definición 5.3 (Grafo dirigido)

Un grafo dirigido *o* digrafo *es aquel en el que $\{u, v\} \neq \{v, u\}$.*

Leyendo esta definición os preguntaréis cómo se puede saber, viendo un grafo, si un grafo es dirigido o no. Los grafos dirigidos se caracterizan porque tienen pintadas, sobre sus aristas, flechas. De esta forma, la flecha apunta hacia el final de la arista. Es decir, si tenemos la arista de la Figura 5.7, esto significa que la arista $\{v_1, v_2\}$ está en el conjunto de aristas mientras que la arista $\{v_2, v_1\}$ no está en el grafo.

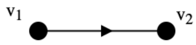


Figura 5.7: Arista dirigida de v_1 a v_2.

A continuación, vamos a hablar sobre *caminos, recorridos y ciclos*. *¿Cómo conectamos un vértice con otro? ¿Qué pasa si para ir de un vértice a otro repito aristas? ¿Y si repito vértices?* Seguro que os han surgido preguntas así. Pero de lo que estoy completamente segura es de que, cuando habéis leído *caminos, recorridos y ciclos* os habréis preguntado qué diferencia hay entre ellos. ¡Cojan papel y boli y hagan sus apuestas! En serio, coge papel y boli y dale una vuelta a que puede ser cada cosa. ¿Qué diferenciará a un camino de un recorrido? ¿Y a un recorrido de un ciclo? ¿Serán lo mismo y estoy tratando de engañaros? ¡Qué misterio! Vamos a resolverlo.

Definición 5.4 (Camino)

Un camino de longitud n *es una secuencia de* n *vértices de forma que entre un vértice y el siguiente siempre existe un arista que los une.*

Ejemplo 5.4 Dado el grafo del Ejemplo 5.2 tenemos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un camino de longitud 3 y que $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_4, v_5\}$ es un camino de longitud 7.

Definición 5.5 (Recorrido)

Un recorrido *es un camino en el que no existen aristas repetidas.*

Ejemplo 5.5 El camino $\{v_1, v_2, v_3\}$ del Ejemplo 5.4 es un recorrido, mientras que $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_4, v_5\}$ no lo es (fijaos que este último tiene una arista repetida).

Definición 5.6 (Camino simple)

Un camino simple *es un camino en el que no se repiten ni aristas ni vértices.*

Definición 5.7 (Camino cerrado)

Un camino cerrado *es un camino en el que el primer vértice coincide con el último.*

Y, ahora, vamos a por la última definición de eta parte.

Definición 5.8 (Ciclo)

Un camino cerrado en el que no se repite ningún vértice se denomina ciclo.

Ejemplo 5.6 Dado el grafo $G = (V(G), E(G))$ de la Figura 5.8 tenemos que

- $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un camino simple, mientras que $\{v_1, v_2, v_3, v_1, v_3\}$ no lo es.
- $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un camino cerrado.
- $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un ciclo.

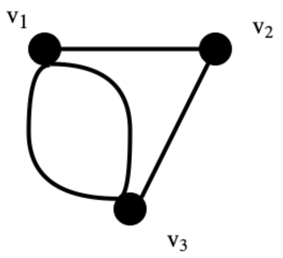


Figura 5.8: Grafo del Ejemplo 5.6.

Querido lector, no desesperes. Sé que son muchas definiciones y que son todas muy parecidas. Tómatelo con calma. Interioriza bien los conceptos que hemos presentado hasta ahora. Haz una tabla de similitudes y diferencias entre las definiciones que hemos presentado.

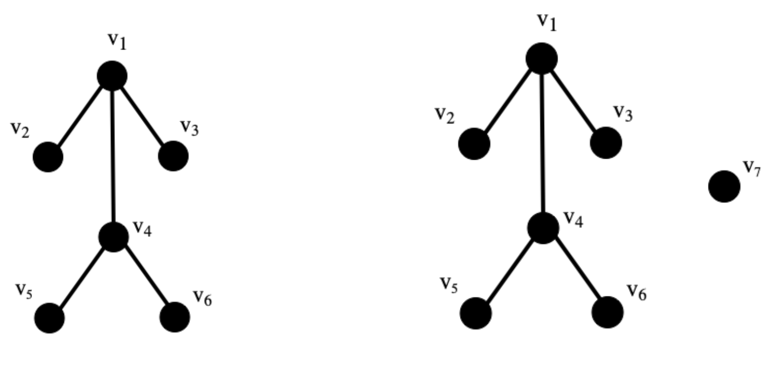
Alguna mente inquieta se habrá preguntado, mientras iba interiorizando las definiciones de la sección anterior, qué pasa cuando hay un vértice al que no se puede *acceder*. Un vértice (o conjunto de vértices y aristas) que están aislados. ¿Son esos grafos importantes? ¿Tienen nombre? ¿Sirven para algo? ¿Puede ocurrir? Tranquilas, mentes curiosas, vamos a despejar todas vuestras dudas.

Definición 5.9 (Grafo conexo)

Un grafo conexo *es un grafo tal que para cualquier par de vértices u y v siempre existe un camino que los une.*

Ejemplo 5.7 Dados los grafos de la Figura 5.9, tenemos que el grafo de la izquierda es un grafo conexo ya que puedo ir desde un vértice hasta todos los demás por un camino.

