UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias

DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.17062

GÓNDOLA
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS

Resultado de Investigación

EMERGENCIA DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS EN VIÈTE Y DESCARTES: elementos para repensar la actividad analítica-algebraica

EMERGENCE OF THE PARAMETRIC EQUATION IN VIÈTE AND DESCARTES: elements to rethink the algebraic-analytical activity

SURGIMENTO DA EQUAÇÃO PARAMÉTRICA EM VIÈTE E DESCARTES: elementos para repensar a atividade analítica-algébrica

Luis Alberto López-Acosta *, **Gisela Montiel-Espinosa** **

López-Acosta, L, & Montiel-Espinosa, G. (2022). Emergencia de las ecuaciones paramétricas en Viète y Descartes. Elementos para repensar la actividad analítica-algebraica. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, *17*(3), pp. 539-559. DOI:10.14483/23464712.17062

Resumen

La investigación en educación del álgebra ha señalado la importancia de los parámetros respecto a la actividad algebraica, sin embargo, establece también que hacen falta más estudios al respecto. Por ello, esta investigación tiene como finalidad problematizar el surgimiento de las ecuaciones paramétricas en Viète y Descartes, respecto al rol del tipo de actividad en la que ambos se involucraron en su renovación del análisis geométrico. Realizamos un estudio histórico-epistemológico, con sustento socio epistemológico, que como resultado develó la relevancia de cierto tipo de problemas geométricos, caracterizados por involucrar una gran cantidad de relaciones que no son perceptibles a partir del diagrama geométrico presente en el texto, algo no visto en la tradición algebraica previa, y que requería de un sistema prolijo para diferenciar las cantidades conocidas y desconocidas. Este hallazgo permite fundamentar una ruta didáctica basada en la práctica de algebrización de la geometría que no ha sido explícitamente explorada en las investigaciones relativas a esta noción. Esta práctica se sustenta en una justificación epistémica centrada en la conceptualización de que cualquier tipo de relación de equivalencia deviene en una ecuación, principalmente las proporciones, y refleja la intención de construir un álgebra para la geometría.

Palabras-Clave: Álgebra. Historia. Epistemología.

* Maestro en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México. Email: lopezluis0912@gmail.com – ORCID 0000-0002-2903-5413

** Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Email: gmontiele@cinvestav.mx – ORCID 0000-0003-1670-9172

Recibido: Octubre de 2020; Aceptado Julio 2022.

Abstract

Research in algebra education has shown the importance of parameters concerning algebraic activity. However, it also establishes a necessity for more studies in this regard. Therefore, this research aims to problematize the emergence of the parametric equations in Viète and Descartes. Concerning the role of the type of activity in which both were involved in their renewal of geometric analysis. We carry out a historical-epistemological study based on socio-epistemology theory. Results revealed the relevance of certain types of geometric problems, characterized by involving a large number of relationships that are not perceptible from the geometrical diagram present in the text. Something not seen in the previous algebraic tradition but requiring a neat system to differentiate known and unknown quantities. This finding allows us to glimpse a didactic route based on the practice of algebraization of geometry that has not been explicitly explored in research on this notion. This practice has a support in an epistemic justification centered on the conceptualization that any type of equivalence relationship becomes an equation, especially proportions, and reflects the intention of building an algebra for geometry.

Keywords: Algebra. History. Epistemology.

Resumo

A pesquisa em educação algébrica apontou a importância dos parâmetros na atividade algébrica. No entanto, ela também afirma que mais estudos são necessários nesta área. Portanto, esta pesquisa visa problematizar o surgimento de equações paramétricas em Viète e Descartes com relação ao papel do tipo de atividade em que ambos estiveram envolvidos na renovação da análise geométrica. Realizamos um estudo histórico-epistemológico, com apoio sócio epistemológico, que como resultado revelou a relevância de certos tipos de problemas geométricos, caracterizados por envolver muitas relações que não são perceptíveis a partir do diagrama geométrico presente no texto. Algo não visto na tradição algébrica anterior. Esta descoberta nos permite propor uma rota didática baseada na prática da algebrização da geometria que não foi explicitamente explorada nas investigações relacionadas a esta noção. Esta prática é apoiada por uma justificação epistêmica centrada na conceição de que qualquer tipo de relação de equivalência se torna uma equação, principalmente proporções, e reflete a intenção de construir uma álgebra para a geometria.

Palavras-Chave: Álgebra. História. Epistemologia.

1. Introducción

A pesar del gran avance en el campo de investigación sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra, investigadores como BOLEA (2003), GASCÓN, BOSCH, Y RUIZ-MUNZÓN (2017), GASCÓN (1994-1995, 1999), y RUIZ-MUNZÓN (2010) han señalado que la gran mayoría de las investigaciones asumen acríticamente un modelo del álgebra como *aritmética generalizada*. Este modelo soslaya el uso de parámetros e incógnitas en la actividad algebraica escolar, aspecto en el que reside el verdadero potencial de la actividad algebraica, de acuerdo con estos autores.

No obstante, otros trabajos señalan que la investigación didáctica en álgebra no ha atendido de manera significativa al parámetro, notándose incluso una disminución de estudios en las últimas décadas (p. ej. FURINGHETTI, Y PAOLA, 1994; WARREN, TRIGUEROS, Y URSINI, 2016). Principalmente, los estudios han abordado las dificultades de los estudiantes en su interpretación, debido a su carácter contradictorio y más general, comparándolo con la variable y la incógnita (ver BARDINI, RADFORD Y SABENA, 2005; BLOEDY-VINNER, 2001; DRIJVERS, 2003; FURINGUETTI Y PAOLA, 1994).

Asimismo, diversas investigaciones han señalado que históricamente el parámetro algebraico surgió en el trabajo de Viète (p. ej. DRIJVERS, 2003; KIERAN, 1992; SFARD, 1995) y se amplió en el de Descartes (CHARBONNEAU, 1996), dejando ver en ambos la relevancia de la renovación del *método de análisis geométrico*, lo cual derivó en la creación de un nuevo paradigma algebraico: el *análisis algebraico*. Si bien estas y otras investigaciones (ver BOLEA, 2003; BOSCH, GASCÓN, Y RUIZ-MUNZÓN, 2017; GASCÓN, 1994-1995; RUIZ-MUNZÓN, 2010) han recuperado diversos aportes de ambos matemáticos al álgebra, como los indicadores de un cambio de paradigma más general, así como reflexiones didácticas del método de análisis y el involucramiento de parámetros e incógnitas para replantear la actividad algebraica escolar, poco se ha trabajado sobre las características de la actividad y problemas matemáticos que ambos resolvieron en su época para entender su papel en el surgimiento de las ecuaciones paramétricas y, en particular, del parámetro. Es en esta dirección que planteamos una investigación que comenzamos a reportar en este escrito.

Nuestro objetivo es mostrar el rol de los problemas matemáticos en los que se involucraron Viète y Descartes en la emergencia de las ecuaciones paramétricas, lo que implicaría obtener resultados que sirvan como aportaciones epistemológicas a la enseñanza del álgebra en el nivel medio superior.

Por lo tanto, en este trabajo problematizamos la *génesis histórica de la ecuación paramétrica*, enmarcándola en la actividad matemática donde surgió (análisis algebraico) y su contexto de significación. Para ello llevamos a cabo un estudio histórico-epistemológico (EHE de aquí en adelante), desde la perspectiva de la teoría socioepistemológica (TS de aquí en adelante), respecto a la pregunta de investigación: ¿cuál fue el rol de los problemas, en los que Viète y Descartes se involucraron, en la emergencia de la ecuación paramétrica al renovar el análisis geométrico griego?

2. Fundamentación Teórica y Metodológica

Se llevó a cabo un estudio cualitativo documental, de carácter histórico, orientado a contribuir en la discusión epistemológica relativa a la construcción de conocimiento analítico algebraico desde una perspectiva teórica que asume a la matemática como una actividad humana, eminentemente social.

La TS es un enfoque teórico situado dentro del paradigma sociocultural al conocimiento, en el cual se privilegia el carácter de la producción del saber, intentando “centrarse en la actuación y en los efectos reguladores de la práctica” (LERMAN, 2000, p. 38). Bajo este enfoque y en consecuencia al paradigma sociocultural, se asume que el saber matemático se construye bajo necesidades humanas, que le dan sentido, significado y un carácter situado (CANTORAL, 2013). Una distinción central, respecto a otros enfoques, es que entenderá al saber como conocimiento puesto en uso (CANTORAL, 2013; CANTORAL, MONTIEL, Y REYES-GASPERINI, 2015). Esta consideración es fundamental en su planteamiento sobre la construcción social de conocimiento matemático basado en prácticas. Por esta razón se privilegia el análisis de la actividad matemática dentro de tres formas legítimas de saberes: *populares* (prácticas cotidianas), *técnicos* (prácticas especializadas) y *cultos* (prácticas formales disciplinares).

En la TS la construcción del conocimiento matemático es *racionalmente contextualizada*, es decir, es una función del contexto, toda vez que

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias
e-ISSN: 2346-4712 Vol. 17, No. 3 (septiembre - diciembre, 2022), pp. 539-559

son los contextos específicos en los que actúa el individuo los que delimitan y sitúan su racionalidad, y por tanto son inherentes a su epistemología; permeando así su relación con el conocimiento. Este actuar, a su vez, es regulado por prácticas sociales, entendidas como un "conjunto organizado de actividades y acciones objetivas e intencionales para atender a una situación dada" (CANTORAL, 2013, p. 327). Esta relación constitutiva es propia de los fenómenos sociales, tal como lo explica LERMAN (2000):

> […] cuando una persona se integra a la práctica, ella o él ya ha cambiado. La persona tiene una orientación hacia la práctica, o tiene objetivos que la han llevado hacia la práctica, incluso si deja la práctica al poco tiempo. Se puede expresar ese cambio observando que la práctica se ha convertido en la persona. Para incorporar esos desarrollos, sugiero que la unidad de análisis se extienda a persona-en la práctica-en la persona (p. 38, traducción propia).

