CAPÍTULO 8

8

SERIES NUMÉRICAS

Daniel José Rodríguez Luis
Universidad de La Rioja

Palabras clave

- *Series convergentes*
- *Series divergentes*
- *Criterios de comparación de series*
- *Serie armónica*
- *Series geométricas de razón r*
- *Series Telescópicas*

En matemáticas, la noción de serie numérica hace referencia a la operación de sumar una cantidad infinita de números reales, uno tras otro. El estudio de las series numéricas es una parte fundamental del cálculo matemático, con aplicaciones en problemas de combinatoria y probabilidad.

Durante mucho tiempo, la idea de que la suma de una infinidad de números pudiese dar un resultado finita se consideraba una auténtica locura. Hace más de 2400 años que el filósofo griego Zenón de Elea, famoso por sus paradojas del tiempo y el movimiento, formuló la conocida como “paradoja del corredor”, donde el sentido común hacía pensar que la suma de infinitos números debía ser una cantidad finita. Este hecho precipitó una crisis en las matemáticas de la Antigua Grecia, que culminó con la aparición de las series numéricas.

En este capítulo veremos la idea de series numéricas que se derivaba de la paradoja de Zenón. Así mismo, veremos algunas series numéricas importantes y criterios que nos ayudarán a afirmar que una serie es convergente, es decir, que su suma es una cantidad finita. Por último, aplicaremos los conocimientos adquiridos en la resolución y el estudio de las series numéricas.

8.1 Introducción

Para poder hablar de las series numéricas, es necesario recordar el concepto de *sucesión númérica* que fue introducido en el capítulo dedicado a las ecuaciones en recurrencia.

Definición 8.1 (Sucesión Numérica)

En matemáticas, una ***sucesión*** *es toda aquella función f definida sobre conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y que toma valores en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ dada por*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow x_n. \end{aligned}$$

De forma general, denotamos por (x_n) a la sucesión numérica definida por $x_n = f(n)$ con $n \in \mathbb{N}$.

Nota: *En ocasiones, y por abuso de notación, las sucesiones se representan simplemente por x_n.*

Ejemplo 8.1 La sucesión constante 1 es aquella sucesión (x_n) donde cada término es $x_n = 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 8.2 Una sucesión alternada es aquella de la forma $x_n = (-1)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. En este caso se observa que

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1, \quad \dots\dots, \quad x_n = (-1)^n, \dots$$

Lo de "alternada" proviene por el cambio de signo que experimenta la sucesión entre un término y el siguiente.

Ahora bien, dada una sucesión de números reales (x_n), es posible construir una nueva sucesión (S_n) definida como resultado de sumar los n primeros términos de la sucesión (x_n), esto es,

$$S_1 = x_1, \quad S_2 = x_1 + x_2, \quad S_3 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \dots \quad S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \dots$$

A esta sucesión (S_n) se le denomina **sucesión de sumas parciales asociadas** (x_n).

Ejemplo 8.3 Para la sucesión del Ejemplo 8.1 dada por $x_n = 1$ con $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión de sumas parciales (S_n) viene dada por

$$S_1 = x_1 = 1, \quad S_2 = x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2, \quad S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 1 + 1 = 3, \quad \dots$$

Es fácil comprobar que el término general de la sucesión (S_n) viene dado por $S_n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 8.4 Para la sucesión del Ejemplo 8.2 dada por $x_n = (-1)^n$ con $n \in \mathbb{N}$, se tiene que los primeros términos de la sucesión de sumas parciales (S_n) vienen dados por

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + (-1) = 0, \quad S_3 = 1 + (-1) + 1 = 1, \quad S_4 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0, \quad \dots$$

Se puede probar que el término general de la sucesión de sumas parciales viene dado por

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Si no te lo crees, puedes probar esta afirmación usando el principio de inducción matemática.

A partir de esta sucesión de sumas parciales, obtenemos la noción de serie numérica o serie infinita.