Sin embargo, si añado un vértice extra (es decir, obtengo como resultado el grafo de la derecha de la imagen), el grafo dejará de ser conexo. ¿Por qué? Piénsalo un momento. ¿Qué tenía que ocurrir con los vértices de los grafos conexos? Seguro que lo has adivinado: siempre están conectado con un camino. Y... ¿qué pasa con el vértice v_7? Está "suelto". Nunca podremos llegar a él desde el v_1 a través de un camino.



A) Grafo conexo B) Grafo no conexo

Figura 5.9: Ejemplo de grafo conexo y no conexo.

Nota: *Un pequeño* tip *para saber cuándo un grafo es o no conexo, es plantearse lo siguiente:* ¿es posible que, poniendo el lapicero sobre cualquier vértice del grafo, llegue a todos los demás sin levantar el lápiz del papel? *Si la respuesta es sí con todos los vértices, nos encontramos ante un grafo conexo. Si, por el contrario, hay un vértice para el que la respuesta es no, el grafo no será conexo.*

Definición 5.10 (Árbol)

Un grafo conexo que no tiene ni caminos cerrados ni ciclos se denomina árbol.

Ejemplo 5.8 El grafo de la Figura 5.10 es un árbol, porque no tiene caminos cerrados ni ciclos.

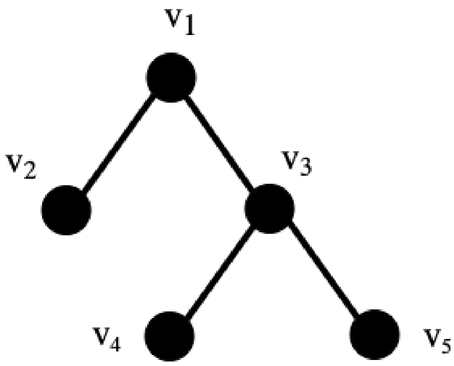


Figura 5.10: Ejemplo de árbol.

Teorema 5.1

Sea G un grafo y sean u y v dos vértices distintos. Si tenemos dos caminos simples distintos de u a v, entonces existe un ciclo en G.

Ejemplo 5.9 Vamos a fijarnos en el grafo de la Figura 5.11. Tenemos que puedo llegar de v_1 a v_3 a través del camino $\{v_1, v_2, v_3\}$ o del camino $\{v_1, v_4, v_3\}$. Así, como hay dos caminos simples distintos conectando a v_1 con v_3, el grafo tiene un ciclo.

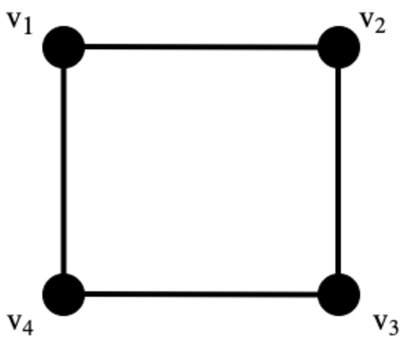


Figura 5.11: Grafo del Ejemplo5.9.

Para esta sección no hay ejercicio propuesto, pero os recomiendo que *juguéis* un poco con el concepto de grafo conexo y de árbol con los grafos que han aparecido en las secciones anteriores y en los Ejercicios Propuestos que os he sugerido que penséis.

Vamos a terminar la sección de conceptos clave hablando de *grafos completos*. No os voy a dar mucha información sobre ellos, pero veréis que van a ser de gran importancia en los ejercicios de Olimpiadas Matemáticas.

Definición 5.11 (Grafo completo)

Un grafo completo de n vértices *es un grafo que no tiene aristas iguales y tal que dados cualesquiera dos vértices siempre hay un arista que los une.*

Los grafos completos se denotan por K_n, donde n es el número de vértices que tiene el grafo.

Ejemplo 5.10 Los grafos de la Figura 5.12 son los grafos completos de 5 y 6 vértices respectivamente.

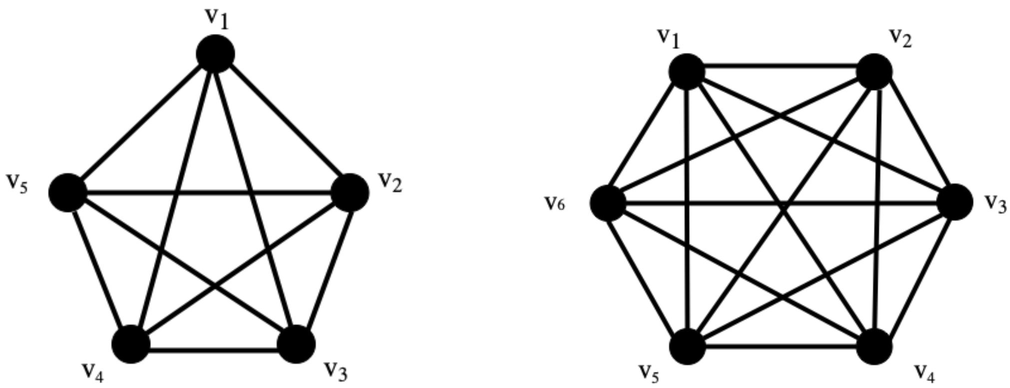


Figura 5.12: Grafos completos K_5 y K_6.

Como siempre, coge papel y lápiz y trata de dibujar K_7, K_8... hazte preguntas sobre este tipo de grafos y busca información complementaria que te pueda interesar. ¡Saciad vuestro hambre de conocimiento!