Es decir, hay una relación simbiótica entre el individuo (y su participación) y la (constitución de una) práctica; por ello, los estudios enmarcados por la TS se interesan en la *progresión pragmática* de la actividad matemática, que ha denominado *anidación de prácticas*, tomando en consideración el contexto que la enmarca y los emergentes –eminentemente sociales– que de ella emanan.

Para dar respuesta a la pregunta de investigación del estudio que aquí reportamos, se hizo uso de la anidación de prácticas constituida por *acciones*, *actividades* y *prácticas socialmente compartidas*. Las primeras entendidas como intervenciones para adaptarse y responder a estímulos del medio, es decir, todos aquellos recursos físicos o mentales que son empleados al resolver un problema o situación; y las segundas como organización consciente de acciones articuladas intencionalmente y mediadas por artefactos culturales (como los objetos matemáticos, instrumentos físicos o mentales diversos, el lenguaje, etc.). Las prácticas socialmente compartidas son emergentes sociales relativos al tratamiento de situaciones específicas, resultantes de la articulación consciente y deliberada de las acciones y actividades con un fin determinado (CANTORAL, 2013).

2.1 Estudios Histórico-Epistemológicos y Contexto de Significación

Existe una gran tradición respecto al uso de la dimensión histórica en la investigación y la práctica educativa de las matemáticas y de las ciencias en general (ver CASTIBLANCO Y NARDI, 2013; BARBIN, GUILLEMETTE Y TZANAKIS, 2020; CLARK, KJELDSEN, SCHORCHT Y TZANAKIS, 2018; MARQUES PINHEIRO, LUCCAS, Y BUENO LUCAS, 2019; PEREA, Y BUTELER, 2016; TZANAKIS Y ARCAVI, 2000). Este uso permite, entre otras cosas, como mencionan TZANAKIS Y ARCAVI (2000), contribuir al aprendizaje de las matemáticas, al visibilizar el progreso de las ideas, técnicas, procesos, problemas y preguntas que usualmente devienen opacos en la enseñanza y que pueden ser contenidos a enseñar; lo cual permite comprender también la naturaleza de las matemáticas y su actividad, así como robustecer los marcos didácticos de profesores y profesoras. El interés por recurrir a un EHE, desde la TS reside en esta primera consideración, que BARBIN, GUILLEMETTE, Y TZANAKIS (2020) recientemente han catalogado como *contribuciones epistemológicas* a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Para la TS, los EHE tienen el objetivo de construir *hipótesis epistemológicas*, recuperando la génesis de los saberes en términos de las prácticas (la matemática como actividad humana) y las circunstancias socioculturales que condicionan dichas prácticas (contexto de significación). Estas hipótesis, como en otras posturas, son confrontadas posteriormente con modelos epistemológicos escolares, para robustecerse y construir vías alternativas de tratamiento escolar orientadas al desarrollo del pensamiento matemático. Su construcción requiere de un análisis del saber matemático objeto de estudio en dos niveles: uno *contextual* para evidenciar la racionalidad contextualizada asociada al saber, y otro sobre la *actividad matemática* específica que

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias
e-ISSN: 2346-4712 Vol. 17, No. 3 (septiembre - diciembre, 2022), pp. 539-559

le da cabida, para identificar su naturaleza pragmática.

En el primer nivel se determina el *contexto de significación* relativo al saber, el cual constituye una agrupación de tres dimensiones contextuales que van desde las esferas sociales más complejas, que trascienden a la actividad matemática —como la circunstancias culturales y sociales de una época o región—, hacia las actividades matemáticas específicas —estén estas enmarcadas en escenarios populares, cultos o técnicos— que determinan los saberes objeto de estudio. LÓPEZ-ACOSTA (2019) y TORRES-CORRALES (2020) distinguen tres dimensiones, que en este trabajo denominamos: *contexto cultural*, *contexto situacional* y *contexto de la situación específica*:

- El contexto cultural comprende las características sociales que determinan grupos culturales específicos "que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos" (CRESPO, 2007, p. 37). Y también "aquellas creencias y concepciones que son la base de su racionalidad" (ESPINOZA, 2009, p. 28).
- El contexto situacional corresponde al conjunto de factores o circunstancias espacio temporales que delimitan la realidad cercana de los sujetos relacionados con el saber objeto de estudio.
- El contexto de la situación específica refiere a la actividad matemática específica (popular, técnica o culta) que determina problemas y/o situaciones dentro de las cuales el saber emerge.

La aproximación al contexto de significación desde este enfoque es a partir de reconocer que el saber matemático, en tanto producción humana, es una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una expresión intelectual más global (ESPINOZA, 2009). Esta postura conlleva responder planteamientos como: ¿cuál es el lugar que ocupa en la historia?, ¿qué elementos de la vida, época y quehacer del individuo, entre otras cosas, influyeron en su desarrollo?, ¿qué características contextuales (sociales, culturales, políticas, institucionales, etc.) mediaron y/o incidieron en su concepción?, ¿qué intereses científicos, académicos y/o personales tuvieron relevancia en su emergencia?, ¿qué se buscaba resolver, construir, estudiar, comunicar, etc., con su desarrollo?

El segundo nivel de análisis se efectúa sobre la actividad matemática determinada por el contexto de la situación específica en la cual el saber de interés emerge. La intención es la *reconstrucción pragmática de la actividad matemática*, en términos de las acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas. Las primeras y segundas son inferidas al responder respectivamente a los cuestionamientos analíticos: *¿qué y cómo lo hace?* y *¿para qué lo hace?* Las prácticas socialmente compartidas se infieren a partir de la articulación de las acciones y actividades que conforman esquemas determinados de actuación matemática ante tipos de situaciones específicas. Dependiendo del objeto de estudio en la investigación pueden incorporarse otros cuestionamientos más, como fue el caso de esta investigación.

3. Método

Para el análisis contextual, la recolección de fuentes estuvo orientada en responder los siguientes cuestionamientos: *¿qué características tenía la época del Renacimiento, en la que Viète y Descartes realizaron sus contribuciones, y cómo esta influyó en su pensamiento?, ¿cuáles fueron sus principales intereses científicos, académicos y personales?, ¿qué rol jugó la renovación del método de análisis geométrico en su actividad matemática?* Algunas de las principales fuentes sobre las que se sustentó el análisis contextual se muestran en la Tabla 1. Con base en estas se obtuvo una mirada amplia sobre el período particular del Renacimiento y el movimiento humanista francés, así como de las características particulares en la actividad algebraica de Viète y Descartes a diferencia de algebristas previos a ellos.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias

DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.17062

GÓNDOLA
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS
Resultado de Investigación

Tabla 1. Algunas fuentes consultadas para la determinación del contexto de significación.

Tipo de fuente	Fuentes
Primaria	ADAM Y TANERY (1908), DESCARTES (1637, 1947, 1996), PAPPUS (1982, 1986), VIÈTE (1615, 1646, 1983).
Secundaria	BOS (2001), CHARBONNEAU (1996), CIFOLETTI (2006), HEEFFER, (2008, 2009, 2014), KLEIN (1968), OAKS (2018), SASAKI (2003), SEFRIN-WEISS (2013), STEDALL (2008, 2011).
Terciaria	MERZBACH Y BOYER (2011), RAO (2011), VARVOGLIS (2014), PUIG, Y ROJANO (2004), SFARD (1995).

Nota: La división del tipo de fuente se hizo con base en Wardhaugh (2010). **Fuente.** Elaboración propia.

Con las respuestas a las preguntas orientadoras se recuperó la influencia del contexto cultural y situacional en el contexto de la situación específica de la ecuación paramétrica, así como características específicas del tipo de problemas involucrados. En relación con esto último, que nos permitió conjeturar cómo emergió la ecuación paramétrica, se eligieron las siguientes unidades de análisis para la interpretación de la actividad matemática en la siguiente fase:

Viète.

1. Traducción al inglés de WITMER (1983, pp. 83-84) de la Zetética I del Primer Libro de Zetética de *Zeteticorum libri quinque*. Contrastado con el original (VIÈTE, 1615, fol. 1).
2. Traducción al inglés de WITMER (1983, p. 205-207) del Capítulo XV del Primer tratado de *Æqvationvm Recognitione Et Emendatione Tractatus Duo*. Contrastado con el original (VIÈTE, 1615, pp. 39-40)
3. Traducción al inglés de WITMER (1983, p. 403-405) de la Proposición XVI de *Supplementum Geometriae*. Contrastado con el original (VIÈTE, 1646, pp. 248-249).

Se eligieron estos textos de Viète dado que corresponden a tres tipos de problemas provenientes de tratados diferentes en los que aplica su método analítico. La primera unidad corresponde a un ejemplo de álgebra aritmética, el segundo al estudio de la estructura de un tipo de ecuación y el tercero a un ejemplo geométrico. Con esto se buscó tener un panorama general sobre cómo Viète aplicaba su método.

Descartes.

