 https://doi.org/10.24844/EM3402.11

Esquemas de resolución de problemas de Fermi como herramienta de diseño y gestión para el profesor

Fermi problem activity templates as a design and management tool for the teacher

Lluís Albarracín[1], Jonas B. Ärlebäck[2]

Resumen: Se presenta una caracterización de las resoluciones posibles a un problema de Fermi a partir de los Esquemas de Resolución de Problemas de Fermi (ERPF). El artículo presenta la fundamentación teórica basada en investigaciones previas sobre problemas de Fermi en Educación Matemática y otros campos de investigación que permite identificar las cuatro actividades principales que pueden utilizarse al resolverlos. Estas actividades son la estimación razonada, la experimentación, la búsqueda de datos de fuentes fiables y la recogida y tratamiento estadístico de datos. A partir de estas actividades se concretan los ERPF y se discuten sus posibilidades como herramientas para la gestión y el diseño de actividades de aula. Se incluyen ejemplos concretos de propuestas de aula para sustentar tanto el trabajo de los alumnos como las opciones de diseño de actividades y gestión que habilitan los ERPF para fomentar la resolución de problemas y la modelización matemática.

Palabras clave: *Problemas de Fermi, modelización matemática, diseño de tareas*

Fecha de recepción: 27 de febrero de 2021. **Fecha de aceptación**: 6 de marzo de 2022.
[1] Universitat Autònoma de Barcelona, lluis.albarracin@uab.cat, orcid.org/0000-0002-1387-5573
[2] Linköping Universitet, jonas.bergman.arleback@liu.se, orcid.org/0000-0001-5013-8890

Abstract: This article presents a characterization of the possible resolutions to a Fermi problem from the Fermi problem Activity Templates (FpAT). The article presents the theoretical foundation based on previous research on Fermi problems in Mathematics Education and other fields of research that allows the identification of the four main activities that can be used when solving them. These activities are reasoned estimation, experimentation, searching for data from reliable sources, and statistical data collection and processing. From these activities, the FpAT are specified and their possibilities as tools for the management and design of classroom activities are discussed. Specific examples of classroom proposals are included to support both the work of students and the activity design and management options enabled by the FpAT to promote problem solving and mathematical modelling.

Keywords: *Fermi problems, mathematical modeling, task design*

INTRODUCCIÓN

Los problemas de Fermi deben su nombre a Enrico Fermi (1901-1954), físico italiano ganador del Premio Nobel, que utilizó este tipo de problemas en su trabajo científico y como profesor universitario. Sriraman y Knott (2009) describen los problemas de Fermi como problemas de estimación utilizados con el propósito didáctico de identificar las condiciones iniciales del problema y hacer conjeturas fundamentadas sobre las diversas cantidades o variables que surgen dentro de un problema. Aunque provienen de la enseñanza de la Física, estos problemas han ganado interés en las últimas décadas y se han utilizado en otras materias y disciplinas, incluyendo la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo de problema de Fermi sería estimar la cantidad de coches que se acumulan en un atasco en la autopista (Peter-Koop, 2009) o el incremento de combustible fósil consumido en un país cada año por el hecho de usar vehículos de gran tamaño en lugar de pequeños utilitarios (Carlson, 1997). Se pueden encontrar más ejemplos de estos problemas, como estimar el número de latidos que da el corazón de una persona en toda su vida, y algunas motivaciones para su introducción en las aulas en García-Navarro (2013). Caracterizados como preguntas abiertas, los problemas de Fermi ofrecen poca o ninguna información específica que guíe el proceso de resolución de problemas

(Efthimiou y Llewellyn, 2007), más bien enfatizan la necesidad de pensar cuidadosamente y analizar la situación problemática en cuestión.

Diversos autores han señalado conexiones entre los problemas de Fermi y la modelización matemática (Ärlebäck, 2009; Ärlebäck y Albarracín, 2019: Czocher, 2016; Ferrando y Albarracín, 2021; Haberzettl *et al.*, 2018; Peter-Koop, 2009; Sriraman y Lesh, 2006), centrándose en el proceso de descomposición del problema original en subproblemas más sencillos que se resuelven por separado usando estimaciones razonadas. Esta forma de trabajar se conoce en la literatura como el método de Fermi (*Fermi estimates method*) y la investigación sugiere que, a partir de la instrucción directa, este método puede ser enseñado con éxito a los estudiantes para que lo usen adecuadamente para resolver un amplio rango de problemas de Fermi (Barahmeh *et al.*, 2017; Raviv *et al.*, 2016). Aunque la investigación sobre estos problemas de Fermi generalmente enfatiza la estimación, se ha sugerido que la actividad de estimación puede ser reemplazada por otras actividades en el aula para lograr la información numérica necesaria para resolverlos (Sriraman y Knott, 2009).

De esta forma, constatamos que existe suficiente evidencia empírica sobre la potencialidad de los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización matemática en las aulas de educación primaria y secundaria. Sin embargo, su implantación en el ámbito de la enseñanza nunca ha llegado a consolidarse como práctica educativa generalizada.

En este artículo recogemos los resultados de investigación educativa sobre problemas de Fermi relacionados con la modelización matemática, identificamos y describimos las actividades matemáticas que sustentan la resolución de un problema de Fermi y, finalmente, presentamos una propuesta didáctica basada en el uso de los Esquemas de Resolución de problemas de Fermi (ERPF) como una herramienta didáctica para diseñar y gestionar las actividades de modelización matemática. El objetivo principal de esta propuesta es proporcionar herramientas específicas que promuevan el uso de este tipo de problemas en las aulas de matemáticas.