5.3 Grafos de Euler y Hamilton

Ya hemos trabajado con caminos, recorridos y ciclos: conocemos las similitudes y diferencias que hay entre ellos al dedillo. En esta sección vamos a trabajar con *grafos de Euler* y *grafos de Hamilton*, dos tipos de grafos muy importantes. (Os voy a contar una cosa: cuando en matemáticas veáis un nombre propio, que se os enciendan las alarmas... porque es MUY importante.) Estos grafos vamos a poder caracterizarlos de maneras concretas, usando caminos y ciclos especiales. Así que, antes de pasar de aquí, asegúrate de que los conceptos de la sección anterior los tienes tan accesibles en tu cabeza como el móvil lo tienes de la mano.

Definición 5.12 (Camino de Euler)

Un camino de Euler *o* camino euleriano *es un recorrido en el que aparecen todas las aristas.*

Ejemplo 5.11 El recorrido $\{v_5, v_2, v_1, v_4, v_3, v_2\}$ es un camino de Euler en el grafo de la Figura 5.13.

Definición 5.13 (Ciclo de Euler)

Un ciclo de Euler *o* ciclo euleriano *es un camino de Euler cerrado, es decir, un camino de Euler que comienza y termina en el mismo vértice.*

Ejemplo 5.12 El recorrido $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1\}$ es un ciclo de Euler en el grafo que aparece en la Figura 5.14.

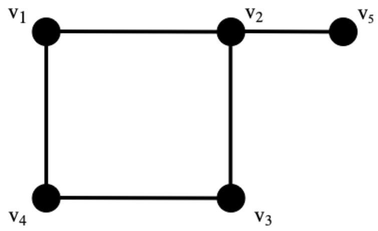


Figura 5.13: Grafo con un camino de Euler.

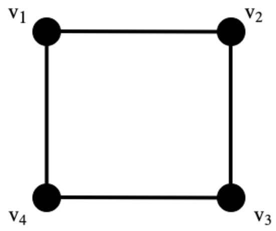


Figura 5.14: Grafo con un ciclo de Euler.

Definición 5.14 (Grafo de Euler)

Un grafo de Euler *o* grafo euleriano *es un grafo conexo con un ciclo de Euler.*

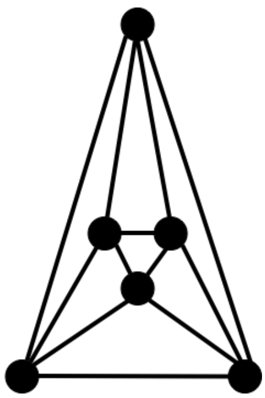
Ejemplo 5.13 El grafo del Ejemplo 5.11 no es un grafo de Euler puesto que no tiene un ciclo de Euler. Sin embargo, el grafo del Ejemplo 5.12 sí que lo es.

Proposición 5.1

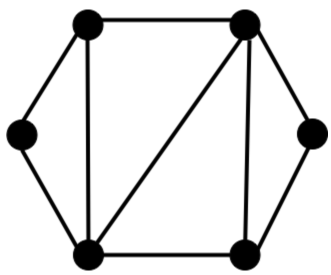
Si tenemos un grafo conexo, entonces es de Euler si, y solo si, el grado de cada vértice es par.

Ejemplo 5.14 Vamos a ver cómo funciona esta proposición aplicada a un ejemplo.

- El vértice v_5 del grafo del Ejemplo 5.11 tiene grado impar. Gracias a la proposición (y sin tener que hacer ningún cálculo más) sabemos que no es un grafo de Euler.
- Observando el grafo del Ejemplo 5.12, podemos observar que todos sus vértices tienen grado par. Usando, de nuevo, la proposición anterior, tenemos que el grafo es de Euler.
- El grafo que se muestra a continuación



  tiene todos los vértices de grado par. Por lo tanto, es un grafo de Euler.
- Fijémonos en el grafo que se muestra a continuación



  Podemos observar que tiene vértices de grado impar. Por lo tanto, no es un grafo de Euler.

Y, con este ejemplo, terminamos la teoría relacionada con grafos de Euler. Dejo como tarea para el lector que, en los grafos que hemos trabajado en esta sección, compruebe si hay o no caminos y ciclos de Euler.

Además, para que terminéis de interiorizar los conceptos sobre grafos de Euler, podéis realizar el Ejercicio Propuesto 4. Como siempre, tratad de sacar unos minutillos para realizar estos ejercicios. Volved a leer las definiciones y a mirar los ejemplos si hay algo que no os ha quedado del todo claro. ¿Ya los habéis hecho? Pues... ¡vamos a por lo siguiente!

Pasamos ahora a grafos de Hamilton. Pero antes, vamos a ver una serie de definiciones:

Definición 5.15 (Camino de Hamilton)

Un camino de Hamilton *o* camino hamiltoniano *es un recorrido en el que aparecen todos los vértices.*

Definición 5.16 (Ciclo de Hamilton)

Un ciclo de Hamilton *o* Hamiltionano *es un camino de Hamilton cerrado, es decir, un camino de Hamilton que comienza y termina en el mismo vértice.*

Definición 5.17 (Grafo de Euler)

Un grafo de Hamilton *o* Hamiltionano *es un grafo conexo con un ciclo de Hamilton.*

Ejemplo 5.15 El recorrido $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un camino de Hamilton en el grafo que aparece en la Figura 5.15. Además, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1\}$ es un ciclo de Hamilton, lo que convierte al grafo en un grafo de Hamilton.