1. Traducción al español de ROSSELL (1947, pp. 65-69, pp. 82-88), del Problema de Pappus abordado en dos partes en los libros I y II de *La Géométrie*. Contrastado con el original (DESCARTES, 1637, pp. 309-313, pp. 323-30).
2. Traducción al español de ROSSELL (1947, pp. 146-147), de la regla de los signos del Libro III de *La Géométrie*. Contrastado con el original (DESCARTES, 1637, p. 373).
3. Traducción al español de ROSSELL (1947, pp. 79-80), del Ejemplo que propone Descartes en el Libro II de *La Géométrie*. Contrastado con el original (DESCARTES, 1637, pp. 319-322).

Puesto que *La Géométrie* fue el único tratado matemático de Descartes, donde aborda esencialmente problemas geométricos, se eligieron dos problemas de este tipo y un ejemplo en el que trata propiedades algebraicas de las ecuaciones. Se eligió el Problema de Pappus por la relevancia que los historiadores le han atribuido respecto a la concreción de su proyecto analítico, tal y como mostraremos en la siguiente sección.

El análisis de la actividad matemática sobre estas unidades de análisis se dividió en dos fases (adaptadas de CANTORAL, MONTIEL, Y REYES-GASPERINI, 2015): una *descriptiva*, en la que el problema se contextualiza, detalla y se reconstruye su solución; y una *cualitativa*, fase en la que se realiza la *reconstrucción pragmática de la actividad matemática*. En particular, además de responder a los cuestionamientos analíticos *¿qué y cómo se hace?* y *¿para qué se hace?* se incorporó el cuestionamiento analítico *¿cuál es la justificación epistémica?* con la que se especifica, siguiendo a HEEFFER (2014), los esquemas de validez que la justifican. Esto es, el reconocimiento de aquellos conocimientos o nociones matemáticas sobre las cuales se sustenta el método.

4. **Resultados**

En el apartado 4.1 discutimos el contexto de significación de la ecuación paramétrica, centrándonos en la dimensión del contexto de la situación específica por limitaciones de espacio —la caracterización completa puede consultarse en LÓPEZ-ACOSTA (2019)—. En el apartado 4.2 presentamos dos ejemplos del análisis de la actividad matemática de Viète y Descartes relativos a problemas geométricos, que elegimos por motivos de extensión en este escrito. En conjunto con las otras unidades de análisis, como el problema de Pappus en Descartes, permitieron caracterizar las implicaciones y elementos fundamentales en la construcción del conocimiento analítico algebraico. Finalmente, en el apartado 4.3 realizamos una síntesis de los hallazgos.

4.1 Contexto de Significación de la Ecuación Paramétrica: La Dimensión de la Situación Específica.

A pesar de que no abordaremos las tres dimensiones del contexto de significación de la ecuación paramétrica en este escrito, en términos sintéticos, se identificó que el *contexto cultural* en el que los proyectos de Viète y Descartes fueron producidos estuvo permeado por una *racionalidad contextualizada centrada en el método y la renovación del conocimiento griego* para construir la nueva ciencia. Por esta razón, ambos matemáticos estuvieron influenciados y enfocados en construir un método más robusto (universal) para resolver problemas basándose en fuentes griegas. Por otro lado, el *contexto situacional* de los científicos de la época estaba orientado a la aplicación de las ciencias, lo cual los orilló a una búsqueda particular por *aplicar el álgebra y la geometría en otras ciencias* como la astronomía y la filosofía.

Estas características contextuales, condicionaron eventualmente a ambos matemáticos para proponer la *renovación del análisis geométrico con fundamento en el álgebra Diofantina* (contexto de la situación específica). Estos proyectos dieron pie a la creación del análisis algebraico, denominado *arte analítico* por Viète y *Mathesis Universalis* por Descartes; y que sentó un cambio de paradigma en la actividad algebraica.

Dentro de este proyecto matemático, para probar y dar fuerza a sus métodos, ambos se enfrentaron a la resolución de problemas geométricos con cierta 'complejidad', como los relacionados con la trisección del ángulo —uno de los tres problemas griegos clásicos— (Figura 1) y con lugares geométricos o *locus* —como el problema de Pappus, que ni Euclides, ni Apolonio habían podido resolver de manera completa, según Descartes— (Figura 2).

En esta línea, STEDALL (2008), argumenta que la introducción de los parámetros e incógnitas en Viète fue justo por las exigencias de estos problemas, más que los problemas aritméticos. STEDALL (2011), menciona:

Viète le dio al álgebra una sorprendente nueva prioridad como herramienta para investigar y analizar los problemas y teoremas de la geometría clásica. Incluso las hasta ahora intratables dificultades de duplicar el cubo o trisecar un ángulo eran […] susceptibles de tratamiento algebraico […]. Esta nueva visión del alcance y el poder del álgebra le obligó a examinar la naturaleza y la construcción de

ecuaciones mucho más cuidadosamente que cualquiera de sus predecesores (p. 28, traducción propia).

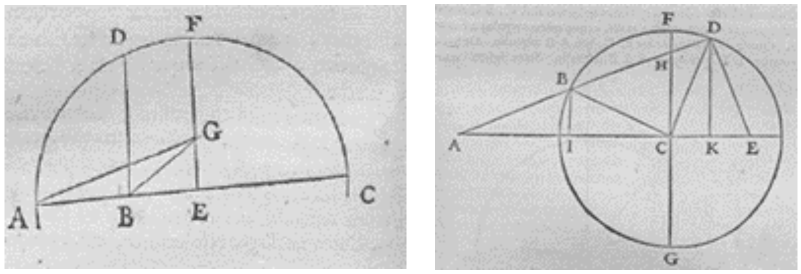


Figura 1. Problemas relativos a la trisección de ángulos en *Supplementum Geometriae* de Viète.

Fuente: VÌÈTE, 1646, p. 248 y p. 249 respectivamente.

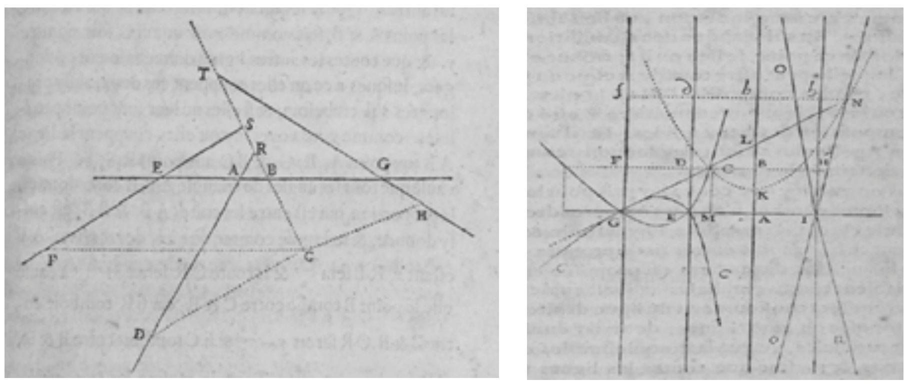


Figura 2. El problema de Pappus para cuatro y cinco líneas en *La Géométrie*.

Fuente: DESCARTES, 1637, p. 309 y p. 336 respectivamente.

En esta línea, STEDALL (2008), argumenta que la introducción de los parámetros e incógnitas en Viète fue justo por las exigencias de estos problemas, más que los problemas aritméticos. STEDALL (2011), menciona:

Viète le dio al álgebra una sorprendente nueva prioridad como herramienta para investigar y analizar los problemas y teoremas de la geometría clásica. Incluso las hasta ahora intratables dificultades de duplicar el cubo o trisecar un ángulo eran […] susceptibles de tratamiento algebraico […]. Esta nueva visión del alcance y el poder del álgebra le obligó a examinar la naturaleza y la construcción de ecuaciones mucho más cuidadosamente que cualquiera de sus predecesores (p. 28, traducción propia).

Esta interpretación sobre la relevancia de la geometría en el trabajo de Viète ha sido apoyada recientemente por OAKS (2018), quien señala que el conocimiento geométrico necesario para la astronomía fue un gran interés para Viète desde antes de 1570, provocando que se advocara al desarrollo y mejora de modelos geométricos para sistematizar cálculos astronómicos (OAKS, 2018). Oaks establece que la noción de número en Viète es la de una magnitud geométrica, implicando que Viète estaba construyendo un *álgebra para la geometría*. Como argumentaremos a continuación, esto pareció ser el mismo caso en Descartes.

Hasta antes de 1637, las características de la actividad algebraica de Descartes han llevado a los historiadores (ver BOS, 2001; SASAKI, 2003) a considerarla como un pensamiento inmaduro.

En una carta escrita en 1628 a su colega Beeckman, Descartes afirmó haber hecho el mayor progreso que la mente humana podía hacer y que no tenía más que aprender respecto a la aritmética y la geometría. En dicha carta Descartes muestra ejemplos de problemas que resuelve con sus 'nuevas técnicas' como la representación de la unidad, así como la resolución de un problema algebraico. Sin embargo, las técnicas algebraicas empleadas eran sumamente conocidas, recurriendo incluso a notación cósica clásica (ver Figura 3).

