CAPÍTULO 10

10

PROBLEMAS DE COLORACIÓN

Eva Primo Tárraga
Universidad Rey Juan Carlos

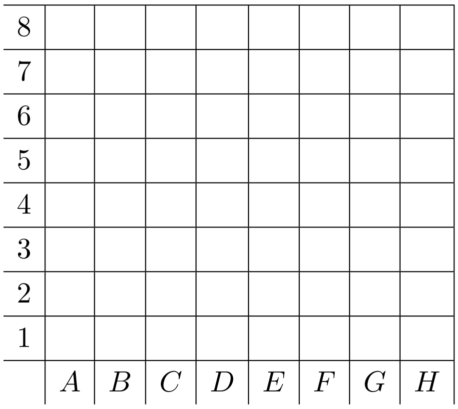
Palabras clave

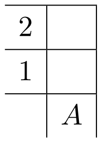
- *Coloración*
- *Conjunto*
- *Subconjuntos*
- *Respuesta negativa*
- *Tabla*
- *Tablero*

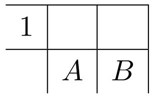
Los problemas de este capítulo están relacionados con la partición de un conjunto en subconjuntos que nos ayuden a argumentar nuestra solución al problema. Esta partición la realizaremos coloreando cada elemento de nuestro conjunto en función del subconjunto al que pertenezcan.

10.1 Introducción

Vamos a introducir este método a través de un problema en el que es útil. Imaginaos que tenemos un tablero de 8x8 cuadrados, como este, es como un tablero de ajedrez, pero sin colorear.

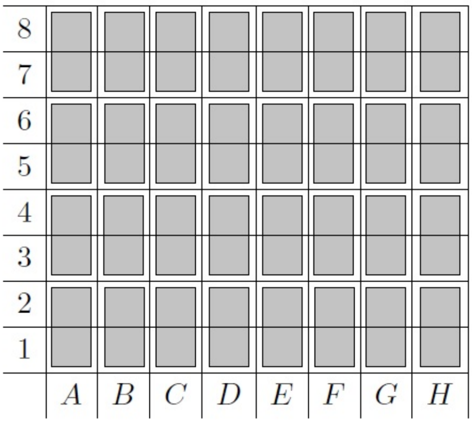






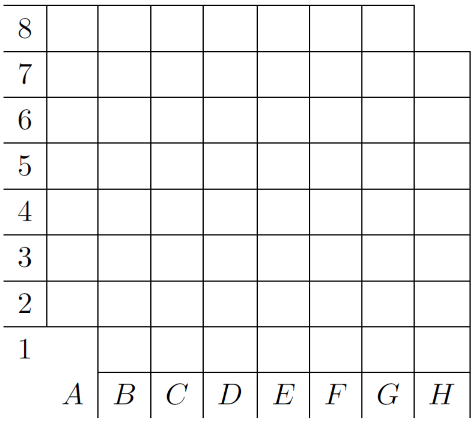
Nuestro objetivo es cubrirlo con piezas de 2x1 o 1x2 cuadrados, como las piezas de un dominó, sin que estas piezas se superpongan ni salgan del tablero.

Tenemos un número par de cuadros en el tablero, así que a priori parece sensato querer cubrirlo con piezas compuestas por dos cuadrados. Además, cada lado del tablero tiene un número par de cuadrados lo que facilita el razonamiento. Podríamos dar como solución posicionar cuatro piezas de dominó alineadas, formando una tira de 8x1, en cada una de las 8 columnas de nuestro tablero inicial, y alcanzaríamos nuestro objetivo, cubrir un tablero 8x8 con piezas 2x1.



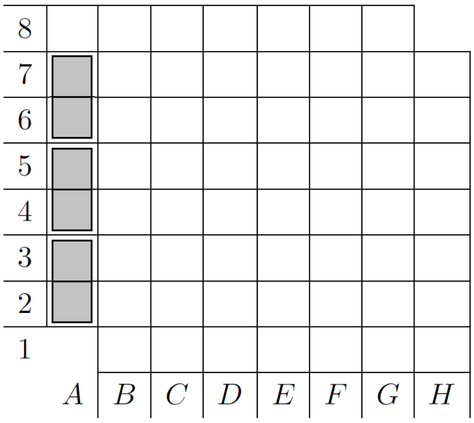
De este problema existen múltiples soluciones, es decir, muchas maneras de posicionar las 32 piezas 2x1 o 1x2 sobre el tablero. De hecho, el físico teórico Michael E. Fisher demostró en 1961 que existen $2^4 \times 901^2 = 12988816$, lo que son casi 13 millones de maneras diferentes de posicionar dichas piezas sobre el tablero.