UN MARCO GENERAL PARA LOS PROBLEMAS DE LOS FERMI: MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Existen diversas formas de entender la modelización matemática (Abasian *et al.*, 2020; Kaiser y Sriraman, 2006), pero un principio común es entenderla como un proceso de resolución de problemas que vincula el mundo real y las matemáticas. El uso de los problemas de Fermi como actividades de modelización matemática ha sido investigado desde diversas de estas perspectivas, con lo que desde cada una de ellas se añaden elementos para determinar su potencialidad. La modelización conlleva un proceso de matematización de situaciones del mundo real y la elaboración de modelos matemáticos para describir los fenómenos estudiados, a menudo conceptualizados como resultado de haber participado en un proceso cíclico conocido como el ciclo de modelización (Blum, 2015). En un problema de Fermi, desarrollar un método de resolución puede equipararse a generar un modelo que describa la situación estudiada (Robinson, 2008). Lesh y Harel (2003) definen los modelos matemáticos como sistemas conceptuales que describen a otros sistemas, como pueden ser fenómenos naturales (el ciclo del agua o el funcionamiento interno de un volcán) o estructuras propias de la actividad humana (el sistema sanitario o el mercado de valores). Estos autores señalan que los modelos se componen de dos componentes principales. Por una parte, contienen un conjunto de conceptos para describir o explicar los objetos matemáticos relevantes para el fenómeno estudiado. Este conjunto de conceptos se complementa con los procedimientos utilizados para crear construcciones, manipulaciones o predicciones. La definición de modelo matemático de Lesh y Harel (2003) sustenta diversas investigaciones en las que se presentan herramientas para caracterizar modelos matemáticos (Gallart *et al.*, 2017; Montejo-Gámez *et al.*, 2021) que han sido usadas para estudiar los productos desarrollados por los alumnos al resolver problemas de Fermi.

En los últimos años en el campo de la investigación de la educación matemática se han estudiado los problemas de Fermi con el objetivo de identificar los procesos de modelización desarrollados por los estudiantes en los diferentes niveles educativos. Peter-Koop (2009) utilizó los problemas de Fermi con alumnos de educación primaria (de 10 a 12 años) para analizar sus estrategias de solución. Descubrió que los alumnos de esta edad resolvían los problemas utilizando un amplio abanico de estrategias, desarrollando nuevos conocimientos matemáticos. También observó que los procesos de resolución eran de naturaleza multicíclica y se podían relacionar con el ciclo de modelización (Blum, 2015; Stillman, 2011). Por su parte, Albarracín y Gorgorió (2019) corroboraron que los alumnos de educación primaria pueden resolver problemas de Fermi utilizando un gran número de estrategias distintas. Algunas de estas estrategias son la reducción del problema original a un problema más pequeño y usar proporciones para obtener el resultado final, el uso de una unidad base o de medidas de concentración, como la densidad de población.

Trabajando con estudiantes de educación secundaria, Albarracín y Gorgorió (2014) analizaron las estrategias propuestas por los estudiantes para resolver varios problemas de Fermi, y observaron un gran número de estrategias que conllevan la creación y desarrollo de un modelo matemático para obtener sus respuestas. En un contexto similar, Ferrando *et al*. (2017) compararon los modelos generados por alumnos de Secundaria con diferente nivel de experiencia previa en modelización y observaron que los estudiantes con mayor experiencia previa desarrollan modelos conceptualmente más detallados y en mayor medida utilizaron enfoques más algebraicos (en contraste con los enfoques aritméticos) que los estudiantes que carecen de experiencia en modelización. En este mismo nivel educativo, la investigación también ha demostrado que las secuencias de problemas de Fermi pueden facilitar a los estudiantes el desarrollo de sus propios modelos y apoyarlos en la adopción progresiva de estrategias conceptualmente más ricas, en las que los alumnos adaptan el modelo matemático desarrollado inicialmente a nuevas situaciones a partir de incorporar nuevos conceptos (Albarracín y Gorgorió, 2018), y que las relaciones sociales entre los estudiantes al trabajar en grupo y el conocimiento extra matemático de los estudiantes son importantes en la situación de resolución de problemas (Ärlebäck, 2009).

Por último, Czocher (2016) utilizó los problemas de Fermi para analizar el razonamiento matemático de estudiantes universitarios de ingeniería. La investigación de Czocher muestra que los procesos de modelización necesarios para resolver un problema de Fermi son complejos incluso para los estudiantes universitarios y requieren que los estudiantes regulen cuidadosamente sus procesos de modelización (en el sentido de Schoenfeld, 1992) supervisando cómo se relacionan sus objetivos o subobjetivos inmediatos con el planteamiento del problema.

Las investigaciones desarrolladas en el ámbito de la Educación Matemática son consistentes con las de otras áreas de conocimiento. Robinson (2008), desde la *Enseñanza de la física*, argumenta que para resolver un problema de Fermi los estudiantes tienen que sintetizar un modelo físico, examinar los principios físicos que están en funcionamiento, determinar otras restricciones tales como las condiciones de los límites, decidir cuán simple puede ser el modelo sin dejar de mantener algo de realismo, y solo entonces aplicar algunas estimaciones aproximadas para resolver el problema. Robinson señala que este tipo de trabajo es exactamente el conjunto de habilidades que los físicos profesionales necesitan desarrollar durante su formación, y que se ha mostrado que esta habilidad a menudo no se desarrolla completamente hasta algún momento durante estudios de postgrado posteriores.

