Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 39, N° 2, 2021, pág. 217–239

Un algoritmo Newton inexacto para complementariedad horizontal

Carlos A. Arias[a] ✉, Rosana Pérez[b], Héctor J. Martínez[c]

[a,b] Universidad del Cauca, Departamento de Matemáticas, Popayán, Colombia.

[c] Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia.

Resumen. En este artículo, proponemos un nuevo algoritmo tipo *Newton inexacto* para resolver el problema de complementariedad horizontal mediante su reformulación como un problema de minimización restricto. El algoritmo usa la estrategia de combinar una dirección *Newton inexacta* con su proyección sobre el conjunto factible; esta última opción solo se usa cuando se necesita garantizar factibilidad. Además, presentamos un análisis teórico y numérico del nuevo algoritmo.

Palabras clave: Problema de complementariedad horizontal, método de Newton inexacto, proyección ortogonal.

MSC2010: 49M15, 90C06, 90C30, 90C33

An inexact Newton algorithm for horizontal complementarity

Abstract. In this article, we proposed a new inexact Newton algorithm to solve the *horizontal complementarity problem* from its reformulation as a constrained minimization problem. The algorithm uses an inexact Newton direction and it uses the orthogonal projection of that direction on the feasible set only when it is necessary to guarantee feasibility. Moreover, we present a theoretical and numerical analysis of the proposed algorithm.

Keywords: Horizontal complementarity problem, inexact Newton method, orthogonal projection.

E-mail: carlosarias@unicauca.edu.co [a] ✉, rosana@unicauca.edu.co [b], hector.martinez@correounivalle.edu.co [c].
Recibido: 11 de diciembre 2020, Aceptado: 22 de junio 2021.
Para citar este artículo: C. A. Arias, R. Pérez & H. J. Martínez, Un algoritmo Newton inexacto para complementariedad horizontal, *Rev. Integr. Temas Mat.*, 39 (2021), No. 2, 217-239.
doi: 10.18273/revint.v39n2-20210005

1. Introducción

Dada una función $H\colon \mathbb{R}^{n+m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ continuamente diferenciable, el *Problema de Complementariedad Horizontal*, abreviadamente PCH(H), consiste en encontrar vectores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) = 0, \qquad \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{w} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \geq 0, \quad \boldsymbol{w} \geq 0. \tag{1}$$

En este contexto, decimos que un vector es no negativo, si todas sus componentes son no negativas.

Observemos que, en el problema PCH(H), no hay restricciones sobre el vector $\boldsymbol{y}$. En algunos casos este vector no existe, por ejemplo cuando $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}$, para cualquier función $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ no lineal y continuamente diferenciable, con lo cual el problema de complementariedad horizontal, se reduce al bien conocido *problema de complementariedad no lineal*, que consiste en hallar $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\boldsymbol{x} \geq 0, \qquad F(\boldsymbol{x}) \geq 0, \qquad \boldsymbol{x}^T F(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Otros problemas relacionados con el de complementariedad horizontal son los de complementariedad Lineal [10], implícita [27], vertical [9] [14] y, desigualdades variacionales [15] [21]. Para estos problemas han sido propuestos, entre otros, métodos tipo [3] [10] *Newton* [8] [12] [16] [23] [22] [30] [31], *Newton* inexacto [13] [17] [18] [27] [29] [33] y cuasi-*Newton* inexacto [7].

Las numerosas aplicaciones del problema en áreas como ingeniería, economía, modelos de equilibrio, teoría de optimización [5], [14], [19], [28], [32] han incrementado el interés de investigadores en proponer algoritmos eficientes para su solución [6], [2], [24], [26].

Una estrategia muy usada para resolver el problema de complementariedad horizontal, consiste en reformularlo como el siguiente sistema de ecuaciones no lineales restricto

$$G(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} H(\boldsymbol{z}) \\ x_1 w_1 \\ \vdots \\ x_n w_n \end{pmatrix} = 0, \qquad \boldsymbol{z} \in \Omega, \tag{2}$$

donde $G : \mathbb{R}^{n+m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m+n}$ y $\Omega = \{\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}^{n+m+n} : \ \boldsymbol{x} \geq 0\ , \boldsymbol{w} \geq 0\}$.

A su vez, y con el objetivo de proponer algoritmos globales para su solución (e indirectamente resolver el problema de complementariedad horizontal), el sistema (2) puede reformularse como el siguiente problema de minimización

$$\begin{array}{ll} Minimizar & f(\boldsymbol{z}) \ = \ \|G(\boldsymbol{z})\|^2, \\ s.a & \boldsymbol{z} \in \Omega \end{array} \tag{3}$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana.

En [4], los autores resuelven (3) mediante un algoritmo global de punto interior con direcciones *Newton inexactas*, el cual preserva factibilidad mediante el uso de *gradientes proyectados*. La demostración de convergencia (lineal, superlineal y cuadrática) de dicho algoritmo es presentada en [6]. Por otra parte, en [1], los autores demuestran que el uso de direcciones de *Newton exactas* en el algoritmo propuesto en [4] tiene buenas propiedades locales de convergencia.

Recientemente, en [7], el autor presenta un nuevo algoritmo global *cuasi Newton inexacto* de punto interior para resolver problemas de complementariedad horizontal basado en la reformulación (3). Este algoritmo usa, siempre que sea posible, una dirección *cuasi-Newton inexacta* y en algunas iteraciones, para garantizar factibilidad, proyecta dicha dirección sobre el conjunto Ω. Con esta estrategia, se mantienen buenas propiedades de convergencia de los métodos cuasi-*Newton*.

Motivados por los buenos resultados obtenidos en [7], en este artículo, usamos la estrategia de combinar una dirección *Newton inexacta* con su proyección sobre el conjunto Ω, solo cuando se necesite garantizar factibilidad, para proponer un nuevo algoritmo tipo *Newton* inexacto par resolver el PCH(H) indirectamente a través de su reformulación como el problema de minimización (3). Vale la pena mencionar que este nuevo algoritmo usa una estrategia de búsqueda lineal diferente a la utilizada en [7], la cual resultó más eficiente numéricamente. Complementamos la nueva propuesta algorítmica con su análisis teórico y numérico.

Organizamos la presentación de este artículo en la siguiente forma. En la Sección 2, presentamos el nuevo algoritmo y describimos algunas de sus características. En la Sección 3, presentamos el análisis de convergencia del algoritmo propuesto. En la Sección 4, analizamos su comportamiento numérico. Finalmente, en la Sección 6, presentamos algunos comentarios finales.

2. Nuevo algoritmo

En esta sección, presentamos un nuevo algoritmo global de punto interior para resolver (3), el cual genera una sucesión de puntos factibles $\{\boldsymbol{x}_k\}$ que satisface la condición de decrecimiento suficiente [24],

$$\|G(\boldsymbol{x}_{k+1})\| \leq [1-\lambda\alpha_k]\|G(\boldsymbol{x}_k)\|,$$

donde α_k es el tamaño del paso y $\lambda \in \left(0,\, \frac{2}{3}\right)$. Esta condición es *libre de derivadas*, lo cual es ventajoso en lo que respecta al costo operacional del algoritmo. Además, su uso se justifica por su relación con algoritmos tipo *Newton inexactos* globalmente convergentes, en los cuales se exige, en cada iteración, un decrecimiento suficiente de $\|G\|$ [11].

Una característica importante del nuevo algoritmo es su búsqueda direccional, la cual usa una dirección *Newton* inexacta, a menos que se pierda factibilidad, caso en el cual, se proyecta esta dirección sobre el conjunto Ω.

Antes de presentar el algoritmo y para una mejor comprensión del mismo describimos explícitamente la matriz jacobiana de G en $\boldsymbol{z}$, denotada $G'(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{(n+m+n)\times(n+m+n)}$ y el sistema de ecuaciones lineales $G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d} = 0$.

$$G'(\boldsymbol{z}) = \left[\begin{array}{c|c|c} H'_x(\boldsymbol{z}) & H'_y(\boldsymbol{z}) & H'_w(\boldsymbol{z}) \\ --- & --- & --- \\ W & 0 & X \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} & & H'(\boldsymbol{z}) & & \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ W & \vdots & 0 & \vdots & X \end{array}\right], \tag{4}$$

donde $H'(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m+n)}$ es la matriz jacobiana de la función H en el vector $\boldsymbol{z}$; $W = Diag(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $X = Diag(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y 0 denota la matriz cero en $\mathbb{R}^{m\times m}$.

Usando (4) y un vector $\boldsymbol{d} = (d_x \quad d_y \quad d_w)^T \in \mathbb{R}^{(n+m+n)}$, el sistema $G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d} = -G(\boldsymbol{z})$ equivalentemente $G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d} = 0$ puede expresarse como el sistema matricial,

$$G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} H(\boldsymbol{z}) \\ x_1w_1 \\ \vdots \\ x_nw_n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} & & H'(\boldsymbol{z}) & & \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ W & \vdots & 0 & \vdots & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ .. \\ d_y \\ .. \\ d_w \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^{n+m+n}, \tag{5}$$

el cual, después de unos sencillos cálculos matriciales se convierte en el siguiente sistema de $n+m+n$ ecuaciones no lineales,

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{z}) + H'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d} &= 0 \in \mathbb{R}^{n+m} \\ x_iw_i + w_i(d_x)_i + x_i(d_w)_i &= 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6}$$

La estructura del sistema (5) y en particular, del sistema (6) desempeña un papel central en nuestra propuesta algorítmica.

Debido a que el algoritmo propuesto es tipo *Newton* inexacto con direcciones proyectadas, lo llamaremos Algoritmo NIDP. Presentamos a continuación su descripción formal.