Definición 8.2 (Serie Numérica)

*Dada una sucesión de números reales (x_n), una **serie numérica** (o también **serie infinita**) se puede entender como "la suma de infinitos términos" y que se denota por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n + \ldots$$

Nota: *Por comodidad, las series numéricas también se escriben de la forma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots$*

La relación que existe entre las series numéricas y la sucesión de sumas parciales que hemos definido anteriormente es la siguiente: si tenemos una sucesión (x_n), podemos considerar la sucesión de sumas parciales (S_n) que se define como $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahor bien, dado que una serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es el resultado de sumar los infinitos términos de la sucesión (x_n), dicha serie numérica se puede entender como el resultado al que se aproxima la sucesión de sumas parciales (S_n) cuando consideramos el subíndice "n" un número muy grande, esto es, cuando n tiende a infinito.

En terminología matemática, lo que hemos dicho anteriormente se escribe de la siguiente manera

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Entrando en un poco de historia, ¿Cómo y dónde surge la idea de series infinitas? ¿A qué clase de lunático/chalado se le ocurriría sumar una cantidad infinitos de números? Pues bien, todo tiene su origen en las reflexiones de filósofos y matemáticos de la Antigua Grecia.

En esta línea, uno de los primero ejemplos de series infinitas se le atribuye a Zenón de Elea (490-430 a. C), un filósofo griego que se hizo célebre por el planteamiento de varias "paradojas"(también conocidas como "aporías"), esto es, situaciones que presentan ciertas contradicciones con la lógica, siendo las más famosas aquellas relativas al tiempo y al movimiento. En la Figura 8.1, que se corresponde con un fresco presente en la Biblioteca de El Escorial (Madrid), podemos ver al filósofo Zenón mostrando a sus discípulos las puertas a la verdad y la falsedad (Veritas et Falsitas en latín, respectivamente).

Figura 8.1: Zenón muestra las puertas a la verdad y la falsedad.

Llegados a este punto, la paradoja de Zenón (también conocida como la paradoja del corredor) se enuncia de la siguiente forma:

Un corredor nunca alcanzará la línea de meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total.

Probablemente te estás preguntando ¿Por qué el enunciado de Zenón plantea una situación contradictoria? Para verlo con claridad, vamos a analizar con detenimiento la paradoja de Zenón: supongamos que el corredor se encuentra en el punto de partida (situado en el punto 1) y que corre hacia la meta (situada en el punto 0). Vamos a representar por $1/2$, $1/4$, $1/8, \ldots$ y así sucesivamente las fracciones de recorrido hasta el punto de meta, tal y como puede verse en la Figura 8.2. Supongamos que el corredor va a una velocidad constante y que, por tanto, tarda T minutos en recorrer la primera mitad del trayecto hacia la meta. Es decir, en la Figura 8.2 el corredor emplea T minutos en ir desde el punto 1 al punto $1/2$.

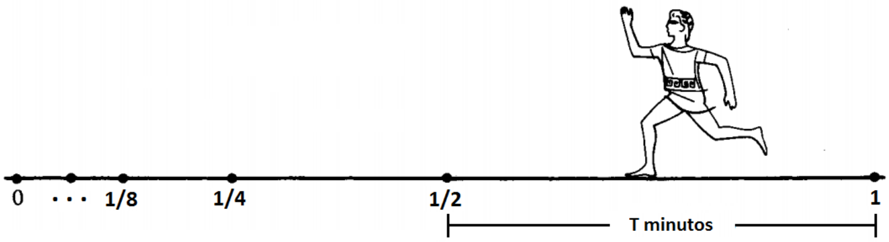

Figura 8.2: El corredor emplea T minutos entre los puntos 1 y $1/2$.

Ahora bien, para el siguiente cuarto del recorrido (que es la mitad del trayecto que falta por recorrer para llegar a la meta) nuestro corredor necesitaría la mitad del tiempo empleado en el tramo anterior. Es decir, en la Figura 8.3 el corredor invierte $T/2$ minutos para ir desde el punto $1/2$ al punto $1/4$. $T/2$ minutos.