Imaginemos ahora una situación ligeramente diferente, en la que tenemos dicho tablero 8x8 menos dos cuadrados, concretamente los cuadrados de dos esquinas opuestas, por ejemplo, el primero y el último, es decir el A1 y el H8.

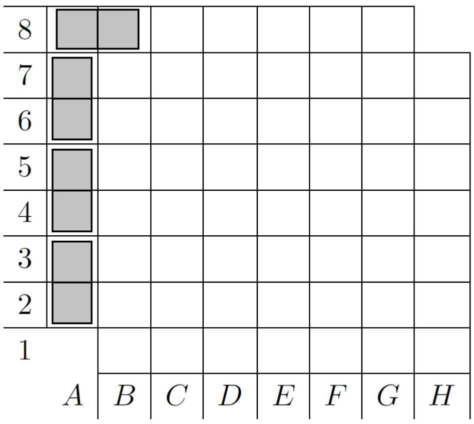


Seguimos teniendo un número par de cuadrados, así que sigue sin ser descabellado plantearnos cubrirlo con piezas de 2x1 o 1x2 cuadrados.

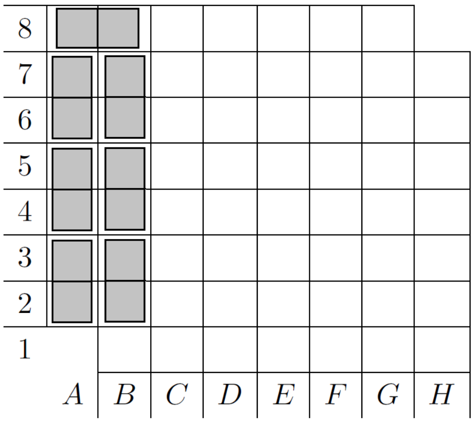
Intentémoslo, empezamos cubriendo la primera columna, la A, cubriríamos los cuadrados A2 y A3, luego A4 y A5, después A6 y A7,



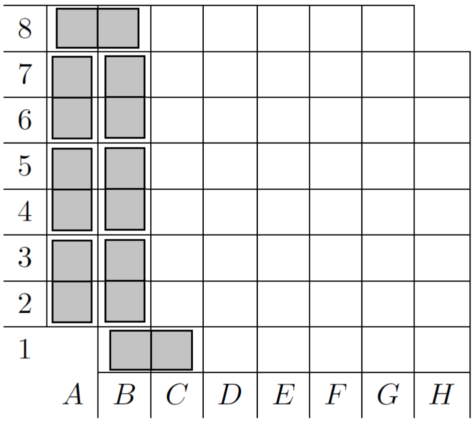
y para cubrir el último cuadrado necesitaríamos posicionar la pieza sobre A8 y B8.



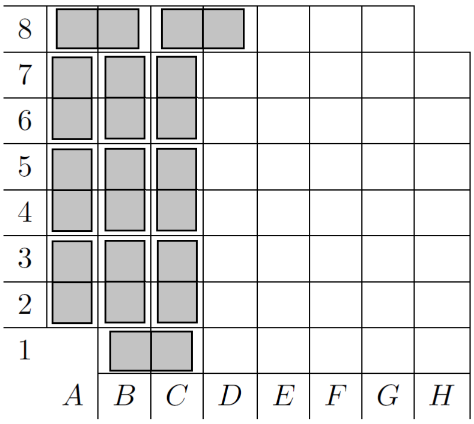
Esto nos vuelve a dejar una columna con 7 cuadrados por cubrir; utilizando 3 piezas 2x1, cubriríamos los 6 cuadros centrales, lo que no dejaría sin cubrir el cuadrado B1.