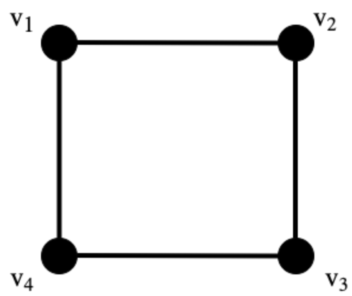


Figura 5.15: Ejemplo de un grafo con un ciclo de Hamilton.

Teorema 5.2

Sea G un grafo conexo con n vértices. Si el grado de todos los vértices es mayor que $\frac{n}{2}$, entonces G es un grafo de Hamilton.

Nota: *¿Encontráis alguna diferencia entre el Teorema 5.2 y la Proposición 5.1? Además de que uno habla de grafos de Hamilton y, la otra, de grafos de Euler, claro. Seguro que muchos lo habéis adivinado pero, los que no, fijaos con atención en lo siguiente: en la proposición aparecen las palabras* si, y solo si. *Esto nos indica que, si el grafo es de Euler, obligatoriamente todos sus vértices van a tener grado par. Y lo mismo ocurre al revés: si todos los vértices tienen grado par, entonces va a ser un grafo de Euler. Sin embargo, el teorema nos* *dice que, si todos los vértices tienen grado mayor que $\frac{n}{2}$, entonces es de Hamilton. Pero la inversa no es cierta: un grafo de Hamilton no tiene porqué tener todos sus vértices de grado mayor que $\frac{n}{2}$.*

Mirad con atención esta nota. Tratad de entenderla. Si no lo veis claro, descansad un poco. Dejad reposar la información y volved a leerla cuando tengáis el cerebro a pleno rendimiento. No paséis hacia adelante hasta que no estéis totalmente convencidos de que habéis entendido la diferencia entre lo que nos aportan la proposición y el teorema.

Ejemplo 5.16 Vamos a trabajar, en este ejemplo, en si el grafo de la Figura 5.16 es o no un grafo de Hamilton. Lo primero que vamos a hacer es intentar aplicar el Teorema 5.2. Si aplicamos el teorema (hacedlo vosotros, para comprobarlo), nos damos cuenta de que ninguno de los vértices tiene grado mayor que $\frac{n}{2}$. Es decir, este teorema no nos va a decir si el grafo es o no hamiltoniano. Vamos a tener que ponernos manos a la obra.

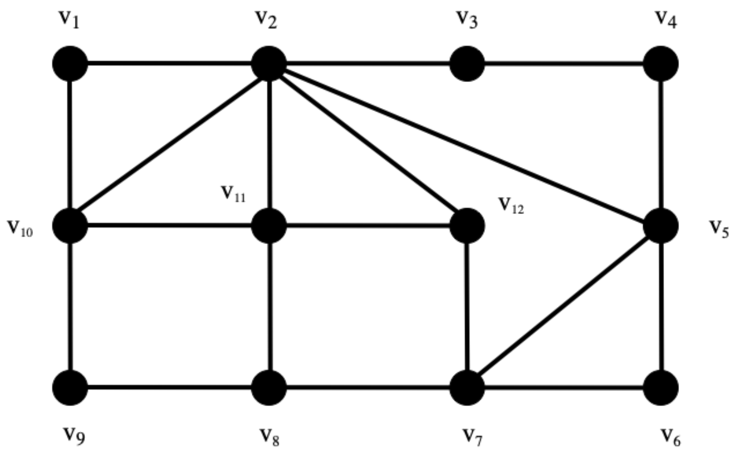


Figura 5.16: Grafo del Ejemplo 5.16.

Ahora, os toca trabajar a vosotros. El teorema no nos ha ayudado en nada, así que toca ponerse a trabajar. Buscad caminos de Hamilton. Y ciclos. ¿Hay? ¿No hay? Cuando lo hayáis pensado un poco - o lo hayáis resuelto, que seguro que lo habéis conseguido-, continuad leyendo.

En efecto, queridos lectores, el recorrido $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$ es un camino de Hamilton. Además, tenemos que $\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_{12}, v_{11}, v_8, v_9, v_{10}, v_1, v_2\}$ es un ciclo de Euler, por lo que el grafo de la Figura 5.16 es de Hamilton.

Como siempre, y antes de cambiar de sección, tomaos unos minutitos para hacer el Ejercicio Propuesto 5 y, en caso de que tengáis dudas, trabajad de nuevo la sección hasta que os queden todos los conceptos claros. ¿Ya lo tienes? ¡Pues seguimos!

5.4 Grafos coloreables

Esta sección está enteramente dedicada a grafos coloreables. Es, quizá, una sección que parece un poco alejada a lo que estábamos haciendo hasta ahora. Sin embargo, es muy, pero que muy, importante. Así que leedla con cariño. ¡*Let's go for it*!

Definición 5.18 (Grafo coloreable)

Una coloración *de un grafo G es una asignación de colores a los vértices de dicho grafo de forma que vértices adyacentes reciban colores distintos.*
Si el grafo se puede colorear con k colores, decimos que G es k-coloreable. *El mínimo k con el que se puede colorear un grafo se denomina* número cromático *de G y se denota por $\chi(G)$.*

Esta definición, quizá, sea un poco abstracta. Sobre todo si es la primera vez que la ves. Vamos a ver, con un ejemplo, qué nos está diciendo esta definición.