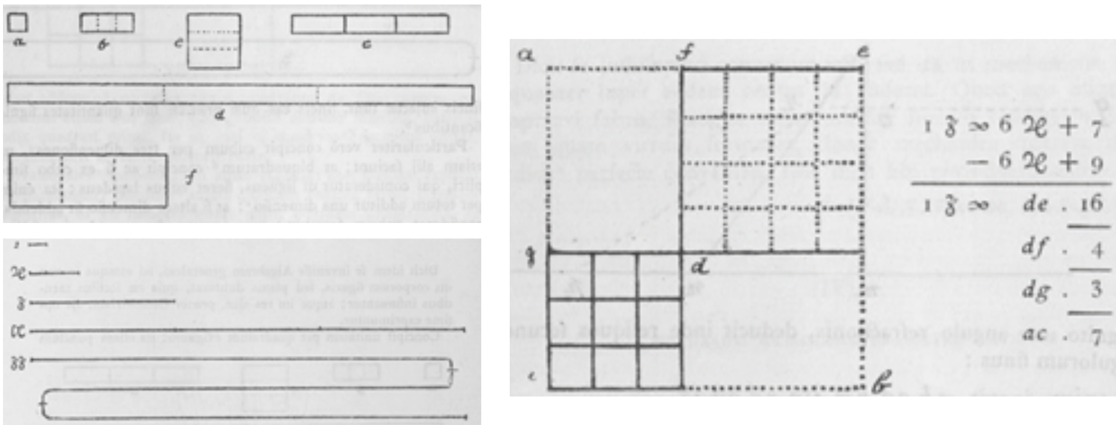


Figura 3. Representación de la unidad y notación cósica por Descartes previo a *La Géométrie*. **Fuente:** ADAM, & TANNERY, 1908, pp. 333-335.

Por otro lado, SASAKI (2003) señala que Descartes contemplaba como parte fundamental de su método el uso de compases, por lo que en otra carta hacia Beeckman en 1619, Descartes menciona que con la ayuda de sus compases pudo encontrar demostraciones a la resolución de ecuaciones, al igual que al problema de dividir un ángulo en una cantidad de partes arbitraria.

Al revisar *Cogitationes Privatae* —tratado escrito entre 1619 y 1621, en el que plasmó más ampliamente las reflexiones sobre sus compases— Descartes ejemplifica la resolución de la ecuación cúbica $x^3 = 7x + 14$ (anacrónicamente), apoyándose del mesolabio; el mismo compás que aparecería en *La Géométrie* (Figura 4), el cual permite construir la progresión geométrica $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots$, mostrando así una preocupación por encontrar geométricamente soluciones a ecuaciones.

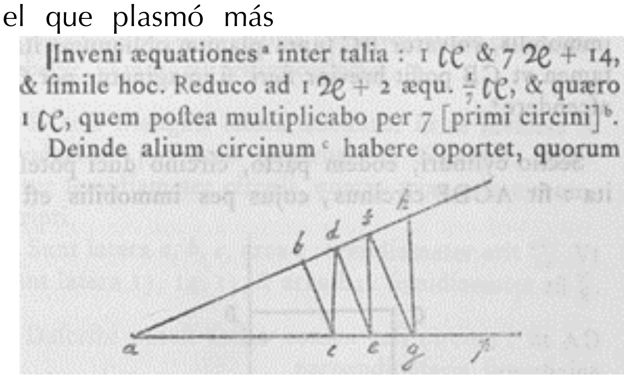
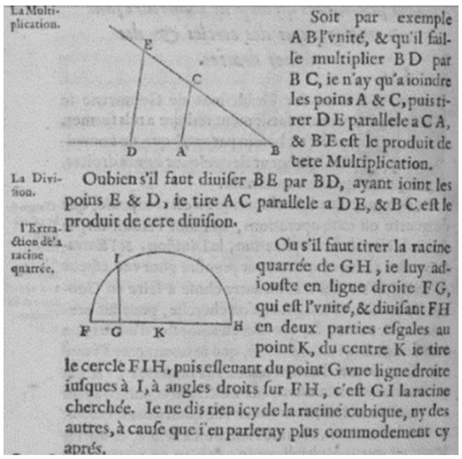
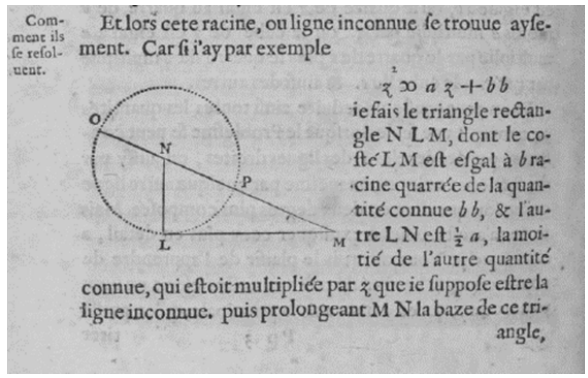


Figura 4. Resolución de una ecuación cúbica en *Cogitationes Privatae*. **Fuentes:** I. ADAM, & TANNERY, 1908, p. 234

Bajo esta consideración, y puesto que, en el método analítico geométrico clásico, la síntesis implicaba la construcción de la figura, entonces Descartes debía garantizar que tanto las ecuaciones como sus soluciones pudieran construirse geométricamente. En este sentido, el álgebra era solo una parte de su método (BOS, 2001), hecho que dota de sentido el preámbulo de *La Géométrie*, donde explica cómo construir geométricamente las operaciones aritméticas, ecuaciones y su solución (Figura 5).


La Multiplication.
Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.
La Diviſion.
Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.
l'Extraction de la racine quarrée.
Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

I


Comment ils ſe reſoluent.
Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$z^2 \propto az + bb$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à *b* racine quarrée de la quantité connue *b b*, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par *z* que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

II

Figura 5. Construcción geométrica de la multiplicación, división y raíz cuadrada (I) y la ecuación $z^2 = az + b^2$ (II) en *La Géométrie*. **Fuente:** DESCARTES, 1637, p. 298 y p. 302 respectivamente.

Se sabe que para las *Regulae ad directionem ingenii* Descartes ya poseía gran parte del esquema de pensamiento que plasmó de manera definitiva en *La Géométrie* —donde el análisis geométrico y el álgebra jugaban un rol vertebral—, sin embargo, hasta este primero, aún le faltaba librar el obstáculo de la dimensión. Este paso era fundamental para la construcción del *álgebra de segmentos*, plasmado por primera vez en *La Géométrie* y donde aparecen sistemática y explícitamente las cantidades paramétricas. Este hecho nos llevó a cuestionarnos qué sucedió entre 1628 y 1637 que le permitió a Descartes dar este salto.

En 1631 se le propone a Descartes —como un reto para probar su método— resolver el problema de Pappus. Este problema de *locus*, implica una gran cantidad de relaciones que no son perceptibles a partir del diagrama geométrico presente en el texto, al igual que muchos de los problemas resueltos por Viète, lo cual exige de un sistema prolijo para caracterizar las cantidades conocidas y las desconocidas. Por ello, se conjetura que fue este lo que le permitió refinar su método analítico (BOS, 2001; SASAKI, 2003).

Una revisión de tratados algebraicos de entre 1494 y 1585 —pertenecientes a Luca Pacioli, Girolamo Cardano, Nicola Tartaglia, Jaques Peletier, Ioannes Buteo, Petrus Ramus, Pedro Nunez, Rafael Bombelli, Guillaume Gosselin y Simon Stevin— muestra que en la tradición algebraica previa a Viète y Descartes, los ejemplos de resolución de problemas geométricos no poseían esta 'complejidad' que hemos reconocido. Por ejemplo, en los problemas resueltos por STIFEL (1544, 1553) —Figura 6— y PELETIER (1554) —Figura 7—, pueden identificarse dos cosas: la primera es que las expresiones algebraicas involucradas no presentan parámetros, sino coeficientes específicos; la segunda es que la resolución de estos problemas —a diferencia de como hacen Viète y Descartes, como mostraremos en el siguiente apartado— no estaba asociada a la construcción de fórmulas o expresiones generales, sino a la determinación de la incógnita que satisfacía la relación geométrica establecida por el problema.

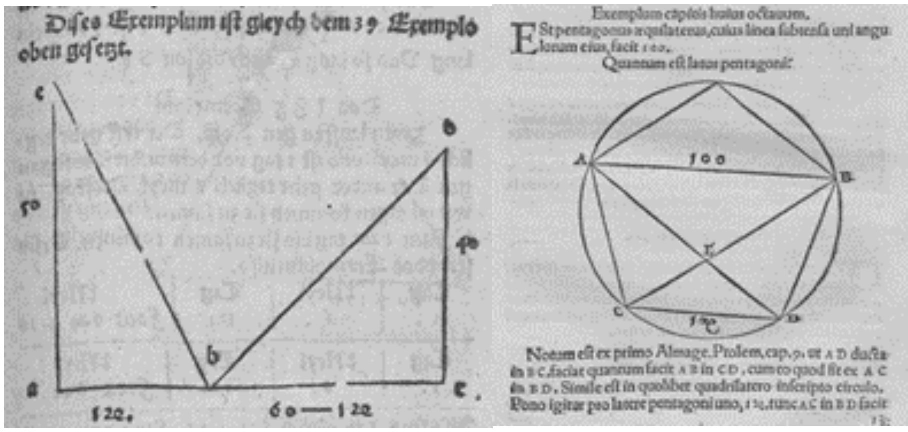


Figura 6. Ejemplos de problemas geométricos en Stifel. **Fuente:** STIFEL, 1544, p. 286 y 1553, fol. 305 respectivamente.