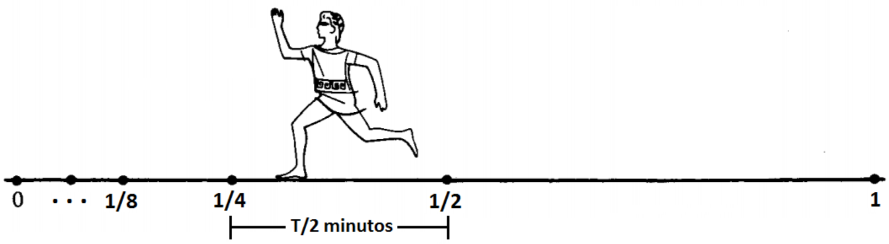

Figura 8.3: El corredor emplea $T/2$ minutos entre los puntos $1/2$ y $1/4$.

Pero nuevamente, para el siguiente octavo del recorrido (que es la mitad del trayecto que falta por recorrer para llegar a la meta) nuestro corredor necesitaría la mitad del tiempo empleado en el tramo anterior. Es decir, en la Figura 8.4 el corredor emplea $T/4$ minutos para ir desde el punto $1/4$ al punto $1/8$. Y así sucesivamente con el resto del recorrido.

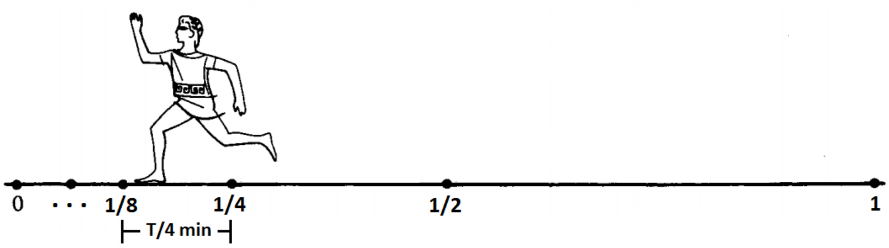

Figura 8.4: El corredor emplea $T/4$ minutos entre los puntos $1/4$ y $1/8$.

En general, para cada $n \in \mathbb{N}$ el corredor emplea $T/2^n$ minutos en recorrer la distancia entre los puntos $1/2^n$ y $1/2^{n+1}$. Por lo tanto, el tiempo que tarda el corredor en recorrer la distancia desde el punto de partida hasta el punto de meta es la suma de todos estos intervalos de tiempo intermedios, que se expresa mediante la suma infinita de la forma siguiente

$$2T = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \frac{T}{2^{n+1}} + \ldots$$

Ahora bien, ¿Dónde aparece la contradicción en lo que plantea Zenón? Pues bien, ya que para ir del punto de partida al punto de meta siempre faltará por recorrer la mitad de una cierta distancia (por muy pequeña que sea), podemos concluir que **el corredor nunca llegaría al punto de meta**.

Espera un momento, ¿Cómo? Pues sí, has leído bien: la paradoja de Zenón sugiere que el movimiento entre dos puntos es imposible. Pero, ¡tranquilidad, pequeño saltamontes!, gracias a la experiencia sabemos que esto no es así.

De hecho, la propia experiencia nos dice que el corredor debe emplear $2T$ minutos en recorrer el trayecto desde el punto de partida hasta el punto de meta, ya que va a velocidad constante y además el corredor ha invertido T minutos en recorrer la mitad del trayecto. Por lo tanto, atento que se viene *spoiler*, para que el planteamiento de Zenón sea coherente con nuestra propia experiencia debe ocurrir que

$$2T = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \frac{T}{2^{n+1}} + \dots \tag{8.1}$$

En la siguientes secciones veremos conceptos y herramientas para demostrar que la igualdad (8.1) es cierta.

Dejando aparte la implicación de que todo movimiento es imposible, la paradoja de Zenón llevó al descubrimiento de que una cantidad finita (en este caso, el tiempo empleado por el corredor) podía dividirse en un número infinito de partes más pequeñas, lo que posteriormente pasaría a denominarse como series infinitas.