Ejemplo 5.17 En este ejemplo vamos a trabajar con el mapa de España. Sí, sí. Has leído bien. Con el mapa de España. ¿Recuerdas que en la introducción hicimos una abstracción del centro de la ciudad de Königsberg? Pues ahora vamos a hacer lo mismo, pero con el mapa de España - por Comunidades Autónomas.

Antes de seguir y de que se os vaya la vista a la abstracción del mapa, tratad de hacerlo vosotros. Estoy segura de que a estas alturas lo haréis de rechupete. En la Figura 5.17 podéis ver cómo queda la abstracción del mapa de España por Comunidades Autónomas.

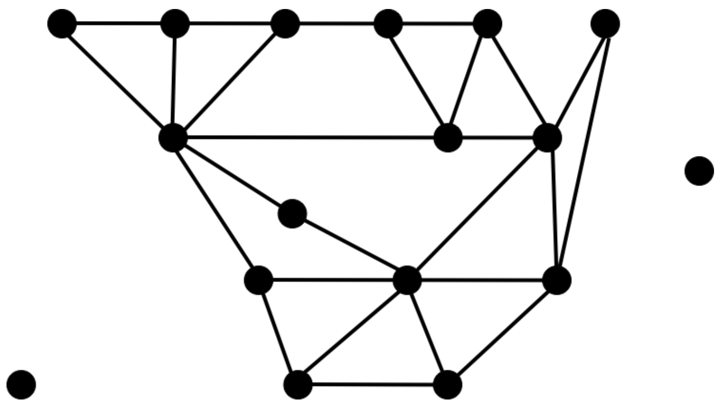


Figura 5.17: Grafo asociado al mapa de España, por Comunidades Autónomas.

¿Os ha quedado el mismo grafo? ¡Seguro que sí! Ahora, vamos a colorearlo. Tratad de hacerlo vosotros antes de mirar la solución, que la podéis ver en la Figura 5.18.

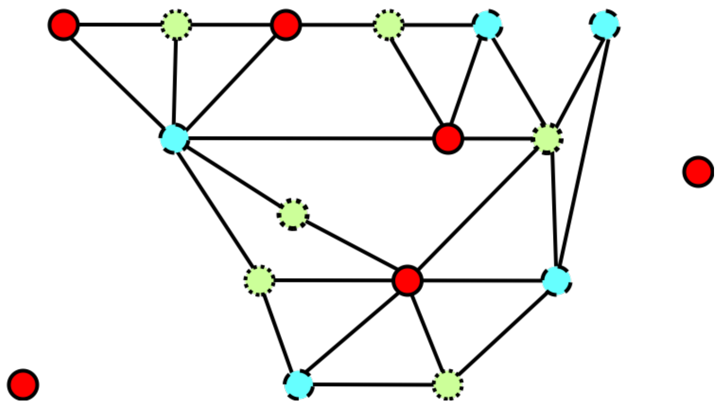


Figura 5.18: Grafo asociado al mapa de España, por Comunidades Autónomas.

Si nos fijamos en la coloración que hemos realizado, tenemos que el número cromático del grafo asociado al mapa de España, $\chi(G)$, es 3. Es decir, el mapa de España es 3-coloreable.

Teorema 5.3 (Teorema de los 4 colores)

Todo grafo plano y, en particular, un mapa que no tenga enclaves, se puede colorear siempre con 4 colores.

El Teorema de los 4 colores es muy importante. Voy a corregirme sobre lo que os he dicho en la sección de grafos de Euler y Hamilton: en matemáticas, siempre que algo tenga un nombre para identificarlo, es MUY importante.

Las siguientes proposiciones también lo son (aunque no tengan nombre para identificarlas). De hecho, ambas van a ser de gran relevancia para resolver los ejercicios de Olimpiadas Matemáticas que vamos a plantear en la siguiente sección.

Proposición 5.2

Todo árbol es 2-coloreable.

Proposición 5.3

Un grafo completo de n vértices, K_n, es n-coloreable.

Si nos fijamos en el árbol de la Figura 5.10 y en el grafo completo de 5 vértices de la Figura 5.12, tenemos que la proposición es cierta (véase la Figura 5.19).

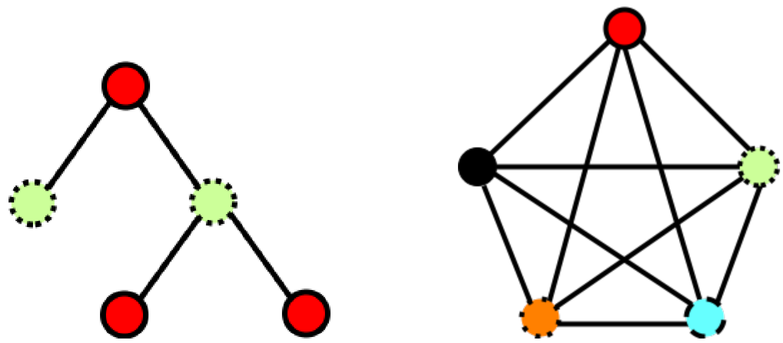


Figura 5.19: Coloración de un árbol y un grafo completo.