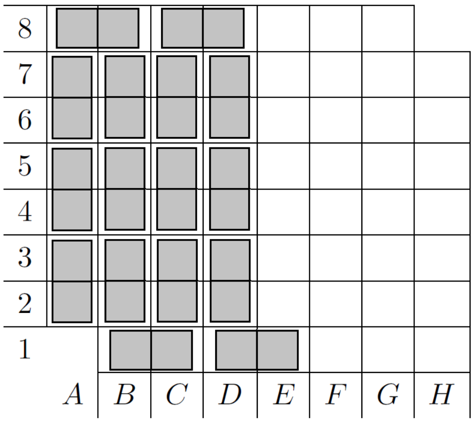
Para cubrir dicho cuadrado necesitamos colocar la pieza cubriendo B1 y C1,



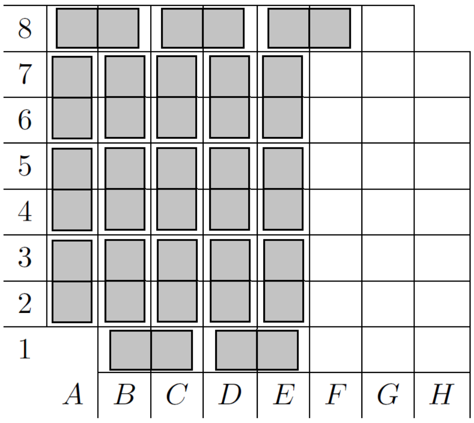
lo que nos deja en la columna C una situación análoga a la de la columna A, es decir, para cubrir la pieza C8, necesitaríamos posicionar la pieza cubriendo C8 y D8.



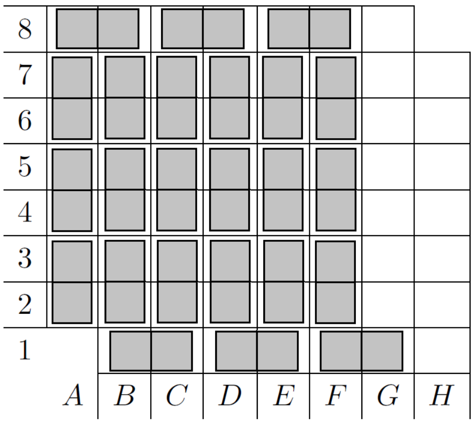
Esto nos deja en la columna D una situación análoga a la de la columna B, es decir, para cubrir la pieza D1, necesitaríamos posicionar la pieza cubriendo D1 y E1.



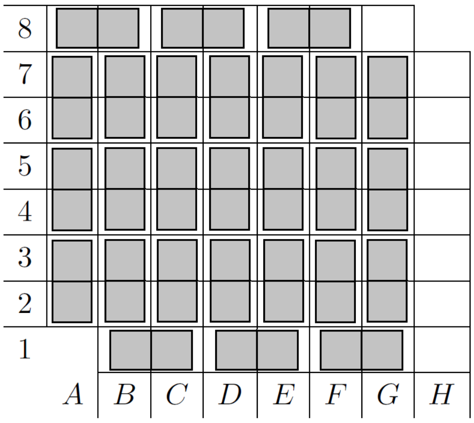
Lo que nos deja en la columna E una situación análoga a la de la columna A, es decir, para cubrir la pieza E8, necesitaríamos posicionar la pieza cubriendo E8 y F8.



Esto nos deja en la columna F una situación análoga a la de la columna B, es decir, para cubrir la pieza F1, necesitaríamos posicionar la pieza cubriendo F1 y G1.

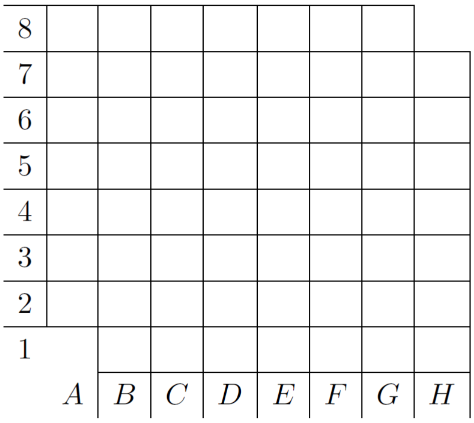


Lo que nos deja en la columna G una situación análoga a la de la columna A, es decir, para cubrir la pieza G8, necesitaríamos posicionar la pieza cubriendo G8 y H8, lo que no es posible, dado que es uno de los cuadrados que hemos quitado inicialmente del tablero.