ACTIVIDADES MATEMÁTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE FERMI

Diversos estudios han utilizado el llamado marco teórico de los diagramas de actividad de modelización (MAD por su denominación en inglés, *modelling activity diagrams*) para analizar las actividades en las que los estudiantes participan al resolver un problema de Fermi (Albarracín, Ärlebäck, *et al.*, 2019; Ärlebäck, 2009; Czocher, 2016). Este marco caracteriza el proceso de resolución de un problema de Fermi en las siguientes actividades de modelización: lectura del enunciado, creación de modelos, estimación, cálculo, validación y redacción del informe (Ärlebäck, 2009). En este marco, la actividad de estimación es el aspecto originalmente clave para resolver un problema de Fermi, pero a continuación proponemos que esta actividad pueda ser substituida para incorporar otras formas de que los estudiantes obtengan la información numérica necesaria para responder al problema de Fermi planteado o a los subproblemas relacionados.

Nuestra revisión de la literatura sobre los problemas de Fermi nos ha permitido identificar cuatro tipos de actividades matemáticas que se utilizan para lograr los valores numéricos necesarios de las cantidades para poder proporcionar una solución y una respuesta al problema en cuestión. Estas cuatro actividades son la estimación (que es la propuesta inicial para la resolución de problemas de Fermi), la experimentación (en la que la medida tiene un papel importante), la búsqueda de datos en fuentes externas y la recogida estadística de datos. Estas actividades matemáticas forman parte de los currículos escolares, tanto en educación primaria como secundaria, y pueden ser utilizadas en contextos relevantes y significativos al trabajar en este tipo de problemas. A continuación, presentamos ejemplos de estas cuatro actividades y discutimos cómo estas se alinean con el proceso de resolución de problemas de Fermi.

Estimación. Es un proceso mental que da una solución aproximada a un problema de conteo o medición (Siegel *et al.*, 1982). Existen diferentes tipos de estimación, ya sea computacional, de medidas o la numerosidad, que se diferencian por el conjunto de habilidades necesarias para llegar al valor estimado (Hogan y Brezinski, 2003). En el contexto de la resolución de problemas de Fermi, predomina la estimación de medidas, pero añadiendo información que proviene del conocimiento del mundo real, como cuando se determina la población de un país o el presupuesto total de Educación. A este tipo de estimación se la denomina en la literatura *Guesstimation*, que es un término difícil de traducir literalmente pero que se basa en el uso de estimaciones razonadas (Carlson, 1997).

Shakerin (2006), trabajando en un entorno STEM, argumenta que parte de la práctica de un ingeniero es utilizar la estimación para determinar respuestas a problemas mal definidos o cuando no se requieren soluciones detalladas. Para Sriraman y Knott (2009), la estimación es una actividad matemática que permite conectar conocimientos matemáticos con el mundo real y ha sido subestimada en las aulas, posiblemente porque se aleja de la visión de precisión que se acostumbra a dar a las matemáticas, pero que justamente habilita trabajar en la línea de lo desconocido y evidenciar la necesidad de aprender y trabajar nuevos conocimientos matemáticos.

Un ejemplo concreto del uso de la estimación en la resolución de problemas de Fermi es el siguiente: Para el problema *¿cuántas ambulancias son necesarias en tu región para cubrir cualquier emergencia en 10 minutos?* puede ser necesario considerar la distancia que puede recorrer una ambulancia en 10 minutos. Contando que el personal de urgencias necesite un minuto para ponerse en marcha después del aviso, se puede considerar razonable una velocidad media estimada de 100 km/h para zonas no urbanas. De esta forma, estimamos que en los 9 minutos de viaje se pueden recorrer alrededor de 15 km.

Experimentación. El desarrollo de habilidades en el laboratorio o durante la experimentación física fue una de las motivaciones originales de Enrico Fermi para utilizar su método basado en romper un problema en problemas más pequeños y resolverlos usando estimaciones. Fermi lo utilizó en su propia investigación y decidió incorporarlo a sus clases. Un caso bien documentado explica cómo cuando Fermi fue testigo de la detonación de la prueba Trinity en el desierto de Alamogordo en Nuevo México, en el momento de la explosión esparció unos pequeños trozos de papel antes y durante el paso de la onda expansiva. A partir de determinar la distancia recorrida por los pedazos de papel, estimó la potencia de la explosión en unas 10.000 toneladas de TNT, que resultó ser un resultado del mismo orden de magnitud que el conseguido tras los cálculos basados en los datos proporcionados por los sensores colocados en la zona de la explosión (Allison *et al*., 1955). En la educación matemática, se pueden hacer experiencias prácticas para obtener los valores necesarios para las cantidades consideradas relevantes para resolver un problema dado. En muchos casos, esta experimentación puede llevarse a cabo fuera del aula y vincularse a procesos de recuento o medición.

Un ejemplo de esta forma de trabajar se da en la secuencia de problemas de Fermi presentada en Albarracín y Gorgorió (2018). Los diferentes problemas tratan sobre estimaciones de objetos distribuidos en el plano (personas, árboles...), pero la primera actividad es la estimación del número de personas que caben en el patio del instituto en una celebración. De esta forma, los alumnos pueden dirigirse al patio para determinar los elementos relevantes para la resolución del problema y hacer las mediciones que consideren oportunas. Entre los experimentos que desarrollan los alumnos están los que se centran en estimar la cantidad de personas que caben en un metro cuadrado en diferentes circunstancias (cuando se apiñan para aprovechar al máximo el espacio, cuando dejan la distancia suficiente entre ellos para bailar en la celebración, etc.)