Una variante interesante de la paradoja de Zenón es la siguiente: supongamos que la velocidad del corredor no es constante sino que disminuye de tal forma que necesita T minutos para ir de 1 a $1/2$, $T/2$ minutos para ir de $1/2$ a $1/4$, $T/3$ minutos para ir de $1/4$ a $1/8$ y así sucesivamente. En general, el corredor emplea T/n minutos para ir de $1/2^{n-1}$ a $1/2^n$. Por lo tanto, según la situación que hemos planteado anteriormente de velocidad no cosntante, el tiempo que necesita el corredor para ir desde el punto de partida hasta el punto de meta viene dado por la serie numérica

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{n} + \frac{T}{n+1} + \dots \tag{8.2}$$

De hecho, y atentos nuevamente que se viene *spoiler*, en la siguiente Sección 8.3 veremos que el resultado de la serie presente en la ecuación (8.1) es una cantidad inconmensurable, es decir, es una cantidad tan grande que no se puede medir.

En la siguiente sección veremos algunas nociones básicas relacionadas con las series infninitas, así como algunos ejemplos de series importantes que serán de gran utilidad para el desarrollo del capítulo.

8.2 Nociones básicas y series importantes

Tal y como hemos comentado en la Definición 8.2 de la Sección 8.1 , se denomina **serie infinita** a la suma de infinitos términos de una sucesión de números reales (x_n) y que denotamos, de manera abreviada, por la expresión $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots$. De manera informal, las series infinitas se clasifican en dos bloques:

1. **Series convergentes**: Aquellas cuya suma es un número finito fijo.
2. **Series divergentes**: Aquellas que NO son convergentes.

Pero, ¿cómo saber si una serie es convergente o divergente? Para ello, y con un poco más de rigor matemático, usamos la sucesión de sumas parciales asociadas a una serie infinita para definir la idea de convergencia.

Definición 8.3 (Serie convergente)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *una serie infinita y denotemos por* $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n = x_1 + x_2 \cdots + x_N$ *la sucesión de sumas parciales asociada a dicha serie. Diremos que la serie infinita es* ***convergente*** *si existe el límite de la sucesión de sumas parciales, es decir, si existe una cantidad* $S \in \mathbb{R}$ *tal que* $S = \lim_{N\to\infty} S_N$.
En caso de que una serie infinita sea convergente escribimos $S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$.

La idea de la series convergentes es la siguiente: diremos que una serie infinita es convergente si la sucesión de sumas parciales se "aproximan" a un valor fijo S cuando el número de sumandos crece de forma inconmensurable. En otras palabras:

$$S_1 = x_1, \quad S_2 = x_1 + x_2, \quad S_3 = x_1 + x_2 + x_3 \quad , \ldots, \quad S_N = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N \xrightarrow[N\to\infty]{} S.$$

Nota: *Gráficamente una serie es convergente cuando a medida que vamos añadiendo términos a la suma, el resultado se acerca cada vez más al valor* S. *En la Figura 8.5 se representa la sucesión de sumas parciales (puntos negros) aproximándose a la cantidad finita* S *(punto rojo).*

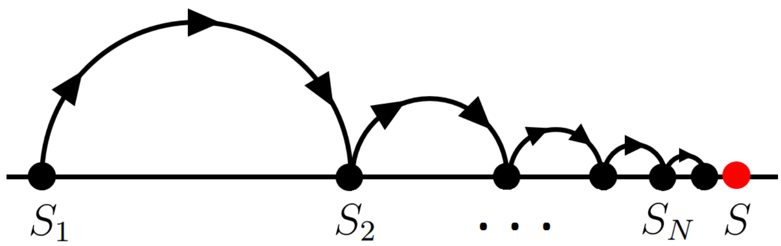

Figura 8.5: Interpretación de una serie convergente mediante la sucesión de sumas parciales.

También, en términos de la sucesión de sumas parciales, tenemos la definicón de una serie divergente.