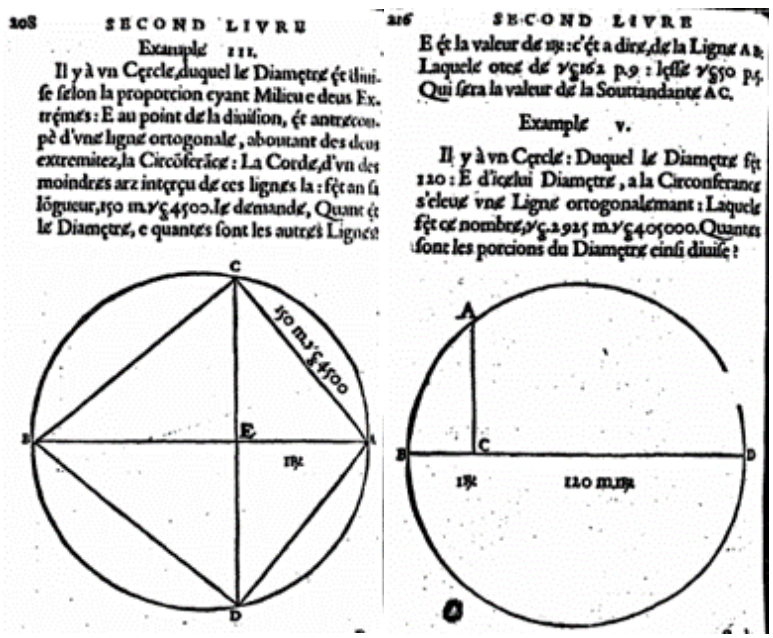


Figura 7. Ejemplos de problemas geométricos en Peletier.

Fuente: PELETIER, 1554, p. 208 y p. 216 respectivamente.

Bajo estas consideraciones identificamos que la ecuación paramétrica devino de la necesidad, tanto de Viète como en Descartes por construir un álgebra para la geometría (OAKS, 2018). Para ello, como destaca KLEIN (1968), era necesaria una ampliación del objeto de estudio al que estaba referido el álgebra de sus predecesores, considerando no solo números, sino también magnitudes geométricas. No obstante, esta última consideración adquiere mayor sentido al analizar la actividad matemática inmersa en el tipo de problemas geométricos que ambos matemáticos resolvieron, algo que por la naturaleza filosófica y ontológica del trabajo de Klein no es posible ver claramente. Sobre esto profundizaremos en el siguiente apartado.

4.2 Ejemplos de la Actividad Matemática de Viète y Descartes

Para identificar con detalle las implicaciones de la actividad geométrica en la que se involucraron Viète y Descartes mostramos dos ejemplos del análisis realizado a los problemas geométricos complejos seleccionados para nuestro EHE. Cabe señalar que si bien en la segunda fase se lleva a cabo la reconstrucción pragmática, en la fase descriptiva se requirió de una reconstrucción matemática que detallara todos los pasos en el desarrollo de los problemas, muchos de ellos no explícitos en los textos de Viète y Descartes y necesarios para el estudio de las prácticas que acompañan la producción del saber que se está estudiando.

4.2.1 Proposición XVI de Supplementum Geometriae de Viète

- *Análisis descriptivo de la actividad matemática*

En esta proposición Viète demuestra una propiedad que cumplen dos triángulos isósceles, donde la medida de los ángulos de la base de uno de ellos es un tercio de la medida de los ángulos del otro. También se cumple que los lados que subtienden los ángulos iguales en ambos son iguales. Con estas relaciones Viète demuestra que se cumple la siguiente relación:

$A\ cubus\ minus\ Z\ quadrato\ ter\ in\ A, aequatur\ Z\ cubo$

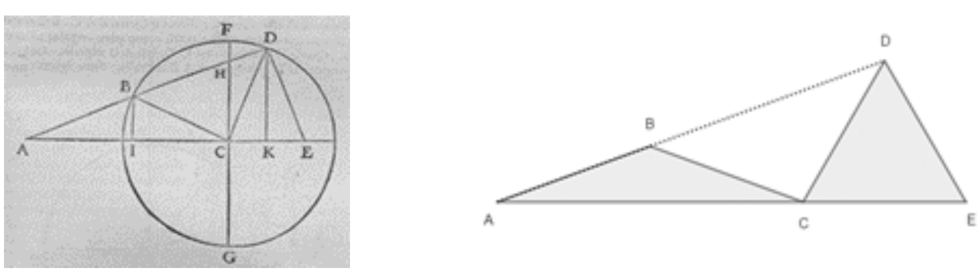
($A^3 - 3Z^2A = Z^3$ en notación de WITMER, 1983)

Donde A (incógnita) representa la base del triángulo cuyos ángulos base tienen la medida de un tercio de las medidas del otro triángulo y Z (parámetro) representa la medida de los lados iguales a los dos triángulos que son conocidos.

Primero se establecen las condiciones que deben cumplirse para determinar la relación geométrica que desea demostrar. La relación que menciona al inicio difiere de la relación planteada por la ecuación, pues está dada en términos de los segmentos específicos de los triángulos:

$AC^3 - 3(AC \times AB^2) = (CE \times CD^2)$ o $(CE \times AB^2)$ (*)

Seguidamente aparece en el texto la Figura 8-I, aunque por lo indicado en el texto una imagen más cercana correspondería con la Figura 8-II, dado que hasta después de presentar la relación a demostrar señala la construcción del círculo



I

II

Figura 8. I. Imagen presente en el texto de Víète. II. Imagen correspondiente a las condiciones de partida.

Fuentes: I. VIÈTE, 1646, p. 249; II. Elaboración propia.

Después de establecer la relación (*), realiza construcciones auxiliares como el círculo GEF, un diámetro FCG que corta perpendicularmente al segmento AE, y un segmento AD, obteniendo segmentos FH, HC, CG y la intersección H. Traza los segmentos BI y DK siendo paralelos al diámetro FCG, determinando las intersecciones I y K, por lo cual la imagen correspondiente después de todo este proceso coincide con la presentada en el texto.

Con base en lo anterior, inicia el establecimiento de las igualdades necesarias para construir la relación a demostrar. Las primeras son $AC = 2AI$ y $CE = 2CK$, las cuales se deducen por construcción. Establece, sin justificar, que $AB = BH$, lo cual puede derivarse si se considera que, si se trazan dos rectas perpendiculares a AC y a FG por los puntos A y H respectivamente, así como una recta perpendicular a AC que pase por I, se cumple que los triángulos BVH y BIA son congruentes (Figura 9), por lo tanto $AB = BH$. Con base en esta igualdad se dice que $AH = 2AB$.

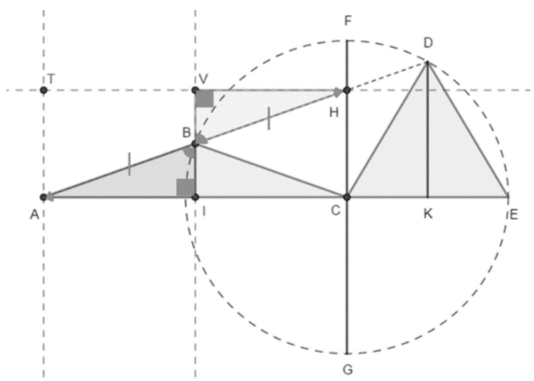


Figura 9. Primeras relaciones que establece Viète en la resolución.

Fuente: Elaboración propia

Posteriormente Viète menciona otras relaciones sin justificar. Establece primero que

$$CG^2 = CH^2 + (FH \times HG).$$

Por ser FG ambos radios del diámetro, $FC = CG$, y considerando que $FC = FH + HC$, entonces $CG = FH + HC$, de donde al considerar sus cuadrados respectivos se tiene que

$$CG^2 = FH^2 + 2FH \cdot HC + HC^2 \qquad (1)$$

Por otro lado, sabiendo que también se cumple que $HG = 2HC + FH$, entonces también se cumple que

$$FH \times HG = 2HC \cdot FH + FH^2 \qquad (2)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) en (1) se obtiene la relación

$$CG^2 = FH \times HG + HC^2$$

En donde, a su vez, $CG^2 = AB^2$, puesto que $CG = BC$, por ser ambos radios, y también, $AB = BC$ por construcción, por lo que, por transitividad, se cumple la relación

$$AB^2 = CH^2 + (FH \times HG) \qquad (3)$$

Que es igual a:

$$AB^2 - HC^2 = FH \times HG \qquad (4)$$

Dada la relación de semejanza entre los triángulos HBG y HFD (Figura 10), se cumple que $\frac{BH}{FH} = \frac{HG}{HD}$, dando pie a que $FH \times HG$ sea igual a $BH \times HD$. Con base en esta relación y (4) entonces

$$AB^2 - HC^2 = BH \times HD \qquad (5)$$

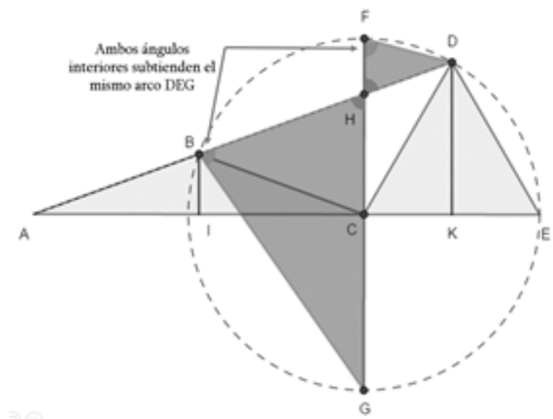


Figura 10. Relación entre los triángulos **HBG y HFD.**

Fuente: Elaboración propia.

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo ACH, señala que se cumple que

$$CH^2 = AH^2 - AC^2 \qquad (6)$$

Por lo tanto, sustituyendo (6) en (5), se obtiene

$$AB^2 - AH^2 + AC^2 = BH \times HD \qquad (7)$$

A partir de una de las relaciones iniciales ($AH = 2AB$) se tiene que $AH^2 = 4AB^2$. Por lo tanto, sustituyendo el valor de AH^2en (7) se obtiene la ecuación

$$AC^2 - 3AB^2 = BH \times HD \qquad (8)$$

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias
e-ISSN: 2346-4712 Vol. 17, No. 3 (septiembre - diciembre, 2022), pp. 539-559

Luego establece que $\frac{BH}{HD} = \frac{IC}{CK}$ y $\frac{IC}{CK} = \frac{AC}{CE}$, las cuales se deducen del Teorema de Tales aplicado a las rectas transversales AE y AD con los segmentos paralelos BI, CH, KD y uno que pasa por el punto E y que las cortan (Figura 11).