Algoritmo (**Algoritmo NIDP**).
Sean $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{z}^0 \in \Omega$, $\theta \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $\lambda \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\tau \in (0,1)$, $c_{big} > c_{small} > 0$, y $c_{small} < 1$. Para $k = 0, 1, \ldots$ hacer:

1. *Criterio de parada.* Si $\|G(\boldsymbol{z}_k)\| \le \varepsilon$ pare. Sino, siga los pasos 2 a 6.

2. *Dirección de Newton inexacta.* Calcule $\boldsymbol{d}_k = (d_x^k, d_y^k, d_w^k)^T \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ tal que

$$\|G(\boldsymbol{z}_k) + G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{d}_k\| \le \theta_k \|G(\boldsymbol{z}_k)\|, \qquad \theta_k \in (0, \theta). \tag{7}$$

Si $\|\boldsymbol{d}_k\| \le c_{big}$ y

$$|x_i^k w_i^k + x_i^k (d_w^k)_i + w_i^k (d_x^k)_i| \le \theta_k x_i^k w_i^k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

entonces defina $\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{d}_k$ sino, pase al Paso 4.

3. *Tamaño de paso máximo.* Dado $\tau_k \in [\tau, 1)$, calcule

$$\alpha_k^{break} = \text{máx}\{\alpha \in [0,1] : \boldsymbol{z}_k + \alpha \boldsymbol{p}_k \in \Omega\} \tag{9}$$

y haga $\alpha_k^{\text{máx}} = \tau_k \alpha_k^{break}$. Si $\alpha_k^{\text{máx}} \le c_{small}$, pase al Paso 4, de lo contrario, pase al Paso 5.

4. *Direcciones proyectadas.* Escoja $\tau_k \in [\tau, 1)$, haga $\alpha_k = \tau_k$ y defina

$$\boldsymbol{p}_+ = P_\Omega(\boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{d}_k) - \boldsymbol{z}_k \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{p}_- = -\boldsymbol{p}_+.$$

4.1. Si $\|G(\boldsymbol{z}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_+)\| \leq [1 - \lambda\alpha_k]\|G(\boldsymbol{z}_k)\|$ defina $\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}_+$ y pase al Paso 6.

4.2. Si $\boldsymbol{z}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_- \in \Omega$ y $\|G(\boldsymbol{z}_k + \alpha_k \mathbf{p}_-)\| \leq [1 - \lambda\alpha_k]\|G(\boldsymbol{z}_k)\|$ defina $\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}_-$ y pase al Paso 6.

4.3. Haga $\alpha_k = \beta\alpha_k$ y vuelva a 4.1.

4.4. Si $\alpha_k = \lambda$, pare.

5. *Búsqueda lineal.* Calcule $\alpha_k = \alpha_k^{\text{máx}} \text{máx}\{\beta^l : l = 0, 1, 2, \ldots\}$ tal que

$$\|G(\boldsymbol{z}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k)\| \leq [1 - \lambda\alpha_k]\|G(\boldsymbol{z}_k)\|. \tag{10}$$

5.1. Si $\alpha_k = \lambda$, pare.

6. *Actualización.* Haga $\boldsymbol{z}_{k+1} = \boldsymbol{z}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k$.

Observe que en el Paso 4, se calcula no solamente $\boldsymbol{p}_+$, sino su negativo, pero solo se pregunta por la factibilidad de $\boldsymbol{p}_-$ debido a que, este vector no necesariamente es factible.

3. Análisis de convergencia

En esta sección, presentamos los resultados de convergencia del Algoritmo NIDP. Las hipótesis generales que usamos en el análisis son las siguientes.

H1. Existe $\boldsymbol{z}^* \in \Omega$ tal que $G(\boldsymbol{z}^*) = 0$.

H2. $G'(\boldsymbol{z})$ es una función *Lipschitz* continua en Ω. Es decir, existe una constante positiva γ tal que, para todo $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}' \in \Omega$,

$$\|G'(\boldsymbol{z}) - G'(\boldsymbol{z}')\| \leq \gamma\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\|.$$

Una consecuencia inmediata de la hipótesis H2 es que para todo $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}' \in \Omega$,

$$\|G(\boldsymbol{z}') - G(\boldsymbol{z}) - G'(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z}' - \boldsymbol{z})\| \leq \frac{\gamma}{2}\|\boldsymbol{z}' - \boldsymbol{z}\|^2. \tag{11}$$

El siguiente teorema garantiza que una dirección de *Newton inexacta* es de *descenso* para la función de mérito f.

Teorema 3.1. *Si* $G(\boldsymbol{z}) \neq 0$ *y* $\boldsymbol{d}$ *es una dirección que satisface* (7)*, para algún* $\theta \in [0, 1)$*, entonces*

$$\nabla f(\boldsymbol{z})^T \boldsymbol{d} < 0.$$

Demostración. Si $\boldsymbol{d}$ es una dirección que satisface (7) entonces

$$0 \leq \|G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d}\| \leq \theta\,||G(\boldsymbol{z})||,$$

por lo tanto,

$$\|G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d}\|^2 \leq \theta^2\,\|G(\boldsymbol{z})\|^2,$$

de donde,

$$\|G(\boldsymbol{z})\|^2 + 2G(\boldsymbol{z})^T G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d} + \|G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d}\|^2 \leq \theta^2\,\|G(\boldsymbol{z})\|^2$$

luego,

$$G(\boldsymbol{z})^T G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d} \leq \frac{1}{2}(\theta^2-1)\,\|G(\boldsymbol{z})\|^2 - \frac{1}{2}\,\|G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d}\|^2$$

y como $0 \leq \theta < 1$, concluimos que

$$\nabla f(\boldsymbol{z})^T \boldsymbol{d} = G(\boldsymbol{z})^T G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d} < 0. \qquad ☑$$

Por otro lado, es claro que si $\nabla f(\boldsymbol{z})^T \boldsymbol{p}_+ \neq 0$ entonces $\boldsymbol{p}_+$ o $\boldsymbol{p}_-$ será una dirección de descenso para f. Lo anterior nos permite inferir que en cualquier caso, los ciclos en 4.1, 4.2 o en el Paso 5 terminarán en un número finito de repeticiones.

El siguiente teorema da una condición suficiente que garantiza la existencia de una dirección tipo *Newton* que cumple las condiciones (7) y (8).

Teorema 3.2. *Sea $\boldsymbol{z} \in \Omega$ tal que $G(\boldsymbol{z}) \neq 0$. Si un vector no nulo $\overline{\boldsymbol{d}}$ satisface*

$$\|G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}\| < \|G(\boldsymbol{z})\|$$

y

$$x_i w_i + x_i(\bar{d}_w)_i + w_i(\bar{d}_x)_i \;=\; \mu_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{12}$$

entonces existe $\theta_{min} \in [0,1)$ tal que, para cualquier $\theta \in [\theta_{min}, 1)$, existen $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ y $\eta \in [0,1)$ tales que

$$\|G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d}\| \;\leq\; \theta\,\|G(\boldsymbol{z})\| \tag{13}$$

y

$$|x_i w_i + x_i(d_w)_i + w_i(d_x)_i| \;\leq\; |\mu_i| + \eta\, x_i w_i. \tag{14}$$

En particular, si $\|G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}\| = 0$ entonces, para cualquier $\theta \in [0,1)$, existe $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ tal que (13) se cumple y además,

$$|x_i w_i + x_i(d_w)_i + w_i(d_x)_i| \;\leq\; \theta\, x_i w_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostración. Para $\overline{\boldsymbol{d}} \neq 0$, sean

$$\bar{\theta} \;=\; \frac{||G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}\,||}{||G(\boldsymbol{z})||} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{d} \;=\; \frac{1-\theta}{1-\bar{\theta}}\,\overline{\boldsymbol{d}}, \tag{15}$$

con $\theta \in [\bar{\theta}, 1)$. Usando (15) tenemos que

$$\begin{aligned}
||G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d}|| &= \left|\left|G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\cdot\frac{1-\theta}{1-\bar{\theta}}\,\overline{\boldsymbol{d}}\right|\right| \\
&= \left|\left|\frac{G(\boldsymbol{z}) - \bar{\theta}\,G(\boldsymbol{z}) + \theta G(\boldsymbol{z}) - \theta G(\boldsymbol{z}) + (1-\theta)G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}}{1-\bar{\theta}}\right|\right| \\
&= \left|\left|\frac{(\theta-\bar{\theta})G(\boldsymbol{z}) + (1-\theta)(G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}})}{1 - \dfrac{||G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}||}{||G(\boldsymbol{z})||}}\right|\right| \\
&\leq \frac{(\theta-\bar{\theta})||G(\boldsymbol{z})|| + (1-\theta)||G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}||}{\dfrac{||G(\boldsymbol{z})|| - ||G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}||}{||G(\boldsymbol{z})||}}.
\end{aligned}$$

Usando $\bar{\theta}\,||G(\boldsymbol{z})|| = ||G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}||$ en la desigualdad anterior, concluimos que

$$||G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\boldsymbol{d}|| \leq \frac{\theta\,(||G(\boldsymbol{z})|| - ||G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}||)||G(\boldsymbol{z})||}{||G(\boldsymbol{z})|| - ||G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}||} = \theta\,||G(\boldsymbol{z})||.$$

Si definimos $\theta_{min} = \bar{\theta} \in [0,\, 1),$ tenemos que existe $\boldsymbol{d}$ dada en (15) tal que (13) se satisface. Además, para este vector, por (12), se satisface que

$$\begin{aligned} |x_i w_i + x_i(d_w)_i + w_i(d_x)_i| &= \left| x_i w_i + \left(\frac{1-\theta}{1-\bar{\theta}}\right)(x_i(\bar{d}_w)_i + w_i(\bar{d}_x)_i) \right| \\ &= \left| x_i w_i + \left(\frac{1-\theta}{1-\bar{\theta}}\right)(\mu_i - x_i w_i) \right| \\ &\leq |\mu_i| + \left(1 - \frac{1-\theta}{1-\bar{\theta}}\right) x_i w_i, \end{aligned}$$

por tanto, existe $\eta = 1 - \left(\frac{1-\theta}{1-\bar{\theta}}\right)$ tal que $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ satisface (14).