Buscando datos. En muchos casos, algunas de las cantidades que deben determinarse para resolver adecuadamente un problema de Fermi pueden encontrarse consultando registros y fuentes externas (García-Navarro, 2013). Este sería el caso de la población de un país, donde los encargados de la resolución pueden acceder a recursos como Wikipedia o el Instituto Nacional de Estadística. Sin embargo, en otros casos, la identificación de fuentes fiables puede no ser tan fácil, ya que pueden contener errores o sesgos inducidos por razones desconocidas. En este caso, el trabajo con los problemas de Fermi puede funcionar como una herramienta de evaluación crítica de la información para repudiar o validar las fuentes públicas y los datos publicados.

En Biología, Phillips y Milo (2009) iniciaron el proyecto www.bionumbers.org que recoge valores experimentalmente fiables y validados de cantidades relevantes para la investigación. A partir de la información validada en la base de datos, proponen el uso de la aproximación cuantitativa basada en el método de estimaciones Fermi para aquellas investigaciones en las que los métodos cualitativos habituales en su área de investigación son limitados. Phillips y Milo (2009) ilustran cómo el método de Fermi permite resolver problemas científicos del más alto nivel.

Recolección de datos estadísticos. Sriraman y Knott (2009) sugieren el uso de los problemas de Fermi que involucran estimaciones del consumo de agua, consumo de gasolina, desperdicio de alimentos o la cantidad de basura producida tienen el potencial de concienciar a los alumnos sobre problemas ecológicos y ambientales, así como de provocar una postura crítica hacia las decisiones gubernamentales y corporativas. Una manera de obtener valores confiables para cantidades relevantes en tales preguntas es hacer estimaciones y verificaciones subsiguientes con datos oficiales, pero también es posible participar en la recolección de datos y en el análisis estadístico en el aula. En este último caso, los estudiantes pueden, por ejemplo, crear encuestas y decidir sobre muestras apropiadas para explorar e investigar diversos problemas relacionados con cuestiones sociales.

Un ejemplo de este enfoque es el de Blomberg (2015), que estudió el aprendizaje de conceptos estadísticos de los estudiantes de secundaria superior en una secuencia diseñada de lecciones que trabajan en la pregunta "¿Qué proporción de jóvenes caminan al menos 10.000 pasos al día? Los estudiantes abordaron esta cuestión en primer lugar como un problema de Fermi, desarrollando hipótesis que probaron mediante la recopilación de datos utilizando podómetros y realizando análisis estadísticos.

Otro ejemplo del uso de la recolección de datos estadísticos es una encuesta que pregunta cuántas fotos sube una persona a las redes sociales en una semana. Si se recoge esta información para personas estratificadas por grupos de edad, puede ser la base para estimar el número total de fotografías que deben gestionar cada semana los servidores que sustentan las diferentes redes sociales.

Esquemas de resolución de problemas de Fermi

En esta sección presentamos una forma de caracterizar las diferentes resoluciones de los problemas de Fermi en términos de los Esquemas de resolución de problemas de Fermi (ERPF) que ya presentamos teóricamente en Albarracín y Ärlebäck (2019). En estos esquemas se representan los sub-problemas elegidos para resolver el problema, el tipo de actividad matemática que se desarrolla para determinar las cantidades necesarias y las operaciones a desarrollar para obtener el resultado final.

Los ERPF se centran en la estructura de la resolución del problema de Fermi, que puede referirse a (a) el resultado de un análisis a priori del problema de Fermi dividido en los subproblemas que deben ser resueltos; o (b) una estructura que describe las actividades desarrolladas por los estudiantes para resolver un problema de Fermi. Sin embargo, es importante destacar que cada problema de Fermi puede ser resuelto usando diferentes enfoques (Albarracín y Gorgorió, 2014), dependiendo del conocimiento extra-matemático disponible para los estudiantes en cada nivel educativo (Ärlebäck, 2009) con lo que los ERPF no caracterizan al problema en sí mismo, sino a una forma concreta de resolverlo.

Parte de nuestra inspiración para definir los ERPF proviene del intento de Anderson y Sherman (2010) de establecer un enfoque sistemático para resolver los problemas de Fermi con el fin de facilitar el desarrollo de habilidades analíticas en los estudiantes universitarios de Economía y Empresa. Anderson y

Sherman (2010) propusieron una representación que estructura el proceso de resolución diferenciando explícitamente los subproblemas en los que los estudiantes deben involucrarse para resolver el problema basándose en un análisis a priori del problema. El ejemplo que discuten en gran detalle es el de estimar el número de bocadillos consumidos en los partidos de la Major League Baseball (MLB) cada temporada en los Estados Unidos. Al diferenciar entre los valores que hay que estimar (como el número de bocadillos consumidos por asistente y partido) de los valores inalterables que se pueden consultar (como el número de partidos en una temporada), Anderson y Sherman (2010) presentaron el desglose del problema tal y como se representa en la figura 1. Cada uno de los cuadrados representa un sub-problema concreto para el que debe obtenerse una estimación. El esquema también presenta las operaciones necesarias para resolver el problema.

