http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i1p061-084

Proposições ao ensino de Geometria: uma proposta de sequência didática para o estudo de cônicas utilizando o GeoGebra

Propositions to the teaching of Geometry: a proposal of didactic sequence for the study of conics using GeoGebra

ELISAMA COSTA TOMAZ[1]
0000-0002-2765-5803

FRANCISCO JOSÉ DE LIMA[2]
0000-0001-5758-5159

RESUMO

Este trabalho constitui-se em uma proposta teórica que tem por finalidade apresentar e descrever um caminho para o ensino de cônicas, por meio do GeoGebra, na perspectiva de desenvolvimento do pensamento geométrico espacial de alunos do Ensino Médio, melhorando a visualização de conceitos e objetos matemáticos. Trata-se de um estudo que se apoiou em pressupostos da pesquisa qualitativa que, inicialmente, tomou a revisão de literatura como caminho para aproximar-se de aportes teóricos que fundamentam o estudo. Em seguida, a partir da Engenharia Didática, foram construídas sequências didáticas pautadas nas etapas Análise Prévia e Análise a Priori. Para a construção da proposta, a utilização de tecnologias e software de geometria dinâmica foram indispensáveis visando à superação de dificuldades de visualização e melhor compreensão de conteúdos de Geometria, a fim de lidar com situações do cotidiano. As discussões e reflexões mostram-se relevantes, no sentido de propor alternativas para a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem de cônicas na Educação Básica.

Palavras-chave: *ensino; aprendizagem geométrica; formação docente.*

ABSTRACT

This work is a theoretical proposal that aims to present and describe a path to the teaching of conics, through GeoGebra, from the perspective of development of geometric spatial thinking of high school students, improving the visualization of mathematical concepts and objects. This is a study that was based on assumptions of qualitative research that initially took the literature review as a way to approach theoretical contributions that underlie the study. Then, from didactic engineering, didactic sequences were constructed based on the stages Prior Analysis and A Priori Analysis. For the construction of the proposal, the use of technologies and dynamic geometry software were indispensable in order to overcome visualization difficulties and better

1 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) *campus* Cedro- elisama_costa@hotmail.com
2 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) *campus* Cedro – franciscojose@ifce.edu.br

understanding of geometry contents, in order to deal with everyday situations. The discussions and reflections are relevant, in order to propose alternatives for the improvement of the teaching and learning processes of conics in Basic Education.

Keywords: *teaching; geometric learning; teacher training.*

Introdução

As pesquisas em Educação Matemática têm buscado discutir os processos de ensino e aprendizagem e a construção do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, um dos objetivos da Educação Matemática é contribuir para que o aluno possa desenvolver autonomia intelectual quanto ao saber escolar aprendido, proporcionando condições para compreender e participar do mundo em que vive. Desse modo, o saber escolar constitui-se do conjunto de conteúdos previstos na organização curricular, presentes em várias disciplinas escolares e são apresentados em livros didáticos, programas e outros materiais (PAIS, 2011).

Notadamente, os conhecimentos matemáticos são basilares para a aprendizagem de outras disciplinas, como por exemplo: na Geografia, quando se constroem tabelas e gráficos; na História, quando se datam os acontecimentos; na Física e Química, quando se realizam cálculos (MENEZES, 2008). Embora se reconheça essa importância, é preciso destacar que a matemática sempre foi considerada, por boa parte dos alunos, uma disciplina difícil que poucos compreendem, pois apresenta conceitos abstratos e estruturas de difícil entendimento e assimilação (SILVA, 2011). Essas dificuldades quanto aos conteúdos matemáticos, por sua vez, podem implicar em desmotivação e dificuldades no aprendizado da disciplina.

Desse modo, acaba sendo recorrente entre os alunos a fuga, a qualquer custo, da abstração e da generalização de conteúdos matemáticos, que são características essenciais para entender a disciplina, em favor de simplificações que dificultam a visualização e sua assimilação. Os alunos precisam entender que devem saber e saber fazer. No contexto de metodologias de ensino, Borba e Penteado (2001) destacam que, ao trazer a visualização para o centro dos processos de ensino e aprendizagem matemática, as atividades que envolvem tecnologias, como aliadas em sala de aula, enfatizam a experimentação de conteúdos como um aspecto relevante no fazer pedagógico da disciplina.

Quanto ao ensino de conteúdos matemáticos, Pavanello (1993) alerta que o ensino de Geometria perdeu destaque, especialmente, depois da criação da Lei de Diretrizes e Base da Educação, de 11 de agosto de 1971, que permitiu ao professor elaborar seu programa de acordo com as necessidades de seus alunos. Essa liberdade concedida pela lei possibilitou que muitos professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a Geometria, deixassem de incluí-la em sua programação ou a colocassem no final do ano letivo, usando a falta de tempo como pretexto para não abordá-la (PAVANELLO, 1993).

Assim, é necessário compreender a relevância da Geometria e como a defasagem no seu ensino pode causar danos aos alunos, como: dificuldades de percepção do mundo a sua volta e a falta de raciocínio lógico. Segundo D'Ambrósio (2002), a aprendizagem Matemática, em especial da Geometria, deve passar por etapas de exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas.