Finalmente, supongamos que

$$\|G(\boldsymbol{z}) + G'(\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{d}}\| = 0. \tag{16}$$

Luego, para $\overline{\boldsymbol{d}}$ se verifican (5) y (6), con lo cual $\mu_i = x_i w_i + x_i(\bar{d}_w)_i + w_i(\bar{d}_x)_i = 0.$ Además, de (15) y (16) $\bar{\theta} = 0,$ y con ello, $\eta = \theta.$ Así, para cualquier $\theta \in [0, 1),$ existe $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ tal que (13) se satisface y, además,

$$|x_i w_i + x_i(d_w)_i + w_i(d_x)_i| \leq \theta x_i w_i.$$ ☑

Observe que si $G'(\boldsymbol{z})$ es no singular entonces, tomando $\overline{\boldsymbol{d}} = -G'(\boldsymbol{z})^{-1}G(\boldsymbol{z}),$ podemos garantizar que (16) se cumpla y por tanto, que exista una dirección $\boldsymbol{d}$ que satisfaga (7) y (8) para cualquier $\theta \in [0, 1)$.

El siguiente teorema garantiza que la sucesión de imagenes de los puntos generados por el Algoritmo NIDP converge a cero.

Teorema 3.3. *Si* $\{\boldsymbol{z}_k\}$ *es una sucesión generada por el* Algoritmo NIDP*, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} G(\boldsymbol{z}_k) = 0. \tag{17}$$

Demostración. Sean $\boldsymbol{p}_k$ una dirección calculada mediante el paso 2 o el paso 4 y $\alpha_k \in (0,\, 1)$ el tamaño del paso calculado en las búsquedas lineales llevadas a cabo en los pasos 4.1, 4.2 o 5. Luego,

$$\|G(\boldsymbol{z}_{k+1})\| \leq (1 - \lambda\alpha_k)\|G(\boldsymbol{z}_k)\| \;\leq\; (1-\lambda^2)\|G(\boldsymbol{z}_k)\| \;\leq\; (1-\lambda^2)^{(k+1)}\|G(\boldsymbol{z}_0)\|,$$

dado que $\lambda \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, concluimos que $\|G(\boldsymbol{z}_k)\| \to 0$ siempre que $k \to \infty,$ con lo cual obtenemos el resultado deseado. ☑

La no singularidad de la matriz jacobiana de G en un punto de acumulación de una sucesión generada por el Algoritmo NIDP es suficiente para garantizar, no solo la convergencia de la sucesión a dicho punto, sino también que ese punto es una solución del sistema de ecuaciones no lineales (2). Esto lo garantiza el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *Si* $\{\boldsymbol{z}_k\}$ *es una sucesión generada por el* Algoritmo NIDP *y* $\boldsymbol{z}^*$ *es un punto de acumulación de la sucesión tal que* $G'(\boldsymbol{z}^*)$ *es no singular entonces*

$$G(\boldsymbol{z}^*) = 0 \qquad\qquad y \qquad\qquad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{z}^*. \tag{18}$$

Demostración. Por hipótesis, $\boldsymbol{z}^*$ es un punto de acumulación de $\{\boldsymbol{z}_k\}$. Entonces existe una subsucesión $\{\boldsymbol{z}_{k_j}\}$ tal que $\boldsymbol{z}_{k_j} \to \boldsymbol{z}^*$, cuando $j \to \infty$ y, por la continuidad de G,

$$G(\boldsymbol{z}_{k_j}) \to G(\boldsymbol{z}^*).$$

Además, el Teorema 3.3 garantiza que $G(\boldsymbol{z}_k) \to 0$, cuando $k \to \infty$, por lo tanto, $G(\boldsymbol{z}^*) = 0$.

Por otra parte, sean $K = \|G'(\boldsymbol{z}^*)^{-1}\|$ y δ un escalar positivo suficientemente pequeño[1] tales que, para todo $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{z}^*, \delta)$ se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) Existe la matriz $G'(\boldsymbol{y})^{-1}$;

2*i*) $\|G'(\boldsymbol{y})^{-1}\| < 2K$; y

3*i*) $\|G(\boldsymbol{y}) - G(\boldsymbol{z}^*) - G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*)\| \leq \dfrac{1}{2K}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*\|$.

Ahora, para $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{z}^*, \delta)$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \|G(\boldsymbol{y})\| &= \|G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*) + G(\boldsymbol{y}) - G(\boldsymbol{z}^*) - G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*)\| \\ &\geq \|G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*)\| - \|G(\boldsymbol{y}) - G(\boldsymbol{z}^*) - G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*)\| \\ &\geq \|G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*)\| - \frac{1}{2K}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*\|. \end{aligned} \tag{19}$$

Para acotar el primer término del lado derecho de (19), observemos que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*\| &= \|G'(\boldsymbol{z}^*)^{-1}G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*)\| \\ &\leq \|G'(\boldsymbol{z}^*)^{-1}\| \cdot \|G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*)\| \\ &= K\,\|G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*)\|, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\|G'(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*)\| \geq \frac{1}{K}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*\|, \tag{20}$$

de (19) y (20), $\|G(\boldsymbol{y})\| \geq \frac{1}{2K}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*\|$ equivalentemente

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^*\| \leq 2K\|G(\boldsymbol{y})\|, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{z}^*, \delta). \tag{21}$$

Sean $\epsilon_1 \in (0, \delta/8)$ y $\epsilon = \min\{\epsilon_1, c_{big}\}$. Como $\boldsymbol{z}^*$ es un punto de acumulación de $\{\boldsymbol{z}_k\}$ y $G(\boldsymbol{z}^*) = 0$, entonces existe un k suficientemente grande tal que

$$\boldsymbol{z}_k \in S_\epsilon = \{\boldsymbol{y} :\ \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{z}^*, \delta/2)\ \ y\ \ [2K(1+\theta)]\,\|G(\boldsymbol{y})\| < \epsilon\}.$$

[1] La existencia de δ está garantizada por los lemas 1.1 y 1.2 de [11].

Por $i)$ y el Teorema 3.2 tenemos que, para tal k y cualquier $\theta \in (0,1)$, existe una dirección $\boldsymbol{d}_k$ tal que (7) y (8) se satisfacen. Así,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{d}_k\| &= \left\| G'(\boldsymbol{z}_k)^{-1}[-G(\boldsymbol{z}_k) + G(\boldsymbol{z}_k) + G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{d}_k] \right\| \\ &\leq \|G'(\boldsymbol{z}_k)^{-1}\| \left[\|G(\boldsymbol{z}_k)\| + \|G(\boldsymbol{z}_k) + G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{d}_k\| \right] \\ &\leq 2K \left[\|G(\boldsymbol{z}_k)\| + \theta \|G(\boldsymbol{z}_k)\| \right] = 2K\,(1+\theta)\,\|G(\boldsymbol{z}_k)\| < \epsilon, \end{aligned} \tag{22}$$

dado que, $\epsilon < \delta/8$ entonces $\|\boldsymbol{d}_k\| < \delta/2$.

Ahora, si ${\alpha_k}^{\text{máx}} \leq c_{small}$ en el Paso 3 del algoritmo entonces $\boldsymbol{d}_k$ será proyectada, y por propiedades de la proyección,

$$\|\boldsymbol{p}_+\| = \|P_\Omega(\boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{d}_k) - \boldsymbol{z}_k\| = \|P_\Omega(\boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{d}_k) - P_\Omega(\boldsymbol{z}_k)\| \leq \|\boldsymbol{d}_k\|.$$

Así, en cualquiera de los casos en que sea calculada la dirección $\boldsymbol{p}_k$, se tiene que $\|\boldsymbol{p}_k\| \leq \delta/2$ con lo cual,

$$\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| = \|\boldsymbol{z}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{z}^*\| \leq \|\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z}^*\| + |\alpha_k|\|\boldsymbol{p}_k\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Luego, $\boldsymbol{z}_{k+1} \in B(\boldsymbol{z}^*, \delta)$. Por otra parte,

$$\|G(\boldsymbol{z}_{k+1})\| < \|G(\boldsymbol{z}_k)\| < \frac{\epsilon}{2K(1+\theta)}$$

y por (21)

$$\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| \leq 2K\|G(\boldsymbol{z}_{k+1})\|,$$

concluimos que

$$\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| < \frac{\epsilon}{1+\theta} < \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\delta}{8} < \frac{\delta}{2},$$

por lo tanto, $\boldsymbol{z}_{k+1} \in S_\epsilon$.

En resumen, para todo k mayor que un $\bar{k}$ suficientemente grande, se cumple que $\boldsymbol{z}_k \in S_\epsilon$ y como $\|G(\boldsymbol{z}_k)\| \to 0$, de (21), concluimos que $\boldsymbol{z}_k \to \boldsymbol{z}^*$, cuando $k \to \infty$. ☑

Una consecuencia del Teorema 3.4, es que la sucesión $\{\|\boldsymbol{p}_k\|\}$ está acotada. Esto se formaliza en el Corolario 3.5.