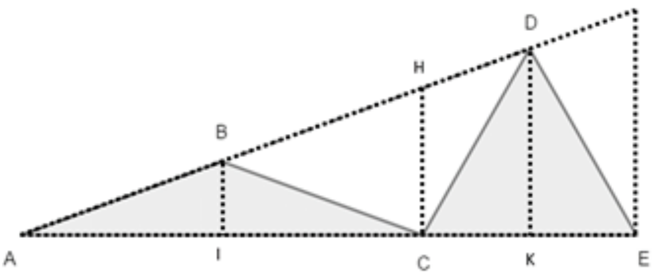


Figura 11. Relaciones relativas al Teorema de Tales.

Fuente: Elaboración propia.

Por lo tanto, con base en estas dos proporciones se tiene que $\frac{BH}{HD} = \frac{AC}{CE}$. Y de aquí, se obtiene que $BH \cdot CE = HD \cdot AC$, por lo que también se cumple que $BH^2 \cdot CE = BH \cdot HD \cdot AC$ (multiplicando la igualdad por BH). Puesto que también se tienen las siguientes relaciones: $BH = AB$ y que por la ecuación (8), entonces se tiene que $AB^2 \cdot CE = (AC^2 - 3AB^2) \cdot AC$, obteniendo así la ecuación final que se propuso a demostrar: $AB^2 \cdot CE = AC^3 - 3AB^2 \cdot AC$, o en el orden de Viète:

$$AC^3 - 3(AC \cdot AB^2) = CE \cdot AB^2$$

la ecuación final en términos de las especies, donde Z se corresponde con AB, mientras que A se corresponde con AC. Por lo tanto, en términos reducidos la ecuación paramétrica es

$$A^3 - 3Z^2A = Z^3$$

La Z^3 se obtiene porque $CE = AB$ pues, aunque en la imagen original no se aprecia que CE coincide con ser un radio, por la forma en la que se construye la figura, se obtiene que el triángulo CDE es equilátero.

Finalmente, como parte de la *síntesis —Exegética* para Viète por ser un problema geométrico—, Viète asigna valores fijos para Z de manera que construye los dos triángulos resolviendo la ecuación cúbica para A, la base del triángulo ABC. Él propone primero $Z = 1$, dejando la ecuación como $1C - 3N = 1$ ($x^3 - 3x = 1$, anacrónicamente) y luego $Z = 100000000$, valor con el cual se obtienen las medidas de los dos triángulos que muestra en el texto (Figura 12).

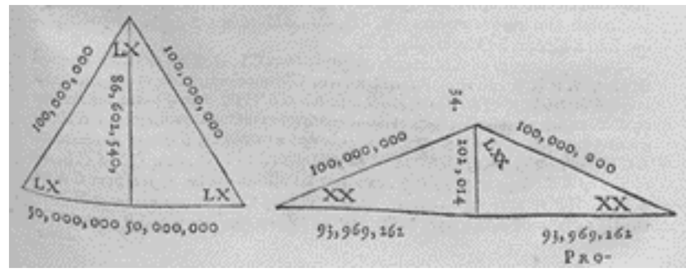


Figura 12. Triángulos solución.

Fuente: VIÈTE, 1646, p. 249.

- *Análisis cualitativo de la actividad matemática*

¿Qué y cómo se hace?

Se detallan las propiedades de la construcción geométrica a demostrar y se procede a *establecer relaciones de equivalencia* para determinar una relación que las articule. Para ello se vale de todas las relaciones aritméticas (p. ej. a partir de $AH = 2AB$ se tiene $AH^2 = 4AB^2$) y geométricas (p. ej. el teorema de Pitágoras aplicado al ΔACH) que puedan ser útiles para construir la ecuación. El tipo de equivalencias planteadas son, principalmente, proporciones. Al concretar la relación, esta se transforma en una ecuación algebraica en la que se distinguen las cantidades conocidas y desconocidas, es decir, parámetros e incógnitas respectivamente.

Así, como *acción* identificamos el *establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole* (aritméticas y geométricas) puesto que conforma la base de la resolución, así como la *distinción de las cantidades conocidas y desconocidas*, para destacar aquello que es dado como condición en el problema como aquello que no.

¿Para qué se hace?

Se busca una fórmula para determinar las medidas A de cualesquiera triángulos que cumplan las condiciones geométricas del problema, al resolver la ecuación para cada uno de los valores de Z. En este sentido, se reconoce como *actividad* la *búsqueda de una fórmula general para representar familias de soluciones*.

¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?

La validez de la resolución reside en la correspondencia entre cualquier relación de equivalencia con las ecuaciones. Hay un *razonamiento subyacente que considera toda igualdad como susceptible de ser conceptualizada como ecuación*. Es esta consideración epistémica lo que permite que se pueda transitar de las relaciones entre cantidades geométricas (representadas por segmentos de recta) hacia una equivalencia como objeto algebraico, es decir, una ecuación.

4.2.2 Ejemplo del Libro II de La Géométrie por Descartes

- *Análisis descriptivo de la actividad matemática*

Este es un ejemplo con el que Descartes se propone mostrar cómo determinar el género de una curva con base en su ecuación algebraica. Para ello propone encontrar una relación entre dos líneas que denomina x e y, que no son conocidas, y otras líneas conocidas a, b, y c, que determinen los puntos C de la curva.

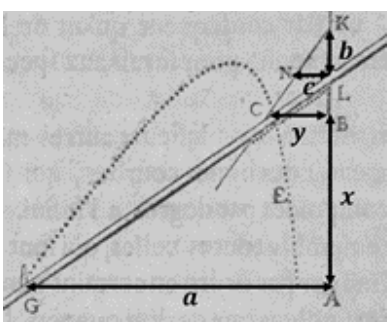


Figura 13. Parámetros e incógnitas en el problema.

Fuente: Adaptado de DESCARTES, 1630, p. 320.

Primero, Descartes describe la forma en la que el mecanismo funciona para construir la curva EC y nombra un punto C como lo que produce el mecanismo y que conforme se manipula determina la curva. El proceso inicia con la designación de las líneas conocidas GA, NL y KL como a, c y b respectivamente y las que no CB y AB, designadas como x e y respectivamente (Figura 13). Con base en estas Descartes inicia el establecimiento de las relaciones entre ellas para determinar la ecuación.

Puesto que los triángulos CBK y NLK son semejantes, entonces $\frac{LN}{LK} = \frac{CB}{BK}$, que en términos de los parámetros es lo mismo que $\frac{c}{b} = \frac{y}{BK}$, por lo que:

$$BK = \frac{b}{c}y$$

Con base en la relación anterior, se cumple que $BL = BK - LK$, que es lo mismo que

$$BL = \frac{b}{c}y - b$$

Implicando que:

$$AL = x + \frac{b}{c}y - b$$

Por otro lado, la relación de semejanza entre los triángulos GAL con CBK determinan que $\frac{CB}{LB} = \frac{GA}{LA}$, o bien, $\frac{y}{\frac{b}{c}y-b} = \frac{a}{x+\frac{b}{c}y-b}$, la cual es la misma que:

$$yx + \frac{b}{c}y^2 - by = \frac{ab}{c}y - ab$$

Y que al reducirla se obtiene la ecuación que Descartes se proponía a encontrar:

$$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

- *Análisis cualitativo de la actividad matemática*

¿Qué y cómo se hace?

Se detallan las propiedades del instrumento geométrico. En este caso, cada punto C resulta de su movimiento, obteniendo variaciones en la distancia a la que C se encuentra de la línea AK —el segmento CB (y)—. Posteriormente se *establecen relaciones de equivalencia* (no necesariamente mediante proporciones, como hace Viète, p. ej. $BL = BK - LK$) para determinar una ecuación que las articule, estableciendo antes un *sistema concreto de designación de las* *cantidades conocidas y desconocidas*. Dado el sistema, se vale de cualquier proporción que relacione las líneas o segmentos de interés para convertirlas en ecuaciones.

Así, como *acción* se identifica nuevamente el *establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole* (aritméticas y geométricas), así como la *distinción de las cantidades conocidas y desconocidas*, para destacar aquello lo dado y lo no dado como en el case de Viète.

¿Para qué se hace?

Descartes intenta obtener una expresión general con la cual, a través de manipulaciones de los parámetros, identifique qué tipo de lugar geométrico está siendo expresado. De esta manera se reconoce como *actividad* la *búsqueda de una expresión general para representar familias de curvas*.

¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?

La validez de la resolución reside en el hecho de que *cualquier proporción puede dar pie a una ecuación*, además de una correlación entre la ecuación y el género de la curva, que no es explicitada en el tratado. Al igual que en el caso de Viète, se identifica *un razonamiento que considera toda igualdad como susceptible de ser conceptualizada como ecuación*, lo cual permite la transición de las relaciones entre cantidades geométricas hacia la ecuación.