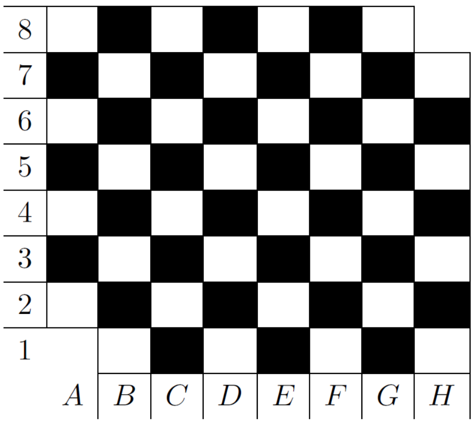


Este razonamiento sirve para ver que no podemos cubrir el tablero de esta manera, pero no demuestra que no haya otra manera de cubrirlo.

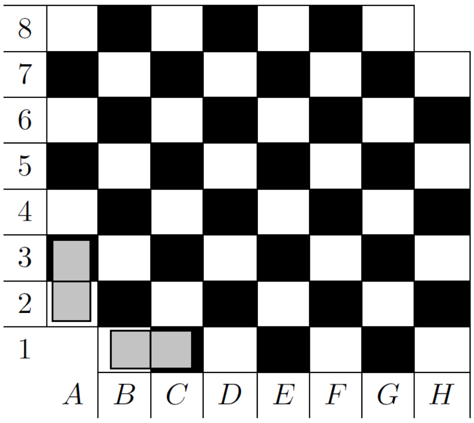
Volvamos a la tabla que queremos cubrir.



Vamos a colorearla de forma que nos ayude a razonar. En este caso, como un tablero de ajedrez, de manera que un cuadrado blanco no comparta lado con otro cuadrado blanco.



De esta manera si posicionamos una pieza 2x1 o 1x2 cubriendo este tablero, siempre cubrirá un cuadro blanco y otro negro.



Por lo tanto, cualquier superficie cubierta con piezas de este tipo tendrá la misma cantidad de cuadrados blancos que negros. Pero si contamos, tenemos 30 cuadros blancos, pero 32 cuadros negros, lo que muestra que es imposible cubrir este tablero modificado con piezas 2x1 o 1x2.

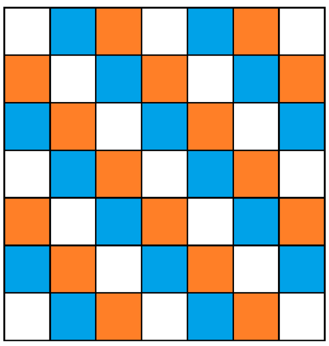
Para este problema en concreto ha sido suficiente con dos colores, pero es común necesitar más.

10.2 Aplicaciones del método a la Tabla 7x7

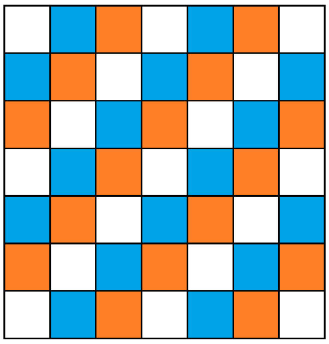
Para este nuevo problema tenemos una tabla 7x7, es decir, 49 cuadrados. Y queremos cubrirlo con 16 piezas 3x1, o 1x3, según las coloquemos, y una pieza 1x1. La pregunta que se nos plantea es: ¿dónde deberíamos situar dicha pieza 1x1?

Pensad que en el problema anterior trabajábamos con piezas 2x1, o 1x2, y nos ayudó colorear nuestra tabla con dos colores. Ahora tenemos piezas 3x1, es razonable pensar que necesitaremos más colores.

Principalmente, las piezas que queremos colocar son piezas 3x1, por lo que nos interesa utilizar 3 colores en nuestra coloración, y situarlos de manera que cada pieza 3x1, o 1x3, tape un cuadrado de cada color.