Definición 8.4 (Serie divergente)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *una serie infinita y denotemos por* $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n = x_1 + x_2 \cdots + x_N$ *la sucesión de sumas parciales asociada a dicha serie. Diremos que la serie infinita es* ***divergente*** *si el límite de la sucesión de sumas parciales* $\lim_{N\to\infty} S_N$ *bien no es finito o bien directamente no existe.*

Ejemplo 8.5 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots$ es divergente. En efecto, si denotamos por S_n a la sucesión de sumas parciales observamos que

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + 1 = 2, \qquad S_3 = 1 + 1 + 1 = 3, \qquad S_4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \ldots$$

En general, se tiene que $S_n = n$ para cada $n \geq 1$. Como además $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, podemos concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots$ es divergente.

Ejemplo 8.6 La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = (-1) + 1 + (-1) + 1 + \ldots$ también es divergente.

En efecto, tal y como se hizo en el Ejemplo 8.4, si denotamos por S_n a la sucesión de sumas parciales se tiene

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, la sucesión S_n nunca se aproxima a un número S fijo ya que:

- Si n es par, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.
- Si n es impar, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Por lo tanto, como el límite anterior es diferente dependiendo de cómo nos movamos en la sucesión de sumas parciales (si por los pares o por los impares), podemos concluir que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = (-1)^n = (-1) + 1 + (-1) + 1 + \ldots$ es divergente.

Ahora bien, ¿Qué pasa con las series convergentes? ¿Podemos ver algunos ejemplos? A continuación, vamos a definir dos series infinitas convergentes que serán de gran utilidad en el desarrollo del capítulo.

Definición 8.5 (Serie geométrica de razón r)

*Para cada número real $-1 < r < 1$, la **serie geométrica de razón** r dada por la expresión*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots$$

es una serie convergente. Además, el valor de su suma es $1/(1-r)$.

Nota: *Observamos que si $r = 1$ resulta la serie del Ejemplo 8.5 mientras que si $r = -1$ se obtiene la serie alternada del Ejemplo 8.6, ambas series divergentes. Por ello, en la defnción anterior exigimos $-1 < r < 1$.*

Vamos a preceder a probar que la serie geométrica de razón r es convergente calculando una expresión general el término general de la sucesión de sumas parciales. Si denotamos por S_n a las sumas parciales de la serie geométrica vemos que

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + r, \qquad S_3 = 1 + r + r^2, \qquad S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1},$$

A simple vista, no parece haber una fórmula sencilla que ayude a simplificar las expresiones. Sin embargo, podemos realizar la siguiente observación: Si tomamos el término de la suma parcial S_n y la multiplicamos por la razón r obtenemos

$$\begin{cases} S_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} \\ rS_n &= \phantom{1 + {}} r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n \end{cases} \quad \text{si restamos resulta } (1-r)S_n = 1 - r^n.$$

Por lo tanto, obtenemos una fórmula explícita que nos permite calcular la suma de los n-primeros términos de la serie geométrica de razón r y que viene dada por

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r}, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{8.3}$$

Ahora bien, como además, $-1 < r < 1$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ con lo que finalmente la serie geométrica es convergente y el valor de su suma es

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots r^n + r^{n+1} + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

Ejemplo 8.7 Gracias a lo expuesto anteriormente en relación a la serie geométrica, podemos demostrar que la serie que aparece en la paradoja de Zenón dada por

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots = T\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \dots\right)$$

es una serie convergente (al ser, esencialmente, de una serie geométrica de razón $r = 1/2$). Además el valor de la suma de la serie geométrica de razón $r = 1/2$ es $S = 1/(1-r) = 2$. Por lo tanto, hemos probado que la serie en la paradoja de Zenón también es convergente y su suma vale $2T$, es decir,

$$2T = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \frac{T}{2^{n+1}} + \dots$$

Ya podíamos sospechar esta igualdad cuando escribimos la ecuación (8.1).

Nota: *De forma alternativa, se puede demostrar que la serie presente en la paradoja de Zenón es convergente atendiendo a sucesión de sumas parciales dada por*

$$S_1 = 1 = 2 - 1, \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2^1}, \qquad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{2^2}$$

Usando la inducción matemática, se puede probar que para cada $n \geq 1$ se cumple que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2.$$

Por último, veamos otro tipo de series infinitas que son convergentes.