Corolario 3.5. *Si* $\{\boldsymbol{z}_k\}$ *es una sucesión generada por el* Algoritmo NIDP *y* $\boldsymbol{z}^*$ *es un punto de acumulación de la sucesión tal que* $G'(\boldsymbol{z}^*)$ *es no singular, entonces existen una constante* $\kappa > 0$ *y un* $\bar{k}$ *tal que para todo* $k \geq \bar{k}$, *se cumple que*

$$\|\boldsymbol{p}_k\| \leq \kappa\,\|G(\boldsymbol{z}_k)\|. \tag{23}$$

Demostración. Por el Teorema 3.4, $\boldsymbol{z}_k \to \boldsymbol{z}^*$ cuando $k \to \infty$, luego existe un $\bar{k}$ suficientemente grande tal que para todo $k \geq \bar{k}$, se tiene que $\boldsymbol{z}_k \in B(\boldsymbol{z}^*, \delta)$, donde δ es la constante positiva que garantiza las condiciones $i)$ a $3i)$ en la demostración anterior. Por $i)$, (22) y (23), para todo $k \geq \bar{k}$, se satisface la desigualdad

$$\|\boldsymbol{p}_-\| = \|\boldsymbol{p}_+\| \leq \|\boldsymbol{d}_k\| \leq 2K\,(1+\theta)\,\|G(\boldsymbol{z}_k)\| \leq 4K\,\|G(\boldsymbol{z}_k)\|.$$

Por lo tanto, para todo $k \geq \bar{k}$, existe $\kappa = 4K$ tal que

$$\|\boldsymbol{p}_k\| \leq \kappa\,\|G(\boldsymbol{z}_k)\|.$$ ☑

La constante κ del corolario anterior proporciona una cota inferior para la constante c_{big} de algoritmo propuesto, bajo la cual la dirección de *Newton* será aceptada. Así lo garantiza el siguiente corolario.

Corolario 3.6. *Bajo las hipótesis del corolario anterior, si, $c_{big} > 4K$ entonces existe $\bar{k}$ tal que para todo $k > \bar{k}$ la dirección de Newton inexacta, calculada en el* Paso 2 *del algoritmo será aceptada.*

En el siguiente teorema se garantiza que la sucesión $\{\alpha_k^{break}\}$, cuyos términos ayudan a obtener el tamaño de paso máximo, converge a uno.

Teorema 3.7. *Sea $\{\boldsymbol{z}_k\}$ una sucesión generada por el* Algoritmo NIDP. *Si $\boldsymbol{z}^* \in \Omega$ es un punto de acumulación de dicha sucesión, la matriz $G'(\boldsymbol{z}^*)$ es no singular, $c_{big} \geq 4K$ y $\theta_k \to 0$ entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k^{break} = 1.$$

Demostración. Por el Teorema 3.4, la sucesión $\{\boldsymbol{z}_k\}$ converge a $\boldsymbol{z}^*$ y por hipótesis, $c_{big} \geq 4K$, con lo cual el Corolario 3.6 garantiza que la dirección $\boldsymbol{d}_k$ calculada en (7) será aceptada en el paso 2 del algoritmo.

Ahora, como la matriz $G'(\boldsymbol{z}^*)$ es no singular entonces existe $\bar{k}$ tal que $G'(\boldsymbol{z}_k)$ es no singular para todo $k \geq \bar{k}$, lo que a su vez implica de acuerdo con (4) que x_i^k y w_i^k no se anulan simultáneamente. Sin pérdida de generalidad, supongamos $x_i^k > 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Por (8),

$$|x_i^k w_i^k + x_i^k (d_w^k)_i + w_i^k (d_x^k)_i| \leq \theta_k\, x_i^k w_i^k, \tag{24}$$

luego,

$$x_i^k (d_w^k)_i + w_i^k (d_x^k)_i \leq 0, \tag{25}$$

dado que, $x_i^k > 0$ y $w_i^k \geq 0$ entonces $(d_x^k)_i$ y $(d_w^k)_i$ no pueden ser simultáneamente no negativos. En particular, no es posible que $(d_x^k)_i = 0$ y $(d_w^k)_i > 0$ o viceversa. Por tal razón, consideramos los siguientes casos:

Caso 1: $(d_x^k)_i = (d_w^k)_i = 0$.

Caso 2: $(d_x^k)_i < 0$ y $(d_w^k)_i \geq 0$.

Caso 3: $(d_x^k)_i < 0$ y $(d_w^k)_i < 0$.

Caso 4: $(d_x^k)_i \geq 0$ y $(d_w^k)_i < 0$.

Si el Caso 1 ocurre para todos los índices i, entonces la iteración actual es solución del problema. Por lo tanto, supondremos que los casos 2, 3 o 4 ocurren por lo menos para algún índice i. Por (9) inferimos que α_k^{break} debe ser tal que

$$x_i^k + {\alpha_k}^{break}\,(d_x^k)_i \geq 0 \qquad \text{y} \qquad w_i^k + {\alpha_k}^{break}\,(d_w^k)_i \geq 0. \tag{26}$$

Luego,

- Si i es un índice para el cual el Caso 1 ocurre, entonces (26) será satisfecho por cualquier ${\alpha_k}^{break} \geq 0$.

- Si i es un índice para el cual el Caso 2 ocurre, entonces (26) será satisfecho siempre que
$$\alpha_k{}^{break} \leq -\frac{x_i^k}{(d_x^k)_i}. \tag{27}$$

- Si i es un índice para el cual el Caso 3 ocurre, entonces (26) será satisfecho siempre que
$$\alpha_k{}^{break} \leq \min\left\{-\frac{x_i^k}{(d_x^k)_i}, -\frac{w_i^k}{(d_w^k)_i}\right\}. \tag{28}$$

- Finalmente, si i es un índice para el cual el Caso 4 ocurre, entonces (26) será satisfecho si
$$\alpha_k{}^{break} \leq -\frac{w_i^k}{(d_w^k)_i}. \tag{29}$$

Como $\alpha_k{}^{break}$ debe satisfacer (27), (28) y (29) simultáneamente, entonces

$$\alpha_k{}^{break} = \min_{i\in I,\, j\in J,\, l\in L}\left\{-\frac{x_i^k}{(d_x^k)_i}, \min\left\{-\frac{x_j^k}{(d_x^k)_j}, -\frac{w_j^k}{(d_w^k)j}\right\}, -\frac{w_l^k}{(d_w^k)_l}\right\},$$

donde I, J y L denotan los conjuntos de índices para los cuales, ocurren los casos 2, 3 y 4, respectivamente.

Observe que en los casos 3 y 4 $w_i^k \neq 0$, en caso contrario (24) implica que $(d_w^k)_i = 0$, lo cual no es posible. Por otra parte, como la matriz $G'(\boldsymbol{z}^*)$ es no singular entonces, por el Teorema 3.4, $G(\boldsymbol{z}^*) = 0$. Luego, por las condiciones de complementariedad y no negatividad, $x_i^* = 0$ o $w_i^* = 0$. Además, por la no singularidad de $G'(\boldsymbol{z}^*)$ y de acuerdo con su estructura, deducimos que x_i^* y w_i^* no se pueden anular simultáneamente. Nuevamente, sin pérdida de generalidad, supongamos $x_i^* = 0$.

Dado que $w_i^k \to w_i^* \neq 0$ y por el Corolario 3.5 existe una constante $\kappa > 0$ tal que $\|\boldsymbol{d}_k\| \leq \kappa\|G(\boldsymbol{z}^k)\|$ entonces
$$\lim_{k\to\infty} -\frac{w_i^k}{(d_w^k)_i} = \infty. \tag{30}$$

Así, para k suficientemente grande, podemos asumir que

$$\alpha_k^{break} = \min_{i\in I\cup J}\left\{-\frac{x_i^k}{(d_x^k)_i}\right\}.$$

Ahora, por (8) concluimos que

$$\left|x_i^k + (d_x^k)_i\right| w_i^k - \left|x_i^k(d_w^k)_i\right| \leq \left|(x_i^k + (d_x^k)_i)w_i^k + x_i^k(d_w^k)_i\right| \leq \theta_k x_i^k w_i^k.$$

Luego,
$$\left|x_i^k + (d_x^k)_i\right| \leq x_i^k\left(\frac{\theta_k w_i^k + \left|(d_w^k)_i\right|}{w_i^k}\right). \tag{31}$$

Nuevamente, por el Corolario 3.5, para k suficientemente grande existe una constante κ tal que $\|\boldsymbol{d}^k\| \leq \kappa\|G(\boldsymbol{z}^k)\,|$, luego $\left|(d_w^k)_i\right| \leq \kappa\|G(\boldsymbol{z}^k)\|$ y como $G(\boldsymbol{z}^k) \to 0$, podemos concluir que $\left|(d_w^k)_i\right| \to 0$. Por otro lado, para los casos 3 y 4, tenemos que $w_i^k \to w^* \neq 0$ y dado que $\theta_k \to 0$ entonces

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\theta_k w_i^k + \left|(d_w^k)_i\right|}{w_i^k} \right) = 0.$$

Luego, de (31) deducimos que $x_i^k + (d_x^k)_i = o(x_i^k)$. En consecuencia,

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{x_i^k}{(d_x^k)_i} = 1,$$

lo cual completa la prueba del teorema. ☑

Dos consecuencias del Teorema 3.7 son los dos corolarios siguientes. El primero garantiza que la dirección de *Newton* inexacta generada por el Algoritmo NIDP será aceptada como dirección de descenso; el segundo, que la sucesión $\{\alpha_k^{\text{máx}}\}$ de tamaños máximos del paso, converge a uno.