4.3 Síntesis de los Hallazgos

Puesto que la tradición algebraica previa a Viète y Descartes respecto a la resolución de problemas geométricos no muestra las características expuestas en estos ejemplos y el resto del *corpus* analizado, hemos identificado que este tipo de problemas geométricos, que denominamos *complejos*, involucran una gran cantidad de relaciones, que en su mayoría subyacen a la observación directa del diagrama geométrico sobre el que se investiga. Para algebrizar estas relaciones se requiere una articulación sistemática entre las cantidades conocidas (parámetros) —magnitudes que dependiendo de las condiciones de la construcción, quedan determinadas, aunque no especificadas numéricamente— y las desconocidas (variables) —magnitudes indeterminadas dependientes de las condiciones de la construcción y de las cantidades conocidas—. En este sentido, la *hipótesis epistemológica* derivada de este EHE considera que el trabajo con los *problemas geométricos complejos* es lo que lleva a Viète y Descartes a construir la ecuación paramétrica. Así, planteamos como respuesta a la pregunta ¿cuál fue el rol de los problemas, en los que Viète y Descartes se involucraron, en la emergencia de la ecuación paramétrica al renovar el análisis geométrico griego?, lo siguiente:

El *contexto de la situación específica* para Viète y Descartes fue la *renovación del método analítico geométrico con base en el álgebra Diofantina*, lo cual implicó que lidiaran con *problemas geométricos complejos*. Esta actividad matemática plantea la complejidad de articular el álgebra con la geometría, y muestra un proceso que parte del *establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole* y la *construcción de sistemas de designación para distinguir sistemáticamente entre cantidades conocidas y desconocidas* con base en las condiciones geométricas impuestas por el problema (acciones). Estas acciones tienen la *intención de construir fórmulas y expresiones generales para representar familias de soluciones o de curvas* (actividad). Por lo tanto, este desarrollo de acciones y actividades en Viète y Descartes, aunque separados en el tiempo, se articulan para lograr la *algebrización de la geometría* (práctica socialmente compartida), práctica que las articula como un todo coherente, producto de sus necesidades.

En este proceso, la noción de proporción fue fundamental, pues como señala Klein (1968), permitió el puente entre las relaciones geométricas de equivalencia y la igualdad algebraica: la ecuación. No obstante, si bien gran parte de las relaciones que se convertían en ecuaciones eran proporciones, en términos generales, podría decirse que una de las *justificaciones epistémicas* más relevantes en la racionalidad del álgebra de Viète y Descartes, es que toda relación de equivalencia puede ser susceptible de ser conceptualizada como ecuación algebraica. El análisis completo, presentado en LÓPEZ-ACOSTA (2019), destaca que el análisis algebraico desarrollado por ambos matemáticos, a diferencia de sus predecesores, evidencia una transición de *la ecuación como objeto de estudio* hacia la *ecuación como herramienta para el estudio*.

5. **Conclusiones y Discusión**

Con base en el contexto de significación de la ecuación paramétrica aquí presentado, se propone una explicación alternativa a la conceptualización actual de las ecuaciones paramétricas como "expresión de soluciones generales y como herramienta para probar las reglas que rigen las relaciones numéricas" (KIERAN, 1992, p. 390), proponiendo considerar también su carácter geométrico intrínseco. Estos resultados involucran contenidos algebraicos posteriores a los niveles básicos de escolaridad, y a la articulación del álgebra con otros dominios como la geometría, aspectos que han sido reportados como intereses actuales en la investigación didáctica en álgebra (ver KIERAN, 2007; RUÍZ-MUNZÓN, 2010; WARREN, TRIGUEROS, Y URSINI, 2016).

Así, vislumbramos tres caminos basados en consideraciones epistemológicas (BARBIN, *et. al.*, 2020) respecto al tratamiento escolar del parámetro. El primero, intenta darle sentido diferenciándolo de otras nociones como la incógnita y la variable, así como también fomentando su uso dentro de actividades relacionadas con la función, en las que obtiene una interpretación dinámica (ver DRIJVERS, 2003). Otro es el propuesto en trabajos como los de GASCÓN, BOSCH, Y RUÍZ-MUNZÓN (2017) que proveen una manera de algebrizar la actividad matemática partiendo de problemas que involucran procesos de cálculo aritmético, como estos autores les llaman, y que al cuestionar a los estudiantes sobre la estructura de los problemas se desencadena un cambio en la actividad, progresando hacia una de tipo algebraico que los incluye sistemáticamente.

El tercero, aún en construcción, basado en lo encontrado en este estudio, se sitúa en la práctica de *algebrización de la geometría*, la cual involucra el trabajo con problemas geométricos que articulen sistemáticamente parámetros e incógnitas, valiéndose de una justificación epistémica centrada en la conceptualización de que cualquier tipo de relación de equivalencia deviene en una ecuación. En términos escolares, esta práctica alude a los contenidos abordados en la asignatura que usualmente es denominada geometría analítica, por lo que con los resultados de este estudio consideramos podría reorientarse la actividad geométrica analítica, toda vez que los elementos encontrados señalan una práctica geométrica robusta, previa a la construcción de las ecuaciones. Por lo tanto, esto genera preguntas a nivel escolar como: ¿qué adaptaciones son necesarias en este tipo de problemas para ser abordados en la escuela?, ¿desde qué momento de la escolaridad pueden trabajarse este tipo de problemas?, ¿en qué medida las/los estudiantes pueden algebrizar relaciones geométricas considerando sus conocimientos geométricos?, ¿en qué medida las/los estudiantes reconocen las cantidades conocidas y no conocidas en este proceso?

Identificamos que esta vía no ha sido abordada del todo en la investigación respecto a este tópico, y muchas de las preguntas previas se deben al hecho de reconocer que en la escuela suelen dominar las aproximaciones aritméticas (en el nivel básico) y algebraicas (en el nivel medio) cuando se abordan los temas geométricos (SINCLAIR, Y BRUCE, 2015), dejando de lado lo propiamente geométrico (construcción, prueba, estudio de relaciones, etc.). Por ello, en una fase experimental del proyecto de investigación, se diseñó una secuencia didáctica constituida por problemas recuperados y adaptados de tratados originales de Viète y Descartes (Figura 14) que permiten explorar esta hipótesis epistemológica con estudiantes de bachillerato en México. El objetivo no es validar la hipótesis, sino robustecerla con evidencia empírica de un nuevo escenario: el escolar en condiciones experimentales. Se busca así, indagar qué otros elementos emergen en el trabajo con estudiantes para seguir caracterizando la naturaleza de este paradigma de actividad matemática y así, proporcionar alternativas de tratamiento escolar.

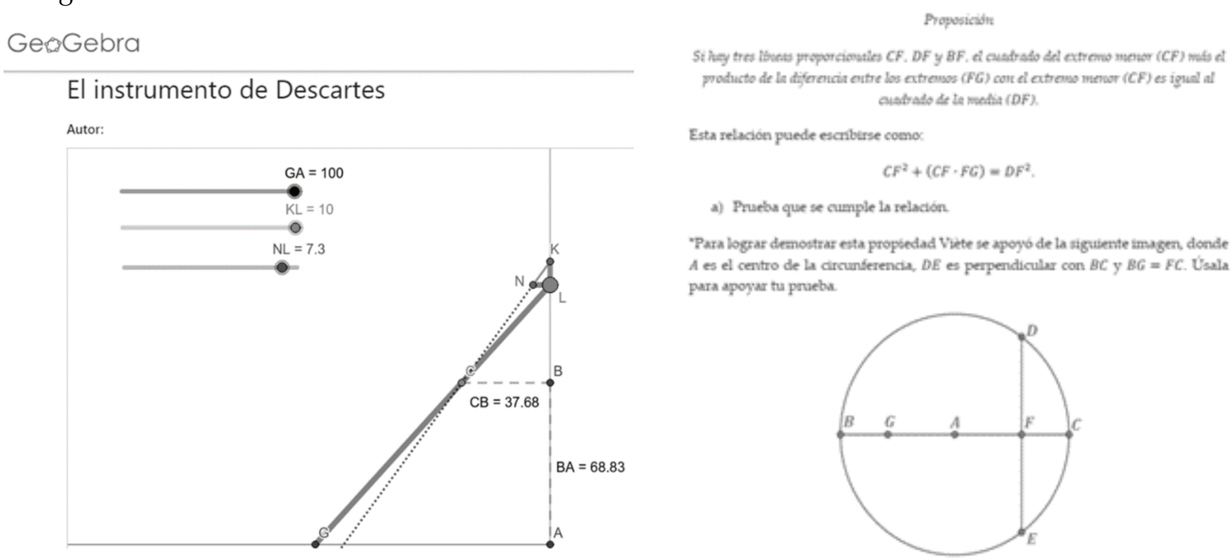


Figura 14. Ejemplos de problemas en la secuencia didáctica basados en originales de Viète y Descartes.**Fuente:** Elaboración propia.

6. Referencias

ADAM, C.; TANERY, P. *Euvres de Descartes* (Vol. X). L. Cerf, Ed: Paris, 1908.

BARBIN, E.; GUILLEMETTE, D.; TZANAKIS, C. *History of mathematics education*. In: Lerman S. (Org.). Encyclopedia of Mathematics Education. Springer. New York: EUA, 2020, pp. 333-342.

BARDINI, C.; RADFORD, L.; SABENA, C. *Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics.* In: 29TH ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, Volumen 2, pp. 129–136, Melbourne: Australia, Proceedings of PME 29. Departement of Science and Mathematics Education, 2005.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. *Approaches to Algebra: Perspectives for Research*. Kluwer. Dordrecht: The Netherlands, 1996.

BLOEDY-VINNER, H. *Beyond unknowns and variables – parameters and dummy variables in high school algebra*. In: SUTHERLAND, R. ROJANO, T. BELL, A. & LINS, R. (Org.). Perspectives on school algebra. Kluwer. Dordrecht: The Netherlands, 2001, pp. 177–189.