Definición 8.6 (Serie telescópica)

*Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se dice **telescópica** si existe una función F definida en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y que toma valores en $\mathbb{R}$, es decir, una función $F : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que cada término de la series se escribe de la siguiente forma*

$$x_n = F(n) - F(n-1), \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

A continuación, vamos a calcular una expresión para el término general de la sucesión de sumas parciales cuando estamos ante una serie telescópica. Atendiendo a la Defición 8.6, si denotamos por S_n a las sumas parciales de la serie telescópica se tiene que

$$S_1 = F(1) - F(0), \qquad S_2 = x_1 + x_2 = F(2) - F(0), \qquad S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = F(3) - F(0), \quad \dots$$

En general, se puede probar que la fórmula para el término n-ésimo de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = F(n) - F(0), \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Por lo tanto, siempre que exista $\lim_{n\to\infty} F(n) = L$ y sea finito, la serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie convergente y el valor de su suma es $L - F(0)$.

Nota: *En el caso de que el índice del sumatorio empezara en un valor $n = N$ con $N \neq 1$, la serie sigue siendo telescópica pero el valor de su suma es $L - F(N-1)$.*

Ejemplo 8.8 Estudiar la convergencia de la serie infinita

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\,(n+1)}.$$

Como pequeña nota histórica, mencionar que esta serie aparece por primera vez en 1665, cuando el matemático holandés Christiaan Huygens estudiaba un problema relacionado con probabilidades. Más tarde, en 1673, Huygens preguntó al matemático alemán Gottfried Leibniz sobre la convergencia de la serie. Leibniz observó que se trabata de la suma de los inversos de los números triangulares T_n cuya fórmula general viene dada por la expresión $2T_n = n(n+1)$.

Ahora bien, el término general de nuestra serie $x_n = 2/n(n+1)$ puede reescribirse de la siguiente forma

$$x_n=\frac{2}{n(n+1)}=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=-2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=F(n)-F(n-1),$$

donde, en este caso, $F(n) = -2/(n+1)$ para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, estamos ante una serie infinita de tipo telescópica, ya que cada término x_n de la serie puede escribirse como $x_n = F(n) - F(n-1)$, para una cierta función F concreta. Como además $F(0) = -2$ y $L = \lim\limits_{n\to\infty} F(n) = 0$, se tiene que la serie es convergente y el valor de su suma es $L - F(0) = 2$. Luego, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\,(n+1)}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots=2.$$

Ejemplo 8.9 La siguiente serie infinita

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},$$

es convergente y el valor de su suma es 1. En efecto, en este caso observamos que cada término x_n puede reescribirse como

$$x_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{-1}{n+1}-\left(\frac{-1}{n}\right)=F(n)-F(n-1),$$

donde la función F viene dada por $F(n) = -1/(n+1)$ para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, la serie anterior es telescópica. Como además y $F(0) = -1$ y $L = \lim\limits_{n\to\infty} F(n) = 0$, se tiene que la serie infinita es convergente y el valor de su suma es $L - F(0) = 1$.

8.3 Criterios de convergencia

Hemos visto en la sección anterior que la sucesión de sumas parciales S_n permiten determinar fácilmente el comportamiento de la serie (convergente o divergente) hasta tal punto que podemos dar el valor exacto de la suma cuando la serie es convergente. Sin embargo, en la mayoría de los casos no se puede obtener una fórmula sencilla para la sucesión de sumas parciales, por lo que el estudio del carácter de una serie resulta bastante complicado. Es por ello que grandes matemáticos de principios del siglo XIX, como Cauchy o D'Alembert, se pusieron manos a la obra y desarrollaron criterios de convergencia en los que no es necesario saber conocer una fórmula explícita para la sucesión de sumas parciales de una serie infinita.

Uno de los primeros criterios que apareció involucra a aquellas series infinitas de las que sí sabemos su comportamiento (convergente o divergente), y es el conocido como criterio de comparación.