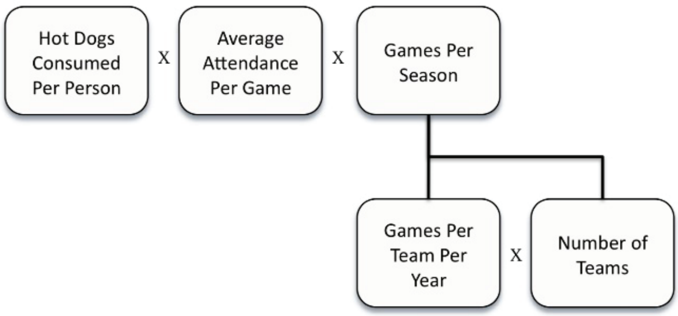

Figura 1. Propuesta de resolución para el problema de la estimación de bocadillos vendidos en la MLB presentado en Anderson y Sherman (2010, p. 37)

Aquí, uno puede considerar la posibilidad de utilizar diversas aproximaciones para lograr los valores numéricos necesarios en la resolución de los diferentes subproblemas. Por ejemplo, en lugar de utilizar una forma estándar de estimación, se puede utilizar el sitio web de la MLB para consultar el número de partidos que cada equipo juega al año. Para encontrar el número de espectadores promedio en un partido se puede recurrir a los informes de los periódicos especializados. En el caso de no encontrar en las búsquedas el número de bocadillos consumidos por persona y partido, se puede plantear una encuesta que genere datos suficientes para determinar una estimación razonable. La decisión y la razón para usar una actividad en lugar de otra puede depender de la precisión requerida en el problema, o ser una elección consciente hecha por el profesor para trabajar ciertos contenidos o procesos matemáticos. Para visualizar explícitamente la estructura del problema y los diferentes tipos de actividades matemáticas que se pueden utilizar para resolverlo, nuestra caracterización de los ERPF utiliza diferentes representaciones gráficas de las cuatro (sub)actividades identificadas en la literatura (estimación, experimentación, búsqueda de datos, recopilación de datos estadísticos) como se ilustra en la tabla 1.

Tabla 1. Caracterización de las actividades presentes en los ERPF.

Actividad/representación	Los estudiantes obtienen la cantidad a partir de....
Estimación	...un proceso mental que da una solución aproximada a través de adivinanzas basadas en experiencias previas.
Experi-mentación	...experimentos e investigaciones dentro y fuera de la escuela, incluyendo la realización de mediciones.
Búsqueda de datos	.... búsqueda de información numérica en fuentes externas.
Recolección de datos	...formas adecuadas de seleccionar, recopilar y analizar datos estadísticos.

La figura 2 muestra la caracterización ERPF aplicada a la estructura del problema de Fermi discutido por Anderson y Sherman (2010) presentado en la figura 1, ilustrando que se usará una encuesta estadística para encontrar el número promedio de bocadillos consumidos por persona en un partido, que el número de personas que asisten a un partido se determinará usando una estimación, y que el resto de los valores numéricos necesarios se buscarán en las fuentes apropiadas.

Figura 2. Estructura del problema de Anderson y Sherman (2010) usando ERPF

Un ejemplo de uso de los ERPF en la gestión de aula

En esta sección tratamos de mostrar diferentes formas en las que los ERPF pueden ser usados en el aula. Tomaremos como ejemplo uno de los problemas estudiados en Ärlebäck (2009), en concreto el que pide a los alumnos que estimen el tiempo necesario para subir el Empire State Building de Nueva York, que es un edificio de 102 plantas y 381 metros de altura en su parte habitable. Si se considera necesario, este problema puede adaptarse a estudiar otros grandes edificios locales u otros todavía más altos, como el Burj Khalifa de Dubái (828 metros y 163 plantas) o la torre Shanghái en Shanghái (632 metros y 128 plantas).

En el estudio de Ärlebäck (2009) se plantean dos preguntas distintas a alumnos de educación secundaria (14 años). La primera se refiere al tiempo que tardará el ascensor en subir desde la primera hasta la última planta. La segunda trata sobre el tiempo necesario para subir a pie por las escaleras. Es necesario apuntar que en el enunciado no se proporciona ninguna información numérica y que, por el formato de trabajo en el aula, los alumnos solo usan estimaciones razonadas como actividad para resolver el problema. Retomaremos el uso de distintas actividades en la siguiente sección.

La figura 3 muestra la estructura de solución de un grupo (grupo A) de alumnos para las dos preguntas expresadas en términos de ERPF. En primer lugar, observamos que el grupo A estructura los dos problemas de forma similar, dividiéndolos en los mismos tres subproblemas, que son los siguientes: el número de plantas del edificio, la altura de cada una de ellas y la velocidad del ascensor o las personas al desplazarse. Para resolver el problema, solo plantean estimaciones razonadas, ya que no se permite a los alumnos consultar fuentes externas o experimentar de alguna forma.