Esta sección ha sido la última sobre Teoría de Grafos. Espero que hayáis aprendido muchas cosas... ¡porque en la siguiente las pondremos en práctica! Así que, si las definiciones bailan en vuestras cabezas y las proposiciones se esconden en los rincones de vuestras mentes, ¡parad! Dad un paso atrás y volved a mirar los apuntes detenidamente. Y, cuando os sintáis preparados, ¡a por ello!

5.5 Problemas de olimpiadas matemáticas

En esta sección vamos a resolver dos problemas de Olimpiadas Matemáticas. Aunque tienen mucho texto, es porque las explicaciones son muy detalladas. ¡Vamos a darle duro!

Problema 5.1 (Olimpiada Matemática de Colorado, 2010). La Organización de las Naciones Unidas tiene 192 Estados Miembros de forma que cada par de Estados Miembros tiene un desacuerdo. Para formar una *unión más perfecta*, se establece una negociación: si cuatro representantes de cuatro Estados Miembros se sientan alrededor de una mesa redonda, de manera que cada par de representantes consecutivos tienen un desacuerdo, la negociación elimina uno de esos cuatro desacuerdos. Una serie de negociaciones consecutivas reduce el número total de desacuerdos a n. ¿Cuál es el mínimo valor de n?

Solución *Lo primero que vamos a hacer es analizar el problema. Quizá alguno piense:* ¿pero esto qué eh? *Con todo lo que sé de grafos y, cuando leo este enunciado, ¡no sé de que me hablan! Tranquilos, vamos a ir desgranándolo poquito a poco. Os daré pistas antes de ir resolviendo las cosas, para que podáis ir razonando y, así, cuando os encontréis ante otros problemas de este estilo, os sea pan comido.*

En primer lugar, tenemos que pensar en los Estados Miembros como los vértices del grafo. Entonces, como tenemos 192 *Estados Miembros,* ***nuestro grafo inicial va a contar con*** 192 ***vértices****. Son muchos, ¿verdad? Ya veréis que bien y con qué soltura vamos a trabajar con ellos.*

Vamos a pensar cómo seguir. Sabemos que un grafo consta de un conjunto de vértices (ya lo tenemos) y de un conjunto de aristas. ¿Dónde está nuestro conjunto de aristas? Parad un momento. Leed el enunciado de nuevo si es preciso. Tratad de analizarlo con la mente totalmente despierta. ¿Lo tenéis? ¿Qué van a representar las aristas? Si ya tenéis un idea, seguid leyendo a ver si habéis acertado. Si no se os ocurre nada y creéis que no se os va a ocurrir, seguid leyendo también. Si pensáis que podéis sacarlo pensándolo un ratito más... ¡dadle duro! Las aristas van a representar... ¡los desacuerdos! ***Dos vértices van a estar conectados si los Estados Miembros tienen un desacuerdo****.*

Ya casi tenemos el grafo con el que vamos a trabajar. Sabemos que los vértices representan a los Estados Miembros y, las aristas, a los desacuerdos que hay entre ellos. Como cada par de Estados Miembros tienen un desacuerdo, tenemos que un vértice está unido con todos los demás. Por lo tanto... ¡tenemos un grafo completo de 192 *vértices! Es decir, vamos a trabajar con* K_{192}.

Vamos a analizar ahora qué es una negociación. Pensad un poco cómo podríais representar una negociación en términos de grafos. ¿Lo tenéis? Una negociación consiste en seleccionar un ciclo de 4 *vértices en nuestro grafo (un* 4*-ciclo) y eliminar una arista de él.*

Una vez que hemos analizados las partes de nuestro enunciado, vamos a tratar de enunciar el problema de una forma diferente, más sencilla. ¿Se os ocurre algo? ¡Ahí va el problema reformulado!

Determinar el número mínimo de aristas del grafo de desacuerdos obtenido a partir del inicial tras una serie de eliminaciones consecutivas de una arista de un 4-ciclo.

Vamos a realizar unas observaciones:

- *Imaginemos que tenemos un* 4*-ciclo (podéis dibujarlo, para que podáis imaginaros la idea visualmente) y que eliminamos una arista de él. ¿Qué pasa con la conectividad del grafo? Efectivamente, la eliminación de la arista mantiene la conectividad del grafo. Además, ¡dejamos de tener un ciclo!*
- *Para cualquier par de puntos de un árbol, hay un único camino que los conecta.*
- *Gracias a la Proposición 5.2 sabemos que cualquier árbol es* 2*-coloreable.*
- *Los* 4*-ciclos son* 2 *coloreables y, apliquemos una negociación, continúa siendo* 2*-coloreable. Es decir, la negociación y su inversa conservan la propiedad de ser* 2*-coloreable.*

Si las n *negociaciones hiciesen que todos los ciclos desapareciesen, nuestro grafo inicial se transformaría en un grafo sin ciclos y conexo. Es decir, se transformaría en un árbol. En un árbol de* 192 *vértices y* 191 *aristas. Como la negociación y su inversa mantienen la propiedad de ser* 2*-coloreable, el grafo que hemos obtenido es* 2*-coloreable. Esto implica que el grafo inicial de desacuerdos es* 2*-coloreable. Pero... ¿*K_{192} *es* 2*-coloreable?*

¡No! ¡De ninguna de las maneras! Hemos llegado a un absurdo. Y, ¿de dónde viene este absurdo? De suponer que podemos llegar a un grafo de 191 *aristas. Vamos a realizar el siguiente proceso:*