Proposición 8.1 (Criterio de comparación)

Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones numéricas de términos no negativos (esto es, $x_n, y_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$) tales que se cumple que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq 1$, entonces:

1. *Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ también es convergente.*
2. *Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ también es divergente.*

A grandes rasgos, la Proposición 8.1 nos dice que si una serie infinita está “controlada” (la terminología correcta es “acotada”) superiormente por otra serie infinita que es convergente, entonces la primera serie también será convergente. La justificación matemática de este hecho es la siguiente: supongamos que tenemos dos series infinitas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ con $x_n, y_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tales que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq 1$. Denotemos por

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad \text{y} \qquad T_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

las sucesión las sumas parciales de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, respectivamente.

Ahora bien, como se cumple que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq 1$, se tiene que $S_n \leq T_n$ para todo $n \geq 1$. Si, por ejemplo, la serie infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente sabemos que existe el valor $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$ y que además al tratarse de una serie de términos no negativos se tiene que $T_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq T$ para cada $n \geq 1$. Por último, como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es de términos no negativos se tiene que la sucesión de sumas parciales S_n es creciente. Como además se cumple que $S_n \leq T_n$ para todo $n \geq 1$, se tiene que la sucesión S_n está acotada superiormente por T. Por lo tanto, al ser S_n una sucesión creciente y acotada superiormente, se tiene que existe $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ que es, precisamente, el valor de la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. De hecho se cumple simpre que $S \leq T$.

Con una idea similar a la utilizada en el párrafo anterior se puede probar el criterio de acotación en lo relativo a series divergentes.

Ejemplo 8.10 La serie infinita dada por

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

es una serie convergente. En efecto, ya que es fácil observar que para todo $n \geq 1$ se cumple la desigualdad $(n+1)^2 = (n+1)(n+1) \geq n(n+1)$. Como además, en virtud del Ejemplo 8.9, sabemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente, por lo que aplicando el criterio de comparación podemos concluir que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ también es convergente. Además, como el valor de la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es igual a 1, podemos asegurar que el valor de su suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ es menor o igual que 1.

Ejemplo 8.11 La serie infinita dada por

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

es convergente. En este ejemplo, a diferencia del anterior, la acotación que podemos obtener para las sumas parciales no es tan evidente. Sin embargo, usando la inducción matemática se puede probar que para todo $n \geq 1$ se cumple la desigualdad $2^{n-1} \leq n!$, por lo que tenemos que $1/n! \leq 1/2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, hacemos una comparación con una serie geométrica de la forma

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Como además, en virtud del Ejemplo 8.7, sabemos que la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, aplicando el criterio de comparación podemos concluir que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ también es convergente. Además, como el valor de la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es igual a 2, podemos asegurar que el valor de su suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es menor o igual que 2.

Nota: *La Proposición 8.1 no es cierta, en general, cuando se consideran series infinitas cuyos términos sean negativos. Por ejemplo, consideremos la serie geométrica de razón $r = 1/2$ dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ y la serie constante dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$. Observamos que la serie geométrica controla superiormente a la serie constante (ya que se cumple la desigualdad $-1 < 1/2^n$, para todo $n \geq 1$). Sin embargo, es fácil comprobar la serie constante es divergente mientras que la serie geométrica es convergente.*

Una de las aplicaciones más interesantes del criterio de comparación es la siguiente: Supongamos que en la paradoja de Zenón, la velocidad del corredor no es constante sino que disminuye de tal forma que necesita T minutos para ir de 1 a $1/2$, $T/2$ minutos para ir de $1/2$ a $1/4$, $T/3$ minutos para ir de $1/4$ a $1/8$ y así sucesivamente. En general, el corredor invierte T/n minutos para ir de $1/2^{n-1}$ a $1/2^n$.

Por lo tanto, el tiempo empleado el corredor para ir desde el punto de partida hasta el punto de meta viene dado por la serie infinita

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{n} + \frac{T}{n+1} + \ldots$$

Esta serie es, esencialmente, conocida como **serie amónica**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

la cual fue estudiada nada más y nada menos que por Pitágoras.