En particular, esta coloración, en la que hemos pintado cada diagonal de un color, siguiendo el mismo patrón, blanco-azul-naranja, cumple que efectivamente cada pieza 3x1, o 1x3, cubre un cuadrado de cada color. Ahora contemos cuantos cuadros tenemos de cada color. Tenemos 16 cuadros azules, 16 cuadros naranjas y 17 cuadros blancos, por lo tanto, podemos afirmar que la pieza 1x1 debe cubrir un cuadro blanco.
¿Pero podemos afirmar que vale cualquier cuadro blanco? De hecho, no, porque podríamos haber pintado las diagonales opuestas,



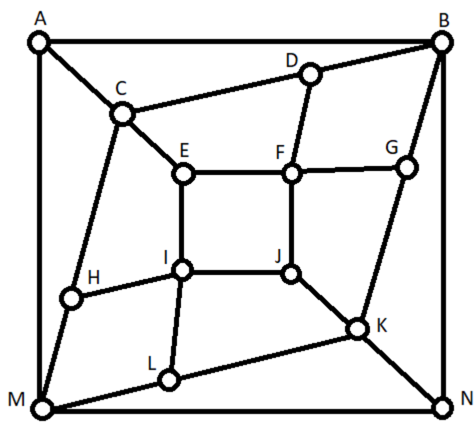
y haber llegado a la misma cantidad de cuadros azules, naranjas y blancos, por lo que también tendríamos que cubrir un cuadro blanco en esta nueva coloración.

Así que la conclusión es que debemos cubrir un cuadro que sea blanco en ambas coloraciones, es decir, el central, una de las 4 esquinas o uno de los cuadros centrales de cada lado.

Con los dos problemas vistos hasta ahora podríamos deducir que cuando queremos colocar piezas sobre tableros es interesante colorear el tablero. ¿Y de qué manera? Pues intentando que casi todas nuestras piezas cubran la misma cantidad de cuadros de cada color. Y de esta manera poder deducir que porcentaje de tabla podríamos cubrir y ver que faltaría por cubrir. Bien, argumentando que no podemos cubrirlo todo, en el caso de no tener más piezas, como en el primer problema u organizando las piezas que nos quedan para cubrir la parte restante, como en este problema.

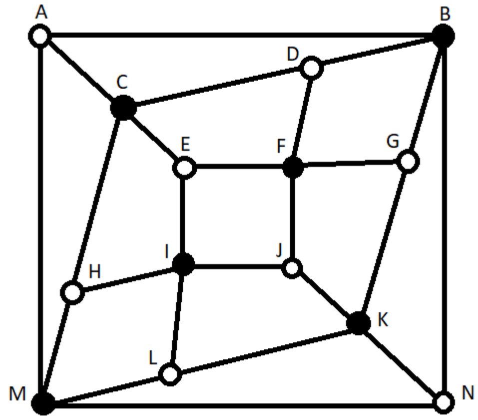
10.3 Aplicaciones del método a un grafo de ciudades

Tenemos el siguiente mapa de carreteras conectando 14 ciudades, entendamos que los puntos son las ciudades, y las líneas que unen los puntos, carreteras.



La cuestión a la que nos enfrentamos es ¿Podemos diseñar un camino que pase por todas las ciudades, pero solo una vez por cada una? Es decir, si empezamos por la ciudad A pasaríamos a una ciudad contigua, cualquiera entre las ciudades B, C y M. Si elegimos movernos a la ciudad B, después tendríamos que pasar a otra contigua a ella, distinta de la inicial, es decir, nuestras opciones son las ciudades D, G o N. Y así hasta pasar por todas, sin repetir ninguna.

Vamos a razonar con el mapa coloreado de esta manera.



Si os fijáis este coloreado tiene la cualidad de que una ciudad “blanca” sólo toca ciudades “negras”, e igualmente una ciudad “negra” sólo toca ciudades “blancas”. Así un camino que pase por cada ciudad alternaria ciudades blancas con ciudades negras, por ejemplo, empezando por la ciudad A, que es blanca pasaríamos necesariamente a una negra, y después necesariamente a otra blanca, y así sucesivamente.