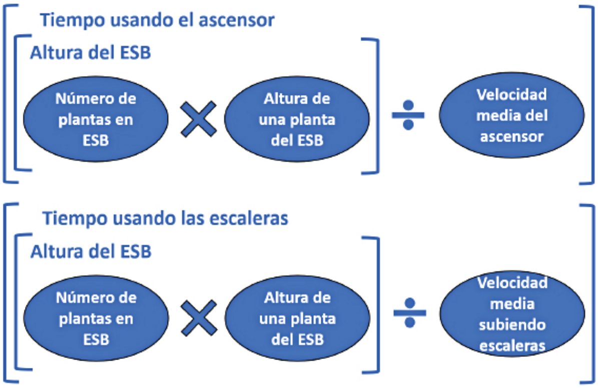

Figura 3. ERPFs para estimar el tiempo necesario para subir al ESB en ascensor (arriba) y por las escaleras (abajo) - grupo A

La figura 4 muestra el ERPF de otro grupo de trabajo (grupo B). Estos alumnos resuelven el primer problema (tiempo estimado para el ascensor) de la misma forma que el grupo A, pero difieren en su estrategia para estimar el tiempo que necesitará una persona para subir por las escaleras. La propuesta del grupo B para esta segunda tarea se basa en estimar el tiempo necesario para subir diferentes tramos de plantas. Este hecho pone de manifiesto que los alumnos crean una distinción entre los dos problemas e introducen como elemento a considerar el cansancio acumulado debido a la actividad física. Esta propuesta de clasificar los elementos a estudiar se puede aplicar a otros tipos de problemas, como aquellos que se centran en aspectos sociales (uso de redes sociales) en los que diferentes grupos de edad tienen distintos comportamientos.

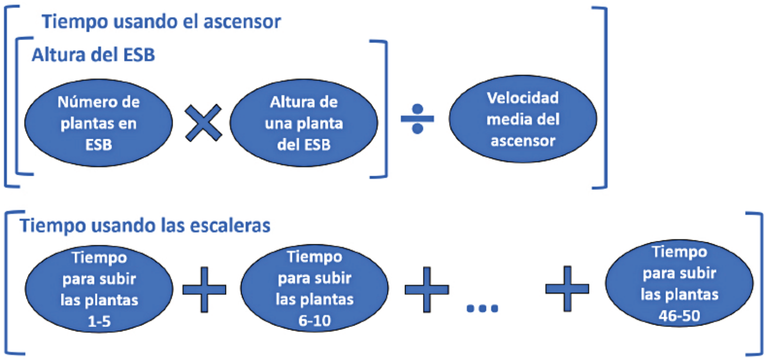

Figura 4. ERPFs para estimar el tiempo necesario para subir al ESB en ascensor (arriba) y por las escaleras (abajo) - grupo A

Estas dos representaciones de las resoluciones de los alumnos (figuras 3 y 4) ilustran que los ERPF facilitan una representación directa y compacta de las ideas y métodos de los alumnos. Entendemos que esta es una forma de hacer accesible el proceso de resolución, pero también la estructura conceptual del modelo matemático expresado en términos de los procedimientos necesarios para resolver el problema (en el sentido de Lesh y Harel, 2003). De esta forma, los ERPF permiten a los alumnos visualizar aspectos sutiles de diferenciación de los procesos (potencialmente) involucrados en la resolución del problema, como en el caso de incluir el cansancio de las personas al subir por las escaleras, así como un método específico para incluirlo en la resolución. Los ERPF se pueden utilizar esencialmente en dos etapas de la modelización, durante el proceso inicial de matematización o durante la validación final del modelo.

Al principio del proceso de modelización se produce una primera matematización del fenómeno estudiado (Blum, 2015). En este momento el profesor puede pedir a los alumnos que generen un primer modelo matemático, y que antes de seguir con el trabajo de resolución, compartan sus propuestas. De esta forma, el profesor puede traducir los modelos que le comunican los alumnos a ERPF y mostrarlos en la pizarra o la pantalla del aula, permitiendo así una discusión previa para garantizar que todos los alumnos entienden el problema y conocen los métodos para solucionar cada uno de los subproblemas. De esta forma, podemos considerar que los ERPF ayudan a generar un lenguaje común para referirse a los procesos necesarios para enfrentarse al problema.

En el ejemplo anterior, el profesor podría hacer notar a los alumnos del grupo A que la propuesta del grupo B contiene un elemento que se muestra como relevante para la resolución, como es el hecho de considerar el cansancio de quien sube el edificio por las escaleras. De esta forma, la propuesta del grupo B abre una posibilidad de discusión que puede acabar con una nueva forma de plantearse la aproximación a la resolución de ese subproblema o del problema entero.

Otra opción de uso de los ERPF es pedir a los alumnos que una vez finalizado el trabajo de modelización expliquen sus métodos y resultados en una puesta en común final, usando un ERPF e incluyendo los resultados parciales. De esta forma, se puede generar una discusión de aula sobre el modelo general utilizado, pero también sobre los resultados parciales y su influencia sobre el resultado final. Así, se pueden discutir estrategias distintas que comparten conceptos esenciales, como sería centrarse en el estudio del concepto de velocidad en el problema del Empire State Building a partir de una representación compartida. Los ERPF también permiten argumentar las comparaciones de resultados desde el punto de vista estrictamente numérico e identificar disparidades y señalar su origen en el proceso de resolución. En esta fase de discusión de resoluciones y resultados, en muchas ocasiones es sorprendente para los alumnos observar que resoluciones muy diferentes generan soluciones similares, siempre entendiendo que las estimaciones en los problemas de Fermi generan soluciones en un intervalo de valores que podemos considerar como adecuado. Al identificar estrategias distintas pero válidas, se abre la puerta a discutir la idea o concepto central que las estructura y construir conexiones entre diferentes conceptos.