A priori, podríamos pensar que esta serie debe ser convergente ya que, al igual que ocurre con las series geométricas, en cada paso vamos sumando una cantidad cada vez más pequeña. Sin embargo, eso no es del todo cierto: es verdad, esta serie crece lento pero lo que añadimos no es lo suficientemente pequeño como para evitar que la suma crezca indefinidamente. En otras palabras, la serie armónica es divergente. ¡Flipa colega!

Para ver esto, vamos a estudiar cómo se comportan las siguientes sumas parciales de esa serie

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$
$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$
$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$
$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

En general, se puede probar que $S_{2^n} \geq (n+1)/2$ para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, en virtud del criterio de comparación, podemos concluir que la serie armónica es divergente al estar controlada inferiormete por una serie constante. El hecho de que la serie armónica sea divergente, implica que **en este caso nuestro corredor nunca llegaría a la línea de meta**.

El siguiente criterio, conocido como *Criterio del resto*, establece una condición necesaria que debe cumplir toda aquella serie que sea convergente.

Proposición 8.2 (Criterio del resto)

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es convergente, entonces debe ocurrir que* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demostración Denotemos por (S_n) la sucesión de las sumas parciales asociada a la sucesión (x_n), es decir, $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Observamos que si la serie es convergente, entonces existe el límite $L = \lim_{n\to\infty} S_n$ y que además L es una cantidad finita. Teniendo en cuenta que $x_n = S_n - S_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L - L = 0.$$

■

Es importante señalar que la condición $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ no es suficiente para la convergencia de una serie, tal y como ocurre con la serie armónica.

La verdadera utilidad del criterio anterior es que proporciona una condición suficiente para la divergencia de una serie, y es por eso que a veces recibe el nombre de **criterio de divergencia**.

Proposición 8.3 (Criterio de la divergencia)

Si $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es divergente.*

Ejemplo 8.12 La serie infinita dada por

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{102} + \frac{3}{103} + \frac{4}{104} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+100},$$

es divergente. En efecto, dado que $\lim_{n\to\infty} n/(n+100) = 1$, en virtud del criterio de la divergencia se tiene que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+100}$ diverge.

Nota: *El recíproco de la Proposición 8.2 no es cierto, en genral. Por ejemplo, si consideramos la serie armónica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *vemos que el límite* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$*, pero la serie armónica es divergente. Por lo tanto, el hecho de que una serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *verifique la condición* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *no es suficiente para asegurar que la serie sea convergente.*

Ejercicios Propuestos

1. Estudiar la convergencia de la serie
$$\frac{1}{\log(1)}+\frac{1}{\log(2)}+\frac{1}{\log(3)}+\frac{1}{\log(4)}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(n)}$$
donde $\log(n)$ hace referencia al logaritmo neperiano.
Pista: Probar por inducción que $\log(n)\leq n$, para todo $n\geq 1$.

2. Estudiar la convergencia de la serie
$$2^{-\log(1)}+2^{-\log(2)}+2^{-\log(3)}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-\log(n)}$$
donde $\log(n)$ hace referencia al logaritmo neperiano.

3. Probar que la serie los formada por inversos de los cuadrados de los enteros positivos
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
es convergente.

4. Calcular la suma de la serie
$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{9}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}.$$

5. Sea $|r|<1$. Probar que la siguiente serie aritmético-geométrica
$$\sum_{n=1}^{\infty}(an+b)\,r^n,\qquad (a,b\geq 0)$$
es convergente y además su valor es $S=ar/(1-r)^2+b/(1-r)$.

6. Supongamos que para la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ existe una función $F:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que para cada $n\geq 1$ se tiene que $x_n=F(n+2)-F(n)$. Demuestra que la serie es convergente y que el valor de su suma es $L-(\,F(1)+F(2)\,)$, siendo $L=\lim_{n\to\infty}F(n)$.

7. Calcular la suma de la serie
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}.$$
Pista: Utiliza el ejercicio anterior, descomponiendo el término general de la forma
$$x_n=\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right).$$

8. Sea $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ una serie convergente de términos positivos. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}/n$ es convergente.

Bibliografía Adicional

1. Apostol, T. M. (1991). Sucesiones, Series e Integrales Impropias. *Calculus, Volume 1*. Editorial John Wiley & Sons, 457-515.