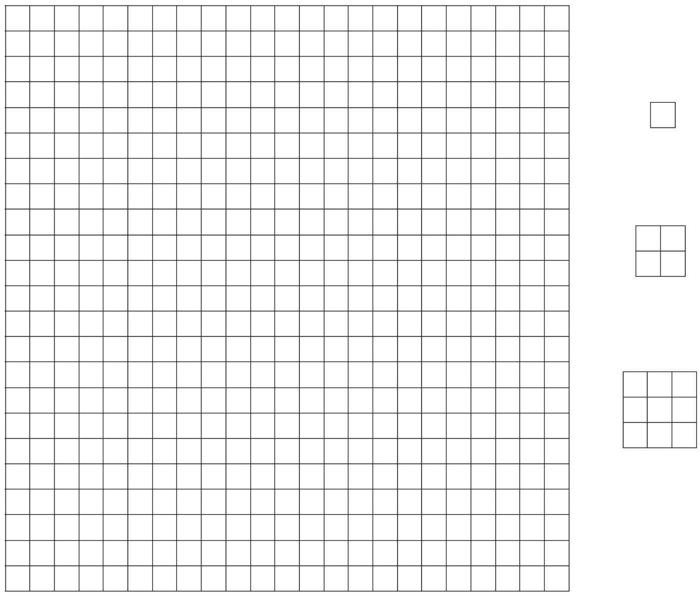
Entonces, lo que debería cumplir esta coloración es tener la misma cantidad de ciudades blancas que negras, o a lo sumo una ciudad más de alguno de los colores, lo que obligaría a que el camino empezase y terminase en ese color. Pero en este mapa tenemos 8 ciudades blancas y 6 ciudades negras, con lo que es imposible diseñar un camino con las condiciones del problema.

Como hemos podido ver tanto en el primer problema como en este, las demostraciones coloreando son especialmente útiles para dar respuestas negativas a los problemas planteados.

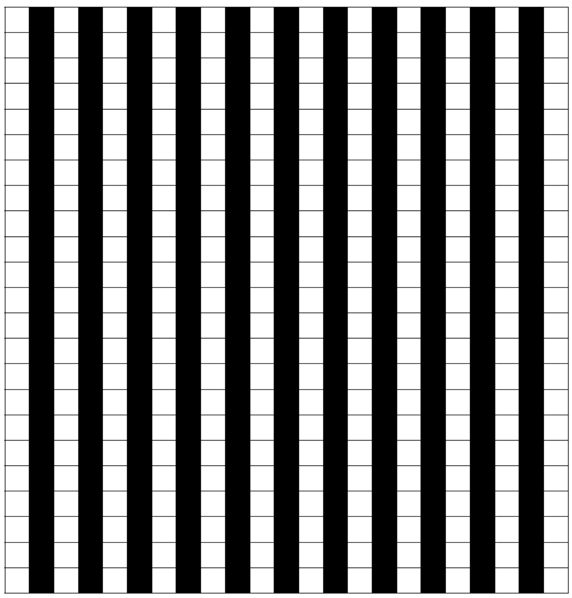
10.4 Aplicaciones del método a la Tabla 23x23

En el ejemplo de este capítulo, vamos a trabajar en un problema que apareció en la olimpiada All-Union Mathematical Olympiad, AUO, de 1989, es decir, la Olimpiada Matemática de la Unión Sovietica.

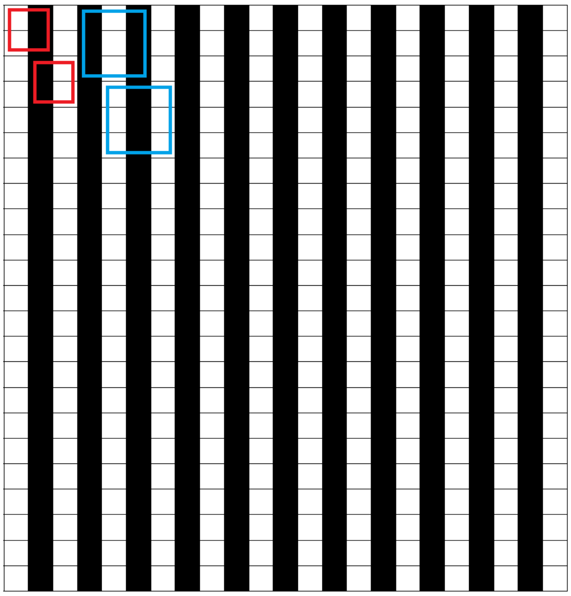
El problema nos propone cubrir una tabla 23x23 con piezas 1x1, 2x2 y 3x3. Y nos pregunta cuál es el mínimo número de piezas 1x1 necesarias para cubrir la tabla.