ERPF como herramienta para el diseño de tareas

Los ERPF también se pueden usar como herramientas para el diseño de actividades. El profesor puede diseñar un ERPF que recoja una posible resolución que sus alumnos pudieran plantear. Los problemas de Fermi son problemas abiertos, con lo que no es posible identificar una única resolución posible, pero puede ser pertinente anticipar una resolución que incluya las ideas principales que va a ser necesario utilizar, con lo que el ERPF proporciona un soporte para la toma de decisiones del profesor antes de enfrentarse a la actividad de aula. Utilizamos aquí como ejemplo una forma alternativa de plantear la resolución del problema del Empire State Building (Figura 5).

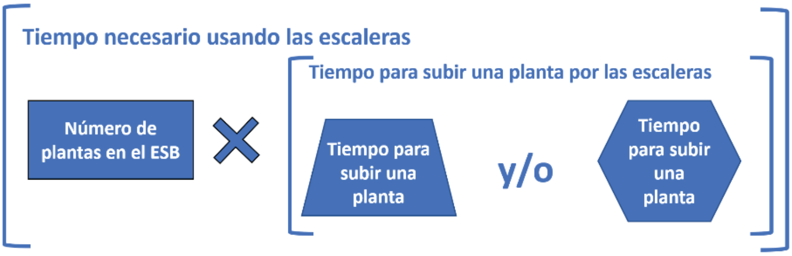

Figura 5. ERPF mostrando una anticipación al problema del ESB

Esta propuesta parte de una búsqueda de información para conocer el número de plantas del edificio. En este caso, con una búsqueda en Wikipedia se puede conocer la respuesta de forma precisa, pero para otras cantidades que puedan aparecer en otros problemas, se pueden consultar bases de datos de organismos oficiales. Una vez se conoce el número de plantas del edificio, el profesor puede plantear la pregunta de estimar el tiempo necesario para subir una planta por las escaleras. Nuevamente, este subproblema puede abordarse desde diversas perspectivas. Una opción podría ser hacer una encuesta a los alumnos del centro escolar y gestionar los datos para descartar aquellos valores inadecuados y conseguir un valor medio. Esta sería una estrategia basada en el análisis estadístico de datos. Pero el profesor también puede promover una alternativa orientada a la experimentación, midiendo el tiempo necesario para diferentes alumnos para subir un piso. En el caso de que se quiera introducir la influencia del cansancio, se puede plantear una experimentación en la que los alumnos suben una o diversas plantas del centro escolar varias veces de forma consecutiva.

También es posible usar los ERPF para anticipar la necesidad de disponer en el aula de materiales concretos necesarios para poder efectuar el trabajo de aula. Proporcionamos aquí un ejemplo extraído de la literatura. Taggart *et al.* (2007) preguntaron a estudiantes de educación secundaria ¿Cuántas cargas de agua embotellada transportadas en camiones fueron necesarias para abastecer a los refugiados de Nueva Orleáns en la semana siguiente al huracán Katrina? Estos autores identifican los sub-problemas principales: determinar la cantidad total de agua necesaria y la cantidad de agua que puede transportar un camión. Sin embargo, estas dos cantidades deben determinarse a partir de una sucesión de estimaciones y cálculos. En este caso, la concreción de estos sub-problemas es la que permite al profesor decidir el tipo de actividad (estimación, experimentación, búsqueda de datos, recogida de datos estadísticos) para crear el ERPF del problema. Con ello, el profesor puede anticiparse a los recursos que los alumnos van a necesitar. Por ejemplo, este análisis a priori podría incitar al profesor a buscar fuentes de información fiables para que los estudiantes encuentren la cantidad de agua que una persona necesita beber en un día o cuál es la capacidad de carga de un camión. El profesor también podría decidir qué materiales concretos van a necesitar los alumnos en su trabajo y llevar al aula diversos tipos de botellas de agua e instrumentos para determinar su capacidad a partir de la medición como forma de experimentación.

REFLEXIONES FINALES

Los problemas de Fermi tienen una larga tradición en ciertos contextos educativos, como las aulas de ingeniería de las universidades de los Estados Unidos de América (Efthimiou y Llewellyn, 2007; Robinson, 2009). Sin embargo, a pesar de varias recomendaciones en la literatura de la educación matemática (Carlson, 1997; García-Navarro, 2013 Sriraman y Knott, 2009) y de los avances en la investigación relativa a la modelización matemática (Ärlebäck, 2009; Czocher, 2016; Haberzettl *et al.*, 2018; Peter-Koop, 2009), los problemas de Fermi no han incrementado su presencia en las aulas de matemáticas de los niveles de la enseñanza obligatoria. Tampoco se han generado materiales de soporte a los profesores o se han incluido en los libros de texto, con lo que no se ha explotado aún todo su potencial.

Dependiendo del conocimiento matemático de los estudiantes, de sus habilidades para resolver problemas y de sus experiencias de la vida fuera de la escuela, los problemas de Fermi facilitan que los estudiantes desarrollen soluciones a problemas complejos que pueden ser utilizados para introducir o explorar conceptos matemáticos relevantes. Si bien es cierto que los problemas de Fermi ofrecen diferentes oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, también plantean desafíos docentes a los profesores, que pueden provocar que estos sean reticentes a utilizarlos. Nos encontramos con situaciones en las que los maestros de Educación Primaria, al no ser especialistas en la docencia de las matemáticas, prefieren trabajar con actividades más cerradas. En los niveles educativos superiores, donde el alcance y profundidad de los posibles problemas que pueden surgir es mucho mayor en comparación con los de los niveles elementales, los ERPF pueden ser una herramienta que facilite la gestión de la actividad, ya que permite establecer un lenguaje común para presentar las resoluciones de los alumnos.