Corolario 3.8. *Sea* $\{\boldsymbol{z}_k\}$ *una sucesión generada por el* Algoritmo NIDP. *Si* $\boldsymbol{z}^*$ *es un punto de acumulación de la sucesión tal que* $G'(\boldsymbol{z}^*)$ *es no singular,* $c_{big} > 2K$ *y* $\theta_k \to 0$ *entonces existe un* $\overline{k}$ *tal que para todo* $k \geq \overline{k}$ *la dirección de Newton inexacta calculada en el* Paso 2 *del algoritmo será aceptada como dirección de descenso.*

Corolario 3.9. *Sea* $\{\boldsymbol{z}_k\}$ *una sucesión generada por el* Algoritmo NIDP. *Si* $\boldsymbol{z}^* \in \Omega$ *es un punto de acumulación de dicha sucesión,* $G'(\boldsymbol{z}^*)$ *es no singular,* $c_{big} \geq 4K$, $\theta_k \longrightarrow 0$ *y* $\tau_k \to 1$, $k \to \infty$ *entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k^{\text{máx}} = 1.$$

El siguiente teorema garantiza la convergencia superlineal de la sucesión generada por el algoritmo propuesto.

Teorema 3.10. *Suponga la hipótesis* H2 *y sea* $\{\boldsymbol{z}_k\}$ *una sucesión generada por el* Algoritmo NIDP. *Si* $\boldsymbol{z}^* \in \Omega$ *es un punto de acumulación de dicha sucesión,* $G'(\boldsymbol{z}^*)$ *es no singular,* $c_{big} \geq 4K$, $\tau_k \to 1$, *y* $\theta_k \to 0$ *entonces, para* k *suficientemente grande* $\alpha_k = \alpha_k^{\text{máx}}$ *y además,* $\{\boldsymbol{z}_k\}$ *converge superlinealmente a* $\boldsymbol{z}^*$.

Demostración. Por el Corolario 3.8, $\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{d}_k$ para todo k suficientemente grande. Ahora,

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{z}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k) &= G(\boldsymbol{z}_k) + \int_0^1 G'(\boldsymbol{z}_k + t\alpha_k \boldsymbol{p}_k)\alpha_k \boldsymbol{p}_k dt \\ &= (1-\alpha_k)G(\boldsymbol{z}_k) + \alpha_k(G(\boldsymbol{z}_k) + G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{p}_k) \\ &\qquad + \int_0^1 [G'(\boldsymbol{z}_k + t\alpha_k \boldsymbol{p}_k) - G'(\boldsymbol{z}_k)]\alpha_k \boldsymbol{p}_k dt. \end{aligned}$$

Por tanto, y dado que $\alpha_k \in (0,1)$, $\|\boldsymbol{p}_k\| \leq \kappa \|G(\boldsymbol{z}_k)\|$ y la hipótesis H2,

$$
\begin{aligned}
\|G(\boldsymbol{z}_k+\alpha_k\boldsymbol{p}_k)\| &\leq (1-\alpha_k)\|G(\boldsymbol{z}_k)\|+\alpha_k\|G(\boldsymbol{z}_k)+G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{p}_k\|+\\
&\qquad \int_0^1 \|G'(\boldsymbol{z}_k+t\alpha_k\boldsymbol{p}_k)-G'(\boldsymbol{z}_k)\|\|\alpha_k\boldsymbol{p}_k\|dt\\
&\leq (1-\alpha_k)\|G(\boldsymbol{z}_k)\|+\alpha_k\theta_k\|G(\boldsymbol{z}_k)\|+\frac{\gamma}{2}\,\alpha_k^2\,\|\boldsymbol{p}_k\|^2\\
&\leq \left[1-\alpha_k+\theta_k+\frac{\gamma}{2}\kappa^2\|G(\boldsymbol{z}_k)\|\right]\|G(\boldsymbol{z}_k)\|,
\end{aligned}
$$

pero $G(\boldsymbol{z}_k)\to 0$ entonces, en particular, $(\gamma/2)\kappa^2\|G(\boldsymbol{z}_k)\|\leq 1/6$, para k suficientemente grande. Luego, $\|G(\boldsymbol{z}_k+\alpha_k\boldsymbol{p}_k)\|\leq[7/6-\alpha_k+\theta_k]\,\|G(\boldsymbol{z}_k)\|$. Observemos que

$$
7/6-\alpha_k+\theta_k\leq 1-\lambda\alpha_k \tag{32}
$$

siempre que $(1-\lambda)\alpha_k\geq 1/6+\theta_k$, dado que $\lambda\in(0,\,2/3)$ entonces para garantizar que (32) se cumpla, es suficiente que

$$
\alpha_k\geq\frac{1}{6(1-\lambda)}+\frac{\theta_k}{1-\lambda}. \tag{33}
$$

Ahora, por el Corolario 3.9, sabemos que ${\alpha_k}^{\text{máx}}\to 1$ y como por hipótesis $\theta_k\to 0$ entonces, para k suficientemente grande, ${\alpha_k}^{\text{máx}}$ satisface (33) y por tanto, (32) de tal manera que

$$
\|G(\boldsymbol{z}_k+{\alpha_k}^{\text{máx}}\boldsymbol{p}_k)\| \quad\leq\quad (1-\lambda{\alpha_k}^{\text{máx}})\|G(\boldsymbol{z}_k)\|.
$$

Luego, ${\alpha_k}^{\text{máx}}$ satisface la condición (10) en el Paso 5 del algoritmo en consecuencia, $\alpha_k={\alpha_k}^{\text{máx}}$, para k suficientemente grande.

Por otro lado, dado que $G'(\boldsymbol{z}^*)$ es no singular entonces $G'(\boldsymbol{z}_k)$ es no singular y además, $\|G'(\boldsymbol{z}_k)^{-1}\|\leq 2\|G'(\boldsymbol{z}^*)^{-1}\|=2K$, para k suficientemente grande, de donde

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{z}_{k+1}-\boldsymbol{z}^*\| &= \left\|\boldsymbol{z}_k+{\alpha_k}^{\text{máx}}\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{z}^*+G'(\boldsymbol{z}_k)^{-1}G(\boldsymbol{z}_k)-G'(\boldsymbol{z}_k)^{-1}G(\boldsymbol{z}_k)\right\|\\
&\leq \left\|\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}^*-G'(\boldsymbol{z}_k)^{-1}G(\boldsymbol{z}_k)\right\|+\\
&\qquad \left\|G'(\boldsymbol{z}_k)^{-1}[G(\boldsymbol{z}_k)+G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{p}_k]\right\|+|{\alpha_k}^{\text{máx}}-1|\|\boldsymbol{p}_k\|\\
&\leq \left\|G'(\boldsymbol{z}_k)^{-1}\right\|\|G'(\boldsymbol{z}_k)(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}^*)+G(\boldsymbol{z}^*)-G(\boldsymbol{z}_k)\|+ \qquad (34)\\
&\qquad \left\|G'(\boldsymbol{z}_k)^{-1}\right\|\left[\left\|G(\boldsymbol{z}_k)+G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{p}_k\right\|\right]+(1-{\alpha_k}^{\text{máx}})\kappa\|G(\boldsymbol{z}_k)\|\\
&\leq \gamma K\|\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}^*\|^2+2K\theta_k\|G(\boldsymbol{z}_k)\|+(1-{\alpha_k}^{\text{máx}})\kappa\|G(\boldsymbol{z}_k)\|\\
&\leq \gamma K\|\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}^*\|^2+\left[2K\,\theta_k+\kappa\,(1-{\alpha_k}^{\text{máx}})\right]\|G(\boldsymbol{z}_k)\|. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Por el Teorema del Valor Medio, sabemos que existe ξ_k en el segmento que une a $\boldsymbol{z}_k$ con $\boldsymbol{z}^*$ tal que $\|G(\boldsymbol{z}_k)\|=\|G(\boldsymbol{z}_k)-G(\boldsymbol{z}^*)\|\leq\|G'(\xi_k)\|\|\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}^*\|$, pero como $\boldsymbol{z}_k\to\boldsymbol{z}^*$ y G' es continua, podemos asegurar que existe una constante $R>0$ tal que, para k suficientemente grande, $\|G'(\xi_k)\|\leq R$. Así,

$$
\|G(\boldsymbol{z}_k)\|\leq R\|\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}^*\|. \tag{36}
$$

Por (34) y (36),

$$\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| \quad \leq \quad \Big[\gamma K \|\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z}^*\| + 2\,K\,R\,\theta_k + (1 - {\alpha_k}^{\text{máx}})\,R\,\kappa\Big] \|\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z}^*\|$$

con lo cual, garantizamos la convergencia superlineal de la sucesión ya que, $\boldsymbol{z}_k \to \boldsymbol{z}^*$, $\theta_k \to 0$ y ${\alpha_k}^{\text{máx}} \to 1$. ☑

Finalmente, el siguiente teorema garantiza la convergencia cuadrática de la sucesión generada por el algoritmo propuesto.