1. *Dado K_{192}, vamos a tomar el* 4*-ciclo formado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y vamos a eliminar la arista $\{v_1, v_3\}$.*
2. *Repetimos el proceso: tomamos el* 4*-ciclo formado por $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ y nos deshacemos de la arista $\{v_1, v_4\}$.*
3. *Si repetimos el proceso con todos los* 4*-ciclos en los que aparece el vértice v_1, conseguimos romper todas las aristas que van conectadas a v_1. Salvo la arista $\{v_1, v_2\}$.*

Con este proceso hemos conseguido obtener el vértice v_1 conectado a un grafo completo de 191 *vértices, como el que mostramos en la Figura 5.20.*

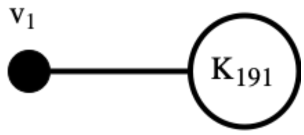


Figura 5.20: Grafo obtenido tras realizar negociaciones en todos los 4-ciclos en los que aparece v_1.

Realizando el mismo proceso en todos los 4*-ciclos donde aparece v_2, obtenemos el grafo de la Figura 5.21.*

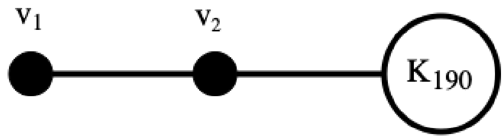


Figura 5.21: Grafo obtenido tras realizar negociaciones en todos los 4-ciclos en los que aparece v_1.

Reiterando el proceso con el resto de vértices, va a haber un punto en el que vamos a llegar al grafo de la Figura 5.22.

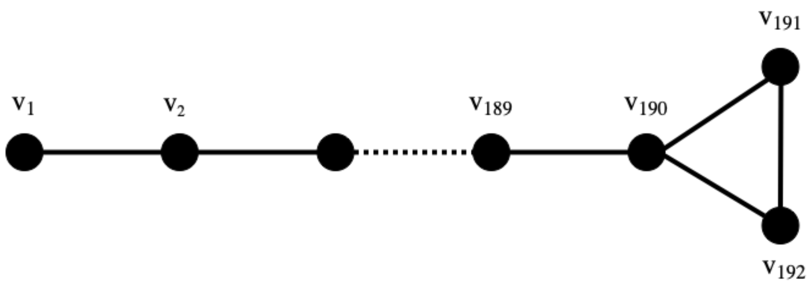


Figura 5.22: Grafo obtenido tras realizar negociaciones en todos los 4-ciclos en los que aparece v_1.

Este grafo que hemos obtenido tiene 192 *vértices,* 192 *aristas y no es* 2*-coloreable. Este es el grafo más pequeño al que podemos llegar. Por lo tanto, el mínimo número de desacuerdos es* 192*.*

Nota: *El problema anterior es duro. No es difícil, pero sí duro. Y largo. Así que miradlo despacio. Tomaos varios días si es necesario. Entendedlo bien. Haced las cosas que se han quedado en el tintero y que solo he nombrado. Convenceros de todo lo que hemos dicho. Y, cuando lo tengáis claro, ¡a por el siguiente!*

Problema 5.2 (Mathematical Olympiad Program, 2008). Prueba que si las aristas de K_n, el grafo completo de n vértices, son coloreadas de tal forma que ningún color es asignado a más de $n-2$ aristas, entonces existe un triángulo que tiene una arista de cada color.

Solución *Vamos a resolver este problema haciendo reducción al absurdo. Para ello, supongamos que no existe un triángulo con una arista de cada color.*

Definimos una componente C-conectada como un conjunto de vértices tales que para cualesquiera dos vértices de dicho conjunto, existe un camino entre ellos y todas las aristas están coloreadas del mismo color C.

Tomaos un momento para entender bien la definición y, cuando estéis seguros de tener claro lo que quiere decir... ¡continuad!

Ahora, vamos a llamar X a la componente C-conectada más larga para cualquier color C. Digamos que es color rojo. Supongamos que hay un vértice $v \notin X$ y consideremos dos vértices u_1 y u_2 conectados por una arista roja. Ninguna de las aristas $\{v, u_1\}$ y $\{v, u_2\}$ pueden ser de color rojo y, además, estas aristas tienen que ser del mismo color. ¿Por qué? Porque si fuesen de colores diferentes, ¡ya tendríamos un triángulo con tres aristas de diferente color! Digamos que $\{v, u_1\}$ y $\{v, u_2\}$ son de color azul.

Así, v está conectado a todos los vértices de X por aristas de un mismo color pero... entonces $X \cup \{v\}$ es una componente azul-conectada, ¡y es más grande que X! Y esto es ABSURDO. ¿Por qué? Porque recordad que habíamos supuesto que X era la C-componente más grande.

Esto implica que no va a poder haber ningún vértice v que no esté en X, luego los n vértices del grafo están en X. Pero como X-es rojo-conectado y tiene n vértices, entonces habrá, al menos, $n-1$ aristas de color rojo. Pero esto vuelve a ser ABSURDO porque el enunciado nos decía que no podía haber más de $n-2$ aristas coloreadas del mismo color. Y este absurdo viene de suponer que no existe un triángulo con tres aristas pintadas de diferente color. Es decir... ¡ese triángulo existe! ¡Ya lo tenemos!

Ejercicios Propuestos

1. En la Figura 5.23 se puede ver la imagen del centro de París. ¿Es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de las regiones, pasando por todos los puentes una única vez y regresando al mismo punto de partida?