BOLEA, P. *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. In: SEMINARIO MATEMÁTICO GARCÍA DE GALDEANO, v. 29. Monografía, Departamento de Matemáticas Universidad de Zaragoza. 2003.

BOS, H. *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. Springer-Verlag. New York: EUA, 2001.

CANTORAL, R. *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Gedisa. Ciudad de México: México, 2013.

CANTORAL, R.; MONTIEL, G.; REYES-GASPERINI, D. Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, España, v. 8, pp. 9-28. 2015.*

CASTIBLANCO, O.; NARDI, R. Un uso de la historia en la enseñanza de la didáctica de la física. Góndola, enseñanza Y Aprendizaje De Las Ciencias, Colombia, v. 8, n. 2. pp. 50-60. 2013. https://doi.org/10.14483/23464712.5139.

CHARBONNEAU, L. From euclid to descartes: algebra and its relation to geometry. In: BEDNARZ, N. KIERAN, C. & LEE, L (Org.). Approaches to Algebra: Perspectives for Research, Kluwer. Dordrecht: The Netherlands, 1996, pp. 15-38.

CIFOLETTI, G. From Valla to Viete: The Rethorical Reform of Logic and Its Use in Early Modern Algebra. Early Science and Medicine, The Netherlands, v. 11, n. 4, pp. 390-423. 2006.

CLARK, K.; KJELDSEN, T.; SCHORCHT, S.; TZANAKI, C. (Edits.). Mathematics, Education and History. Towards a Harmonious Partnership. Springer. Cham: Alemania, 2018.

CRESPO, C. Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología. 300 páginas. Doctorado en ciencias con especialidad en matemática educativa - Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN. México, 2007.

DESCARTES, R. Discours de la me'thode pour bien conduire sa raison & chercher la varite' dans les sciences plus la diotrique, les meteores, et la geometrie, qui sont des essais de cete methode. Ian Marie. Leyden: Francia, 1637.

DESCARTES, R. La Geometría. Traducido por: ROSSELL, P. Espasa - Calpe S.A. Buenos Aires–México: Argentina-México, 1947

DESCARTES, R. Rene Descartes: Reglas para la dirección del espíritu. Traducido por: CORDÓN, J. M. Alianza Editorial. Madrid: España, 1996.

DRIJVERS, P. Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter, Mathematics Education Phd - Freudenthal Institute, Utrecht University. The Netherlands, 2003.

ESPINOZA, L. Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico. Maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa - Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav - IPN. México, 2009.

FURINGHETTI, F.; PAOLA, D. Parameters, unknowns and variables: a little difference? En J. da Ponte, & J. Matos (Edits.), In: 20TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, Volumen 2, pp. 368-375, Lisbon: Portugal. Proceedings of PME 20. Departamento de Educaçao, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 1994.

GASCÓN, J. Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. Petit x, Francia, v. 37, pp. 43-63. 1994-1995.

GASCÓN, J. La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. Educación matemática, v. 11, n. 1, pp. 77-88. 1999.

GASCÓN, J.; BOSCH, M.; RUIZ-MUNZÓN, N. El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. In: MUÑOZ-ESCOLANO, J. ARNAL-BAILERA, A. BELTRÁN-PELLICER, P. CALLEJO, M. & CARRILLO, J. (Org.). Investigación en Educación Matemática XXI. SEIEM. Zaragoza: España. 2017. pp. 25-47.

HEEFFER, A. The Emergence of Symbolic Algebra as a Shift in Predominant Models. Foundations of Science, v. 13, pp. 149-161. 2008. https://doi.org/10.1007/s10699-008-9124-0.

HEEFFER, A. On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism. In: VAN KERKHOVE, B. (Org.). New Perspectives on Mathematical Practices. Essays in Philosophy and History of Mathematics. World Scientific Publishing. Co. Pte. Ltd . Singapore: Sigapore, 2009, pp. 1-27.

HEEFFER, A. Epistemic justification and operational symbolism. Foundations of Science, v.19, n. 1, pp. 89-113. 2014. https://doi.org/10.1007/s10699-012-9311-x

KIERAN, C. The Learning and Teaching of School Algebra. In: Grows, D. (Org.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan Publishing Company. New York: EUA, 1992, pp. 390-419.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In: Lester Jr., F. (Org.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New Age Publishing. Charlotte, NC: EUA, 2007, pp. 707-762.

KLEIN, J. Greek Mathematical Thought and The Origin of Algebra. Dover Publications Inc. New York: EUA, 1968.

LERMAN, S. The Social Turn in Mathematics Education Research. In Boaler, J. (Org.). Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning. Ablex. Westport, CT: EUA, 2000, pp. 19-44.

LÓPEZ-ACOSTA, L.A. Un acercamiento epistemológico y lingüístico para el estudio del Pensamiento y Lenguaje Algebraico. El caso del Análisis Algebraico de Viète y Descartes. Memoria predoctoral no publicada. Doctorado en ciencias con especialidad en matemática educativa - Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav - IPN. México, 2019.

MARQUES PINHEIRO, R.; LUCCAS, S.; BUENO LUCAS, L. Sistemas de numeración a la luz de un enfoque histórico-epistemológico. Góndola, enseñanza Y Aprendizaje De Las Ciencias, v. 14, n. 2, pp. 243-267. 2019. http://doi.org/10.14483/23464712.13030.

MERZBACH, U.; BOYER, C. B. A History of Mathematics (3 ed.). Wiley. New Jersey: EUA. 2011.

OAKS, J. Francois Viète's revolution in algebra. Archive for History of Exact Sciences, v. 72, pp. 245-302, 2018. https://doi.org/10.1007/s00407-018-0208-0

PAPPUS. La collection mathimatique. Traducido por: VER EECKE, P. Blanchard. Paris: France. 1982.

PAPPUS. Book 7 of the Collection (Vol. 1). Traducido por: JONES, A. Springer. New York: EUA. 1986.

PELETIER, J. L'algebre de Iaques Peletier dv Mans, departie an deus liures. Jean de Tournes. Lyon: France. 1554.

PEREA, M., & BUTELER, L. El uso de la historia de las ciencias en la enseñanza de la física: una aplicación para el electromagnetismo. Góndola, enseñanza Y Aprendizaje De Las Ciencias, v. 11, n. 1, pp. 12-25, 2016, https://doi.org/10.14483/udistrital.jour.gdla.2016.v11n1.a1

PUIG, L.; ROJANO, T. The history of algebra in mathematics education. In: K. STACEY, H. CHICK, & M. KENDAL. The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study Kluwer Academic Publishers: Norwood, MA, 2004, pp. 189-224.

RAO, J. Renaissance and Scientific Revolution. In: History of Rotating Machinery Dynamics. History of Mechanism and Machine Science, vol 20. Edición. Springer. Dordrecht: The Netherlands. 2011, pp. 15-21.

RUIZ-MUNZÓN, N. La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. Doctorado en Educación. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Université Autonome de Barcelone. España. 2010.

SASAKI, C. Descartes's Mathematical Thought. Kluwer. Dordrecht: The Netherlands. 2003.

SEFRIN-WEISS, H. (2013). Greek Geometrical Analysis: Method and Methodology in Pappus' "Collectio". Studia Leibnitiana, v. 45. n. 1, pp. 2-19. 2013.

SFARD, A. The development of algebra Confronting historical and psychological perspectives. Journal of Mathematical Behavior, v. 14, pp. 15-39. 1995.

SINCLAIR, N.; BRUCE, C. New opportunities in geometry education at the primary school. ZDM Mathematics Education,v. 47, n. 3, pp. 319-329. 2015. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4

STEDALL, J. Notes made by Thomas Harriot on the treatises of François Viète. Archive for History of Exact Sciences, v. 62. n. 2, pp. 179-200. 2008. https://doi.org/10.1007/s00407-007-0019-1

STEDALL, J. From Cardano's great art to Lagrange's reflections: Filling a gap in the history of algebra. European Mathematical Society. Zürich: Switzerland. 2011.

STIFEL, M. Arithmetica integra. Petreius. Nürnberg: Germany. 1544.

STIFEL, M. Die Coss Christoffe Ludolffs mit sch¨onen Exempeln der Coss / Zu Königsperg. Gedrückt durch Alexandrum Lutomyslensem. Preussen: Germany. 1553.

TORRES-CORRALES, D. Usos y significados de nociones trigonométricas en el problema cinemático directo de la Robótica. Doctorado en ciencias con especialidad en matemática educativa - Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav - IPN. México, 2020.

TZANAKIS, C.; ARCAVI, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic Survey. In: J. FAUVEL, & J. VAN MAANN (EDS.), History in mathematics education: the ICMI study. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht: Netherlands, 2000, pp. 201-240.

VARVOGLIS, H. From Classical Era to the Renaissance. In: History and Evolution of Concepts in Physics. Edición. Springer. Cham: The Netherlands, 2014. pp. 21-26.

VIÈTE, F. De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo. Ex Typographia Ioannes Laquehay. Parisiis. 1615.

VIÈTE, F. Opera mathematica. Leiden. 1646.

VIÈTE, F. The Analytic Art: Nine Studies in Algebra, Geometry, and Trigonometry from the Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu, Algebrâ novâ by François Viète. Traducido por: WITMER, T. Kent State University. Kent, Ohio: EUA. 1983.

WARDHAUGH, B. How to read historical mathematics. Princeton University Press. Princeton and Oxford: EUA. 2010.

WARREN, E.;TRIGUEROS, M.; URSINI, S. Research on the Learning and Teaching of Algebra. In: GUTIÉRREZ, A. LEDER, C. & BOERO, P. (Org.). The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Sense Publishers. Rotterdam: The Netherlands, 2016, pp. 73–108.