Teorema 3.11. *Suponga la hipótesis* H2 *y sea* $\{\boldsymbol{z}_k\}$ *una sucesión generada por el* Algoritmo NIDP*. Si* $\boldsymbol{z}^* \in \Omega$ *es un punto de acumulación de dicha sucesión,* $G'(\boldsymbol{z}^*)$ *es no singular,* $c_{big} \geq 4K$, *y además suponga que existen constantes* c_1 *y* c_2 *tales que*

$$\theta_k \;\leq\; c_1 \|G(\boldsymbol{z}_k)\| \qquad y \qquad 1 - \tau_k \;\leq\; c_2 \|G(\boldsymbol{z}_k)\|$$

entonces la sucesión $\{\boldsymbol{z}_k\}$ *converge cuadráticamente a* $\boldsymbol{z}^*$*.*

Demostración. Por el teorema anterior, $\alpha_k = {\alpha_k}^{\text{máx}}$ para todo k suficientemente grande. Además, existe una constante $\kappa > 0$ tal que $\|\boldsymbol{p}_k\| \;\leq\; \kappa\,\|G(\boldsymbol{z}_k)\|$, y por (11), tenemos que

$$\begin{aligned}
\|G(\boldsymbol{z}_k + {\alpha_k}^{\text{máx}}\boldsymbol{p}_k)\| \quad &\leq \quad \|G(\boldsymbol{z}_k + {\alpha_k}^{\text{máx}}\boldsymbol{p}_k) - G(\boldsymbol{z}_k) - {\alpha_k}^{\text{máx}} G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{p}_k\| \\
&\qquad\qquad + \|G(\boldsymbol{z}_k) + {\alpha_k}^{\text{máx}} G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{p}_k\| \\
&\leq \quad \frac{\gamma}{2}({\alpha_k}^{\text{máx}})^2 \|\boldsymbol{p}_k\|^2 + \|G(\boldsymbol{z}_k) + G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{p}_k\| \\
&\qquad\qquad + \|{\alpha_k}^{\text{máx}} G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{p}_k - G'(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{p}_k\| \\
&\leq \quad \frac{\gamma}{2}\kappa^2 \|G(\boldsymbol{z}_k)\|^2 + \theta_k \|G(\boldsymbol{z}_k)\| + (1 - {\alpha_k}^{\text{máx}})\|G'(\boldsymbol{z}_k)\|\|\boldsymbol{p}_k\| \\
&\leq \quad \Big[\frac{\gamma}{2}\kappa^2 \|G(\boldsymbol{z}_k)\| + \theta_k + (1 - {\alpha_k}^{\text{máx}})\|G'(\boldsymbol{z}_k)\|\kappa\Big]\, \|G(\boldsymbol{z}_k)\|. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Dado que G es continuamente diferenciable y $\boldsymbol{z}_k \to \boldsymbol{z}^*$ entonces existe una constante $M > 0$ tal que $\|G'(\boldsymbol{z}_k)\| \leq M$, para todo k suficientemente grande. De igual forma, como $G(\boldsymbol{z}_k) \to 0$, ${\alpha_k}^{\text{máx}} \to 1$ y $\theta_k = O\left(\|G'(\boldsymbol{z}_k)\|\right)$ entonces, para todo k suficientemente grande, se cumple que

$$\|G(\boldsymbol{z}_k)\| \leq \frac{1}{3\gamma\kappa^2}, \qquad \theta_k \leq \frac{1}{6}, \qquad {\alpha_k}^{\text{máx}} \geq 1 - \frac{1}{6M\kappa}. \tag{38}$$

Usando (38) en (37), se obtiene la siguiente desigualdad,

$$\|G(\boldsymbol{z}_{k+1})\| \leq \frac{1}{2}\|G(z_k)\|. \tag{39}$$

Por otro lado, sumando y restando algunos términos, usando la desigualdad triangular, el Paso 6 del Algoritmo propuesto, el hecho de que ${\alpha_k}^{\text{máx}} < 1$ y la desigualdad (23), tenemos que

$$\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\boldsymbol{z}_j - \boldsymbol{z}_{j+1}\| \;\leq\; \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^{\text{máx}}\,\|\boldsymbol{p}_j\| \;\leq\; \kappa \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G(\boldsymbol{z}_j)\|.$$

Luego, de (39),

$$\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| \leq \kappa \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \|G(\boldsymbol{z}_{k+1})\|.$$

Por lo tanto,

$$\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| \leq 2\,\kappa\,\|G(\boldsymbol{z}_{k+1})\|. \tag{40}$$

Así, de (37), (40) y dado que, $\|G'(\boldsymbol{z}_k)\| \leq M$, tenemos que

$$\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| \leq 2\,\kappa\,\left(\frac{\gamma}{2}\kappa^2\|G(\boldsymbol{z}_k)\| + \theta_k + (1-{\alpha_k}^{\text{máx}})M\kappa\right)\|G(\boldsymbol{z}_k)\|. \tag{41}$$

Finalmente, si $c = \text{máx}\{c_1, c_2\}$, entonces por hipótesis

$$\text{máx}\{\theta_k, 1-{\alpha_k}^{\text{máx}}\} \leq \text{máx}\{\theta_k, 1-\tau_k\} \leq c\|G(z_k)\|. \tag{42}$$

Usando (42) en (41), $\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| \leq 2\kappa\,\left((\gamma/2)\,\kappa^2 + c + cM\kappa\right)\|G(\boldsymbol{z}_k)\|^2$.

Por (36), tenemos que

$$\|\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{z}^*\| \;\leq\; 2\,R^2\,\kappa\left(\frac{\gamma}{2}\kappa^2 + c + cM\kappa\right)\|\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z}^*\|^2,$$

por lo tanto, la sucesión $\{\boldsymbol{z}_k\}$ converge cuadráticamente a $\boldsymbol{z}^*$. ☑

4. Experimentación numérica

En esta sección analizamos numéricamente el desempeño del Algoritmo NIDP. Para ello, usamos un computador con procesador Intel(R) Core(TM) i7, RAM de 16 GB y el *software* MATLAB para escribir los códigos de los algoritmos y funciones de prueba.

Usamos el criterio de parada $\|G(\boldsymbol{z})\| \leq \varepsilon = 10^{-6}$ y los siguientes valores para los parámetros del algoritmo, $c_{big} = 10^4$, $c_{small} = 10^{-4}$ $\beta = 0.5$ $\lambda = 10^{-4}$ $\tau_k = \tau = 0.9995$, y $N = 200$. Además, usamos *gradientes conjugados cuadrados* (cgs), para calcular la dirección tipo *Newton inexacta* en el Paso 2 del algoritmo.

Consideramos tres problemas de complementariedad horizontal, dos de los cuales corresponden al caso particular de complementariedad no lineal. Con el fin de comparar los resultados obtenidos al resolver estos problemas con el Algoritmo NIDP, resolvemos los mismos problemas, con la versión exacta de este algoritmo (la dirección de descenso del Paso 2, se obtiene de forma exacta) que llamaremos Algoritmo NE, con el Algoritmo PGIN de [6] y con el Algoritmo CNIDP propuesto en [7].

Las tablas en las que reportamos los resultados contienen la siguiente información: tipo de algoritmo usado para la resolver el problema (*Método*), tamaño del problema (n), número de iteraciones realizadas por los algoritmos hasta encontrar una solución o converger a un punto estacionario (k), tiempo en segundos requerido por los métodos en caso de convergencia (t), número de iteraciones en las que se usó una dirección proyectada ($Proy.$), número de iteraciones internas que realizó el método inexacto ($It.In.$), punto inicial ($\boldsymbol{z}_0$), divergencia ($--$) y cociente de los errores entre dos iteraciones sucesivas $RelRes = \|\boldsymbol{z}^{k+1} - \boldsymbol{z}^*\|/\|\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^*\|$.

4.1. Problema 1

El primer problema, es de complementariedad no lineal, y está asociado a la función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por [20]

$$F_i(\boldsymbol{x}) = -x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} + \frac{1}{3}x_i^3 + 1, \qquad i = 1, \ldots n \tag{43}$$

con, $x_0 = x_{n+1} = 0$. Este problema es equivalente al de complementariedad horizontal, $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = 0,\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{w} = 0,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \geq 0$, con $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}$.

El Cuadro 1 contiene los resultados obtenidos al resolver este problema variando su tamaño y tomando como punto inicial un vector de unos del tamaño apropiado.

Método	n	k	*It. In.*	*Proy.*	*t (s)*
NIDP	100	7	99	2	0.0167
NE	100	5	*	0	0.0061
PGIN	100	103	27	33	0.0731
CNIDP	100	15	105	6	0.1094
NIDP	1000	7	108	3	0.1338
NE	1000	6	*	0	0.2684
PGIN	1000	97	46	33	6.8157
CNIDP	1000	18	178	8	1.3594
NIDP	10000	13	79	6	24.2878
NE	10000	6	*	0	181.4688
PGIN	10000	−−	−−	−−	−−
CNIDP	10000	18	291	4	112.3750
NIDP	20000	13	106	5	107.2500
NE	20000	6	*	0	1657.3000
PGIN	20000	−−	−−	−−	−−
CNIDP	20000	23	349	4	801.5313

Cuadro 1: resultados para el *Problema 1* .

En general, el número de iteraciones del Algoritmo NIDP es mayor que el requerido por el Algoritmo NE, no obstante el tiempo de ejecución del primero es mucho menor que el del segundo, como es de esperarse. Resaltamos que el Algoritmo NE no requirió proyectar ninguna dirección, sin embargo, aunque el Algoritmo NIDP proyectó en todos los ensayos algunas de las direcciones, su eficiencia en términos de tiempo es indiscutible. En este mismo sentido, se puede observar que aunque el Algoritmo CNIDP es un algoritmo cuasi Newton, este fue menos eficiente en términos de tiempo, que el Algoritmo NIDP, lo cual sugiere un mejor rendimiento de la búsqueda lineal propuesta para el Algoritmo NIDP.

Por otro lado, con el fin de analizar el carácter global del Algoritmo NIDP, consideramos vectores iniciales múltiplos del vector de unos, y generamos 500 vectores iniciales aleatorios. El Cuadro 2 contiene los resultados obtenidos en el primer caso. Vale la pena mencionar que en todos estos experimentos el tamaño del problema fue $n = 1000$.

Método	$\boldsymbol{z}_0$	k	*It. In.*	*Proy.*	*t (s)*
NIDP	$0.1 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	8	170	3	0.2787
NE	$0.1 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	15	*	1	0.7631
PGIN	$0.1 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	111	1362	23	3.7304
CNIDP	$0.1 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	11	11	8	1.2012
NIDP	$10 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	8	45	4	0.1741
NE	$10 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	7	*	1	2.8806
PGIN	$10 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	–	–	–	–
CNIDP	$10 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	19	62	7	0.7813
NIDP	$100 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	10	123	3	0.3678
NE	$100 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	7	*	0	1.7353
PGIN	$100 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	–	–	–	–
CNIDP	$100 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	102	315	21	4.3594
NIDP	$500 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	12	138	3	0.4294
NE	$500 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	11	*	3	1.3113
PGIN	$500 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	–	–	–	–
CNIDP	$500 * (1, 1, \ldots, 1)^T$	–	–	–	–

Cuadro 2: Problema 1, variando $\boldsymbol{z}_0$ con $n = 1000$.