En primer lugar, vamos a intentar cubrir la tabla sin necesitar ninguna pieza 1x1.



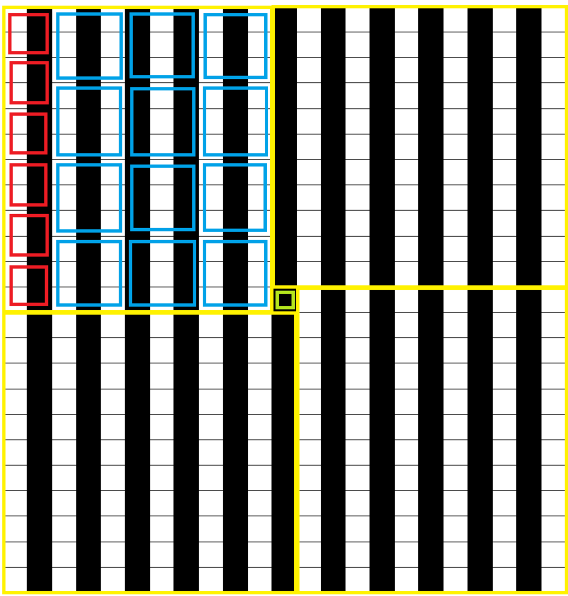
Si pintamos la tabla de esta manera, cada fila de un color, alternando blanco y negro, claramente vemos que una pieza 2x2, cubre siempre 2 cuadros blancos y dos negros, y una pieza 3x3, cubre siempre 6 cuadros de un color y tres cuadros del otro.



Por lo tanto, la diferencia de cuadros de un color con respecto al otro será un múltiplo de 3 para cualquier superficie cubierta con piezas de estos tamaños. Pero en esta tabla tenemos 23 cuadros blancos más que negros, que no es múltiplo de 3, por lo que podemos afirmar que no podemos cubrir la tabla entera con piezas de estos tamaños.

Intentemos argumentar con una pieza 1x1. Fijémonos que con esta misma coloración si cubriésemos un cuadro negro con la pieza 1x1, en la tabla restante tendríamos 24 cuadros blancos más que negros, lo que sí es un múltiplo de 3.

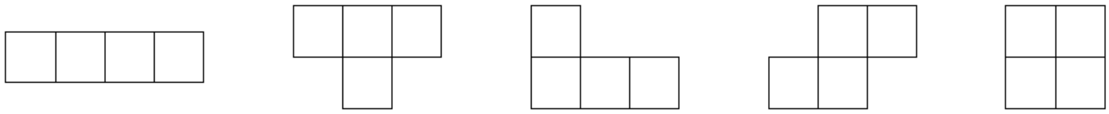
De hecho, si cubrimos el cuadro central, que efectivamente es negro con esta pieza, la tabla restante la podemos dividir en 4 tablas 12x11, o 11x12, de hecho, dos de cada. Cada una de estas subtablas es fácilmente cubrible con 12 piezas 3x3 y 6 piezas 2x2.



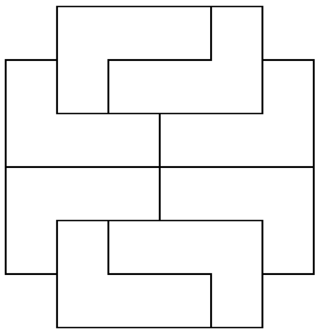
Por lo tanto, podemos concluir que una pieza 1x1 es la mínima cantidad de estas piezas que necesitaríamos.

Ejercicios Propuestos

1. ¿Es posible formar un rectángulo con los siguientes cinco tetrominós?



2. Consideramos un tablero de ajedrez de $n \times n$ con las cuatro esquinas eliminadas. ¿Para qué valores de n se puede cubrir el tablero con L-tetrominós como en la siguiente figura?



Bibliografía Adicional

1. Engel, A. (1998). Coloring Proofs. *Problem-Solving Strategies*. Editorial Springer, 25-37.