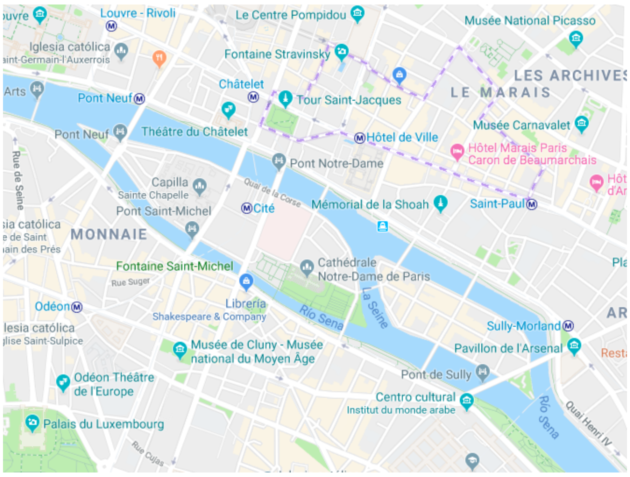


Figura 5.23: Grafo asociado al centro de París.

2. Calcula el conjunto de aristas y vértices de los grafos de la Figura 5.24.

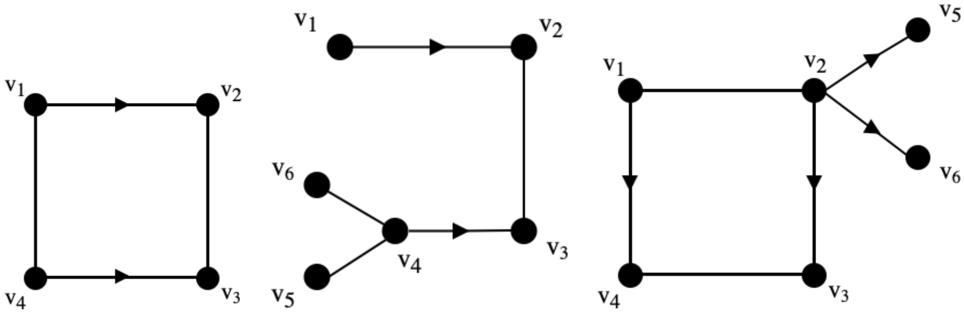


Figura 5.24

3. Calcula los posibles caminos (simples y cerrados), recorridos y ciclos de los grafos de la Figura 5.25. Haz lo mismo con los grafos del Ejercicio Propuesto 2. ¿Observas diferencias? Tómate unos minutos para pensar en ello.

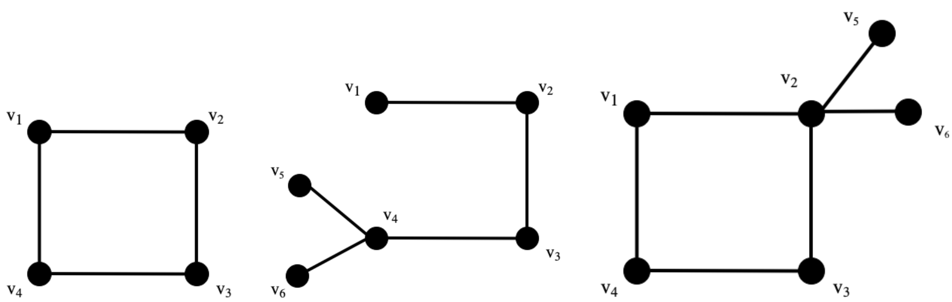


Figura 5.25

4. ¿Son los grafos de la Figura 5.26 de Euler?. Encontrad los posibles ciclos y caminos de Euler que aparezcan en ellos.

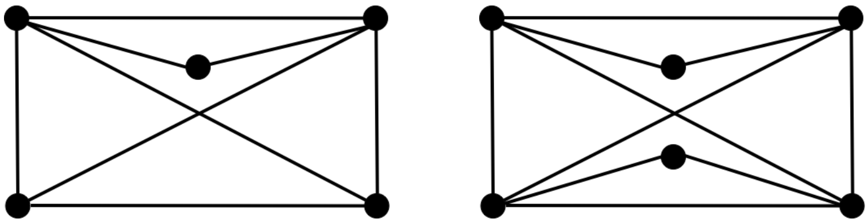


Figura 5.26

5. ¿Es el grafo de la Figura 5.27 de Hamilton? Encontrad los posibles ciclos y caminos de Hamilton que aparezcan en ellos.

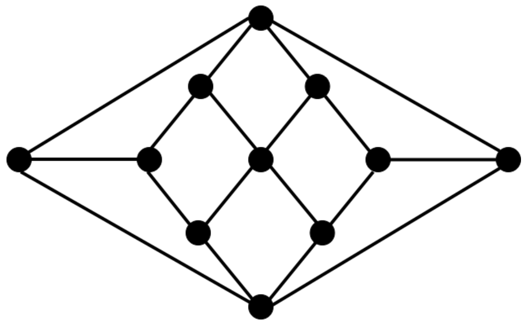


Figura 5.27

Bibliografía Adicional

1. Ore, O. (1995). *Grafos y sus aplicaciones*. Colección la tortuga de Aquiles, Proyecto EULER, Madrid.
2. Ore, O. & Wilson, R. J. (1990). *Graphs and their uses* (Vol. 34). Editorial Cambridge University Press.