Los resultamos de el Cuadro 2 muestran la robustez del Algoritmo NIDP frente a los otros dos métodos.

Al resolver el *Problema 1*, con el Algoritmo NIDP y 500 puntos iniciales aleatorios, cuyas componentes se encuentran en el intervalo $[0,\ 20]$, observamos que el método convergió en todos los experimentos con un promedio de 20.26 iteraciones y 0.3330 segundos. Entre tanto, el Algoritmo NE convergió en un promedio de 17.7 iteraciones y 1.1716 segundos. Estos resultados nuevamente, nos permiten resaltar la robustez del Algoritmo NIDP y su eficiencia en términos de tiempo del mismo.

Para finalizar los experimentos llevados a cabo con el *Problema 1*, presentamos en el Cuadro 3, el comportamiento detallado del Algoritmo NIDP para el problema de tamaño 1000 y $\boldsymbol{z}_0 = (1, \ldots, 1)^T$.

k	α_k^{break}	$\alpha_k^{\text{máx}}$	α_k	θ	*RelRes*
1	1	0.9995	0.9995	0.50	0.9965
2	0.6529	0.6525	0.6525	0.33	0.9712
3	0.8531	0.8526	0.8526	0.25	0.9621
4	0.9119	0.9115	0.9115	0.20	0.7502
5	0.9927	0.9922	0.9922	0.17	0.4113
6	0.9998	0.9993	0.9993	0.14	0.2112
7	0.9999	0.9994	0.9994	0.12	0.0145

Cuadro 3: parámetros del Algoritmo NIDP para el *Problema 1*.

Como podemos observar, este experimento evidencia los resultados demostrados en la teoría de convergencia, en particular que el cociente *RelRes*, converge a cero, a medida que θ tiende a cero, lo que muestra en la práctica convergencia superlineal del algoritmo.

4.2. Problema 2

Este problema corresponde al de complementariedad no lineal (equivalentemente a uno de complementariedad horizontal) asociado a $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$F_i(\boldsymbol{x}) = x_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_i \right) - n, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{44}$$

Método	n	k	*It. In.*	*Proy.*	*t (s)*
NIDP	1000	11	12	0	0.2813
NE	1000	9	*	0	0.6250
PGIN	1000	10	31	1	0.2969
CNIDP	1000	18	25	4	0.2952
NIDP	10000	9	11	0	8.5469
NE	10000	7	*	0	207.9844
PGIN	10000	11	49	1	22.0313
CNIDP	10000	15	32	0	11.6875
NIDP	20000	9	11	0	26.7344
NE	20000	7	*	0	1692.3000
PGIN	20000	11	58	1	95.7344
CNIDP	20000	15	35	0	31.4513

Cuadro 4: algoritmos NIDP, NE y PGIN para el *Problema 2*.

El Cuadro 4 contiene los resultados obtenidos al resolver el *Problema 2*, con los Algoritmos NIDP, NE, PGIN y CNIDP a partir de $\boldsymbol{z}_0 = (25, \ldots, 25)^T$. La segunda columna ($n$), indica el tamaño del problema. Como era de esperarse, debido a que la matriz jacobiana involucrada en este problema es densa, los métodos inexactos fueron más eficientes, en términos de tiempo, que su contraparte exacta. En particular, cuando el tamaño del problema fue considerablemente grande. Además, en la mayoría de experimentos, el Algoritmo NIDP fue más rápido y requirió de menos iteraciones que sus homólogos, el PGIN y el CNIDP.

Para analizar la robustez del Algoritmo NIDP, realizamos 1000 experimentos generando aleatoriamente puntos iniciales, con componentes en el intervalo $[1,\ 50]$. El porcentaje de éxito fue del $100\,\%$ al resolver el respectivo problema de tamaño 1000. El algoritmo realizó en promedio 10 iteraciones y requirió aproximadamente de 0.5 segundos para resolver el problema en cada uno de los experimentos.

El Cuadro 5, en sus columnas 2 a 6, contiene el valor de los parámetros del Algoritmo NIDP en cada una de las 11 iteraciones (columna 1) que demoró para resolver el *Problema 2*, con $n = 1000$ y $\boldsymbol{z}_0 = (25, 25, \ldots, 25)^T$. Observamos muy buen desempeño, ya que en todas las iteraciones se dieron pasos completos. En la columna 6, se aprecia que el cociente *RelRes*, converge a cero, a medida que θ tiende a cero (columna 5), lo cual evidencia la convergencia superlineal método, como se demostró en el Teorema 3.10.

k	α_k^{break}	$\alpha_k^{\text{máx}}$	α_k	θ	*RelRes*
3	1	0.9995	0.9995	0.1111	0.9805
4	1	0.9995	0.9995	0.0625	0.9979
5	1	0.9995	0.9995	0.0400	0.9949
6	1	0.9995	0.9995	0.0278	0.1424
7	1	0.9995	0.9995	0.0204	0.0176
8	1	0.9995	0.9995	0.0156	0.0021
9	1	0.9995	0.9995	0.0123	0.0015
10	1	0.9995	0.9995	0.0100	0.0007
11	1	0.9995	0.9995	0.0083	0.0005

Cuadro 5: parámetros del Algoritmo NIDP con el *Problema 2*.

4.3. Problema 3

Consideramos el problema de complementariedad horizontal, definido por

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{x} - B\boldsymbol{w} + \boldsymbol{q} + \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}), \tag{45}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ y $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un término no lineal. Estos problemas surgen de la discretización de una ecuación diferencial como la siguiente

$$\Delta x(\xi, \eta) + \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \mu x(\xi, \eta) + \nu w(\xi, \eta) = q(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \eta),$$

con algunas condiciones de frontera y de complementariedad [25]. En la experimentación numérica usamos los parámetros establecidos en [25], $A = \widehat{A} + \mu I_n$ y $B = \widehat{B} + \nu I_n$, con μ y ν constantes positivas, $\widehat{A}$ tridiagonal por bloques, cuyas diagonales superior e inferior contienen, en cada uno de sus bloques la matriz $-I_m$, con $m^2 = n$, y cuya diagonal principal contiene en cada bloque la matriz $S = tridiag(-1, 4, -1)$, de orden m. De igual forma, $\widehat{B} = I_m \otimes S$ donde $\otimes$ denota el producto de *Kronecker*.

	Método	k	*It. In.*	*Proy.*	*t (s)*
φ_0	NIDP	12	110	4	2.3750
	NE	6	*	0	1.7500
	PGIN	22	279	7	5.3281
	CNIDP	27	563	25	9.0938
φ_1	NIDP	65	430	21	21.4375
	NE	29	*	15	6.0156
	PGIN	–	–	–	–
	CNIDP	33	539	31	10.0781
φ_2	NIDP	33	388	12	6.7031
	NE	20	*	0	3.8594
	PGIN	33	456	8	8.2031
	CNIDP	43	815	41	14.2500
φ_3	NIDP	16	126	5	3.4375
	NE	9	*	0	1.5625
	PGIN	34	502	7	8.3125
	CNIDP	28	431	26	8.2969

Cuadro 6: $n = 625$

Consideramos tres términos no lineales, también propuestos en [25] que dieron lugar a tres problemas. Estas tres funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, se definen por, $\varphi_{1,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = x_i^2$, $\varphi_{2,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = w_i^2$, $\varphi_{3,i}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{w}) = x_i w_i$. Además, consideramos el caso $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = \varphi_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = 0$ que da lugar al reconocido problema de complementariedad horizontal lineal.

	Método	k	*It. In.*	*Proy.*	*t (s)*
	NIDP	13	133	3	25.3594
φ_0	NE	7	*	0	26.3750
	PGIN	138	183	39	442.9000
	CNIDP	34	864	32	129.1563
	NIDP	39	210	5	69.9214
φ_1	NE	39	*	10	161.7500
	PGIN	–	–	–	–
	CNIDP	35	574	32	112.3594
	NIDP	34	347	20	71.4688
φ_2	NE	27	*	12	111.0313
	PGIN	128	1725	36	439.8000
	CNIDP	58	1401	56	259.7000
	NIDP	18	140	7	33.8281
φ_3	NE	9	*	0	35.1719
	PGIN	73	1012	21	232.3000
	CNIDP	39	844	37	138.6563

Cuadro 7: $n = 2500$

	Método	k	*It. In.*	*Proy.*	*t (s)*
	NIDP	9	73	3	78.2969
φ_0	NE	7	*	0	231.6406
	PGIN	8	116	1	87.5781
	CNIDP	28	596	26	95.1452
	NIDP	42	464	20	437.2031
φ_2	NE	27	*	15	1066.6000
	PGIN	48	647	11	724.2344
	CNIDP	–	–	–	–
	NIDP	13	93	4	116.0625
φ_3	NE	9	*	0	323.8906
	PGIN	–	–	–	–
	CNIDP	31	514	19	251.5000

Cuadro 8: $n = 5625$

En los cuadro 6, 7 y 8 presentamos los resultados obtenidos para el *Problema 3*, con los Algoritmos PIDP, NE, PGIN y CNIDP para cada una de las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, variando el tamaño de los problemas. En el Cuadro 8, no aparece la fila para φ_1 porque los métodos no convergen en este caso.