La caracterización de los ERPF, en este artículo se presenta como una herramienta versátil. Por una parte, puede dar soporte a los alumnos durante su trabajo en el aula o en las discusiones grupales, como herramienta para explicitar ideas complejas. Por otro lado, hemos mostrado ejemplos de la forma en la que los ERPF proporcionan un soporte para las decisiones de diseño didáctico para trabajar en las aulas basadas en el análisis previo de la estructura de un problema de Fermi. Los ERPF pueden ayudar a los profesores de los diferentes niveles educativos a diseñar tareas del aula relacionadas con conocimientos o procedimientos curriculares concretos, a comparar métodos y así trabajar aspectos siempre complejos de resolución de problemas y modelización matemática, que son grandes retos para tratar en las clases de matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo desarrollado en el marco del Proyecto PID2021-126707NB-I00 financiado por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033/ y por FEDER Una manera de hacer Europa

REFERENCIAS

Albarracín, L., y Ärlebäck, J. (2019). Characterising mathematical activities promoted by
Albarracín, L., y Ärlebäck, J. (2019). Characterising mathematical activities promoted
by Fermi problems. *For the Learning of Mathematics, 39*(3), 10-13.

Albarracín, L., Ärlebäck, J., Civil, E., y Gorgorió, N. (2018). Extending Modelling Activity Diagrams as a tool to characterise mathematical modelling processes. *The Mathematics Enthusiast, 16*(1), 211-230. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1455

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2018). Students Estimating Large Quantities: From Simple Strategies to the Population Density Model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(10), em1579. https://doi.org/10.29333/ejmste/92285

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of*

Innovation in Science and Mathematics Education, *27*(2), 45-57. https://doi.org/10.30722/IJISME.27.02.004

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Allison, S. K., Segrè, E., y Anderson, H. L. (1955). Enrico Fermi 1901-1954. *Physics Today*, *8*, 9-13.

Anderson, P., y Sherman, C. (2010). Applying the Fermi estimation technique to business problems. *Journal of Applied Business and Economics, 10*(5), 33-42.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157

Ärlebäck, J., y Albarracín, L. (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies. *ZDM, 51*(6), 979-990. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01075-3

Barahmeh, H. M., Hamad, A. M. B., y Barahmeh, N. M. (2017). The Effect of Fermi Questions in the Development of Science Processes Skills in Physics among Jordanian Ninth Graders. *Journal of Education and Practice, 8*(3), 186-194.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal changes*. (pp. 73–96). Springer International Publishing.

Blomberg, P. (2015). *Informal Statistical Inference in modelling situations – A study of developing a framework for analysing how students express inferences*. Linnaeus University, Departments of the Faculty of Technology, Thesis No 36/2015. ISBN: 978-91-87925-69-6.

Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher, 35*(5), 308-309. https://doi.org/10.1119/1.2344696

Czocher, J. A. (2016). Introducing Modeling Transition Diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(2), 77-106. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1148530

Efthimiou, C. J., y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, *42*(3), 253. https://doi.org/10.1088/0031-9120/42/3/003

Ferrando, I., y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 61-78. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema - Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 220-242. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve fermi problems. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*, (pp. 265–275). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_23

García-Navarro, J. M. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Epsilon*, *84*, 57-68.

Hogan, T. P., y Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 259-280. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0504_02

Haberzettl, N., Klett, S., y Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule–Modellieren mit Fermi-Aufgaben. En K. Eilerts, K. Skutella (Eds.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5* (pp. 31-41). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21042-7_3

Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38*(3), 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Lesh, R., y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2), 157–189. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679998

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., y Adamuz-Povedano, N. (2021). A Tool for the Analysis and Characterization of School Mathematical Models. *Mathematics*, *9*(13), 1569. https://doi.org/10.3390/math9131569

Peter-Koop, A. (2009). Teaching and Understanding Mathematical Modelling through Fermi-Problems. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (pp. 131-146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_10

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. University Press.

Phillips, R., y Milo, R. (2009). A feeling for the numbers in biology. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 106*(51), 21465–21471. https://doi.org/10.1073/pnas.0907732106

Raviv, D., Harris, A., y Dezotti, T. (2016). Estimation as an essential skill in entrepreneurial thinking. En *Proceedings 123rd ASEE Annual Conference and Exposition*. American Society for Engineering Education.

Robinson, A. W. (2008). Don't just stand there–teach Fermi problems! *Physics Education, 43*(1), 83-87. https://doi.org/10.1088/0031-9120/43/01/009

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan Publishing Company.

Shakerin, S. (2006). The art of estimation. *International Journal of Engineering Education, 22*(2), 273-278.

Siegel, A. W., Goldsmith, L. T., y Madson, C. R. (1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 211-232. https://doi.org/10.2307/748557

Sriraman, B., y Lesh, R. A. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM*, *38*(3), 247-254. https://doi.org/10.1007/BF02652808

Sriraman, B., y Knott, L. (2009). The Mathematics of Estimation: Possibilities for Interdisciplinary Pedagogy and Social Consciousness. *Interchange*, *40*(2), 205-223. https://doi.org/10.1007/s10780-009-9090-7

Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borrromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 165–180). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_18

Weinstein, L., y Adam, J. A. (2009). *Guesstimation: Solving the world's problems on the back of a cocktail napkin*. Princeton University Press.

Lluís Albarracín

Dirección: Edificio G5, Despacho 140 - 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès) Barcelona, España. lluis.albarracin@uab.cat