Observemos que los métodos inexactos tomaron ventaja frente al exacto para n grande ($n = 5625$). Los Algoritmos NIDP y NE fueron consistentes ya que convergieron a la solución del problema en todos los ensayos, sin embargo la diferencia a favor, en tiempo, para el algoritmo NIDP, fue bastante clara para todos los problemas de tamaño 2500 y 5625. Es importante observar que el Algoritmo NIDP realizó muy pocas iteraciones internas para resolver el sistema (7), en contraste con el gran tamaño del problema.

Para finalizar y con el objetivo de probar nuevamente la robustez del Algoritmo NIDP realizamos 500 ensayos, con cada uno de los cuatro problemas de tamaño 2500 originados por los términos no lineales φ_i. En el Cuadro 9 registramos el porcentaje de éxitos en cada caso (Éxito), iteraciones promedio ($\overline{k}$) y el tiempo promedio ($\overline{t(s)}$) para resolver cada uno de los problemas. Los puntos iniciales en cada ensayo fueron generados aleatoriamente de tal forma que sus componentes pertenezcan al intervalo $[1,\ 50]$.

	Éxito	$\overline{k}$	$\overline{t(s)}$
φ_0	100 %	46.75	40.1638
φ_1	100 %	101.20	92.175
φ_2	100 %	100	161.9252
φ_3	100 %	98.97	54.3039

Cuadro 9: Robustez del Algoritmo NIDP.

El hecho que el algoritmo haya convergido en el 100 % de los experimentos habla muy bien de su robustez y aunque la cantidad de iteraciones promedio fue relativamente alta cuando se tomaron las funciones φ_1, φ_2 y φ_3, creemos que el tiempo de ejecución fue bastante aceptable teniendo en cuenta el tamaño del problema a resolver.

5. Comentarios finales

En este trabajo proponemos un algoritmo tipo *Newton inexacto* global para resolver el problema de complementariedad horizontal. Su principal novedad es la alternativa de usar la proyección de la dirección inexacta de *Newton* cuando esta no sea de descenso. Además, el algoritmo usa una búsqueda lineal libre de derivadas que asegura un descenso de la función de mérito relacionada a cada problema.

Demostramos que el algoritmo propuesto tiene buenas propiedades de convergencia bajo hipótesis razonables. Presentamos resultados numéricos que contrastan los resultados teóricos presentados en el Capítulo 3 y vislumbran la ventaja de usar métodos inexactos, especialmente para problemas de gran tamaño.

Agradecimientos. Agradecemos a la Universidad del Cauca por el tiempo concedido para esta investigación, mediante el Proyecto de investigación, del grupo de Optimización, VRI ID 5044.

Referencias

[1] Andreani R., Júdice J.J., Martínez J.M. and Martini T., "Feasibility problems with complementarity constraints", *European J. Oper. Res.*, 249 (2015), No. 1, 41-54. doi: 10.1016/j.ejor.2015.09.030.

[2] Andreani R., Birgin E.G., Martínez J.M. and Schuverdt M.L., "Augmented Lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualification", *Math. Program.*, 111 (2008), No. 1, 5-32. doi: 10.1007/s10107-006-0077-1.

[3] Andreani R., Friedlander A. and Martínez J.M., "On the solution of infinitedimensional variational inequalities using smooth optimization with simple bounds", *J. Optim. Theory Appl.*, 94 (1997), No. 3, 635-657. doi: 10.1023/A:1022601017090.

[4] Andreani R., Júudice J.J., Martínez J.M. and Patricio J., "Projected-gradient interior-point algorithm for complementarity problems", *Numer. Algorithms.*, 57 (2011), No. 4, 457-485. doi: 10.1007/s11075-010-9439-0.

[5] Anitescu M., Tseng P. and Wright S.J., "Elastic-mode algorithms for mathematical programs with equilibrium constraints: global convergence and stationarity properties", *Math. Program.*, 110 (2007), No. 2, 337-371. doi: 10.1007/s10107-006-0005-4.

[6] Arias C.A. and Martínez J.M., "Fast convergence of an inexact interior-point method for horizontal complementarity problems", *Numer. Algorithms.*, 79 (2018), 1187–1210. doi: 10.1007/s11075-018-0480-8.

[7] Arias C.A., "Un algoritmo cuasi Newton inexacto para el problema de complementariedad no lineal", Tesis (Ph.D.), Universidad del Valle, 2018, 89 p.

[8] Bai Z.Z. and Dong J.L., "A modified damped Newton method for linear complementarity problems", *Numer Algorithms.*, 42 (2006), No. 3-4, 207-228. doi: 10.1007/s11075-006-9028-4.

[9] Billups S. and Murty K., "Complementarity problems", *J. Comput. Appl. Math.*, 124 (2000), No. 1-2, 303-318. doi: 10.1016/S0377-0427(00)00432-5.

[10] Cottle R., Pang J. and Stone R., *The linear complementarity problem*, SIAM classics in applied Mathematics, 1st ed., Philadelphia, 2009. 9–761.

[11] Eisenstat S.C. and Walker H.F., "Globally convergent inexact newton methods", *SIAM J. Optim.*, 4 (1994), No. 2, 393-422. doi: 10.1137/0804022.

[12] Facchinei F., Fischer A. and Kanzow C., "A semismooth Newton method for variational inequalities: The case of box constraints", Complementarity and Variational Problems: State of the Art., 92 (1997), 76-90.

[13] Facchinei F. and Kanzow C.A., "Nonsmooth inexact Newton method for the solution of large-scale nonlinear complementarity problems", *Math. Program.*, 76 (1997), No. 3, 493-512. doi: 10.1007/BF02614395.

[14] Ferris M.C. and Pang J., "Engineering and economic applications of complementarity problems", *SIAM Rev.*, 39 (1997), No. 4, 669-713. doi: 10.1137/S0036144595285963.

[15] Ferris M. and Kanzow., "Complementarity and related problems: a survey", *Math. Program. Technical Report.*, (1998), 98-17.

[16] Friedlander A., Martínez J. M. and Santos S.A., "Solution of linear complementarity problems using minimization with simple bounds", *J. Global Optim.*, 6 (1995), No. 3, 253-267. doi: 10.1007/BF01099464.

[17] Gabriel S.A. and Pang J.S., "An inexact NE/SQP method for solving the nonlinear complementarity problem", *Comput. Optim. Appl.*, 1 (1992), No. 1, 67-91. doi: 10.1007/BF00247654.

[18] Ge Z., Ni Q. and Zhang X., "A smoothing inexact Newton method for variational inequalities with nonlinear constraints", *J. Inequal. Appl.*, 160 (2017), 2-12. doi: 10.1186/s13660-017-1433-9.

[19] Guo L., Lin G.H., Zhang D. and Zhu D., "An mpec reformulation of an epec model for electricity markets", *Oper. Res. Lett.*, 43 (2015), No. 3, 262-267. doi: 10.1016/j.orl.2015.03.001.

[20] Haddou M. and Maheux P., "Smoothing methods for nonlinear complementarity problems", *J. Optim. Theory Appl.*, 160 (2014), No. 3, 711-729. doi: 10.1007/s10957-013-0398-1.

[21] Harker P. T. and . Pang J.S., "Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications", *Math. Program.*, 48 (1990), No. 1, 161-220. doi: 10.1007/BF01582255.

[22] Harker P.T. and Xiao B., "Newton's method for the nonlinear complementarity problem: A B-differentiable equation approach", *Math. Program.*, 48 (1990), No. 1, 339-357. doi: 10.1007/BF01582262.

[23] Han J. and Sun D., "Newton-type Methods for Variational Inequalities", in Advances in Nonlinear Programming (ed.Yuan.), Appl. Optim (1998), 105–118.

[24] Marini L., Morini B. and Porcelli M., "Quasi-newton methods for convex constrained nonlinear systems and their application", *Available on http://www.optimization-online.org*, (2017).

[25] Mezzadri F. and Galligani E., "Modulus-based matrix splittingmethods for a class of horizontal nonlinear complementarity problems," *Numer. Algorithms.*, 87 (2021), No. 2, 667-687. doi: 10.1007/s11075-020-00983-w.

[26] Morini B., Porcelli M. and Toint L., "Approximate norm descent methods for constrained nonlinear systems", *Math. Comp.*, 87 (2018), No. 311, 1327-1351. doi: 10.1090/mcom/3251.

[27] Outrata J.V. and Zowe J., "A Newton method for a class of quasi-variational inequalities", *Comput. Optim. Appl.*, 4 (1995), No. 1, 5-21. doi: 10.1007/BF01299156.

[28] Pang J.S., "Partially b-regular optimization and equilibrium problems", *Math. Oper. Res.*, 32 (2007), No. 3, 687-699. doi: 10.1287/moor.1070.0262.

[29] Pang J.S., "Inexact Newton methods for the nonlinear complementarity problem", *Math. Program.*, 36 (1986), No. 1, 54-71. doi: 10.1007/BF02591989.

[30] Qi H.D. and Liao L., "A smoothing Newton method for extended vertical linear complementarity problems", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21 (1999), No. 1, 45-66. doi: 10.1137/S0895479897329837.

[31] Qi L. and Sun D., "A Survey of Some Nonsmooth Equations and Smoothing Newton Methods", in Progress in Optimization (ed. Yang, Mess, Fisher and Jennings.), Springer (1999), 121–146.

[32] Ralph D., "Mathematical programs with complementarity constraints in traffic and telecommunications networks", *Philos. Trans. Roy. Soc. A.*, 366 (2007), No. 1872, 1973-1987. doi: 10.1098/rsta.2008.0026.

[33] Yu Z., Liu Y. and Gan X., "Nonmonotone Inexact Newton Method for the Extended Linear Complementarity Problem", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 38 (2017), No. 11, 1458-1472. doi: 10.1080/01630563.2017.1338731.