Os estudos de Dias (2012), Nascimento, Castro e Gomes (2015) e Lopes e Souza Junior (2019) indicam que existem aspectos a serem explorados quanto ao desenvolvimento da Geometria dinâmica como metodologia de ensino, para que conteúdos de Geometria possam ser melhor trabalhados pelos docentes, a fim de facilitar a compreensão e visualização dos objetos matemáticos pelos estudantes.

Nesse contexto, as vivências em sala de aula, outras experiências oportunizadas pelos Estágios Supervisionados e, posteriormente, o contato com pesquisas sobre a temática deste trabalho, possibilitaram algumas percepções. Entre estas, aponta-se que os estudantes quando em situação de aulas de Matemática pautadas apenas em métodos usuais de ensino, apresentam dificuldades e até resistência para compreender conceitos matemáticos estudados, muitas vezes por não conseguirem visualizar esses objetos e conteúdos em sua realidade.

Em contrapartida, a literatura da área tem indicado que quando esses conteúdos são apresentados de forma dinâmica, por meio da utilização de *softwares* e programas matemáticos, a percepção dos alunos tende a melhorar. O *software* GeoGebra é apontado em alguns estudos como recurso dinâmico que auxilia na demonstração e exemplificação de conteúdos matemáticos, viabilizando compreensão conceitual e estimulando o interesse e a curiosidade dos estudantes (DIAS, 2012; NASCIMENTO; CASTRO; GOMES, 2015; LOPES; SOUZA JUNIOR, 2019).

Nesse sentido, surge como problemática a construção de uma proposta metodológica para o ensino de cônicas (elipse, hipérbole e parábola), por meio da construção de sequências didáticas com o uso do *software* GeoGebra. Essas sequências teriam por finalidade auxiliar na visualização desses conteúdos e facilitar a construção de conhecimentos e objetos matemáticos e, dessa forma, contribuir para o aprendizado discente. Diante disso, surge a seguinte questão orientadora: De que forma o *software* de geometria dinâmica, GeoGebra, pode auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem de conteúdos de cônicas? Como as sequências didáticas podem auxiliar na construção de conhecimentos e objetos matemáticos?

O estudo constitui-se em uma proposta teórica que, no intuito de responder às questões anunciadas, tem como objetivo apresentar e descrever um caminho para o ensino de cônicas (elipse, hipérbole e parábola), por meio do GeoGebra, na perspectiva de desenvolvimento do pensamento geométrico espacial de alunos do Ensino Médio. Como objetivos específicos, almeja-se: perceber o GeoGebra como ferramenta capaz de integrar-se à Educação Matemática, melhorando a compreensão conceitual e a curiosidade dos estudantes; propor articulação entre os principais elementos que compõem cada cônica, a partir da construção de sua figura, e abordar a resolução de exercícios, utilizando funcionalidades disponíveis no *software* para ilustrar e explorar situações propostas.

1. O *software* GeoGebra no ensino de Matemática

O GeoGebra tem se mostrado tema de diversas investigações didáticas. Apresenta linguagem simples e um conjunto de funcionalidades que permitem alternativas para a resolução de problemas, além de promover a interação entre professores e alunos em um ambiente colaborativo. É um recurso que permite realizar construções geométricas e oferece uma proposta de trabalho que potencializa a aprendizagem por possuir recursos que possibilitam transformação contínua, em tempo real, o que faz do programa um possível laboratório de ensino e aprendizagem.

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, bem como trabalha o pensamento matemático estatístico, tornando-o uma ferramenta de grande valia para ensinar da maneira mais simples os mais complexos assuntos da matéria, com inúmeras ferramentas para criação de objetos. Oferece recursos característicos da geometria, como: pontos, segmentos, retas, seções cônicas, equações e coordenadas que podem ser inseridas diretamente. Assim, surge a vantagem didático-pedagógica de apresentar duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: a geométrica e a algébrica.

Como possibilidade de ação, o GeoGebra, por meio de suas funcionalidades e dinamismo, poderá agregar aos métodos de ensino já utilizados. No contexto da sala de aula, conforme Ausubel (1982), a aprendizagem se torna significativa à medida que o conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento do aluno e adquire sentido a partir da relação com seus conhecimentos prévios. Se em sala de aula o conteúdo for abordado de forma usual, poderá acontecer uma dissociação entre o conteúdo e realidade. Essa situação poderá implicar na não atribuição de significação, por parte do estudante, e as informações serão armazenadas isoladamente.

Ante o exposto, ressalta-se que quando se articula o conteúdo com os conhecimentos prévios, a aprendizagem cria significado e pode ser armazenada da maneira correta (AUSUBEL, 1982). Nesse contexto, os alunos precisam atuar como protagonistas, tornando-se parte do processo de aprendizagem, possibilitando que além de dominar o conhecimento dos conteúdos, os discentes consigam associar conceitos abstratos a uma forma concreta e aplicá-los na resolução de problemas.

Sob essa perspectiva, as ferramentas disponibilizadas pelo *software* GeoGebra proporcionam aos alunos fazerem indagações e, em contrapartida, suas funcionalidades podem ajudar na solução, uma vez que, na visão de Ausubel (1982), a aprendizagem acontece por recepção e por descoberta.

A literatura aponta o *software* como uma excelente ferramenta didática para demonstrar conceitos relacionados aos conteúdos ligados à geometria analítica, uma vez que se trata de uma ferramenta dinâmica que possibilita a experimentação e a argumentação. O uso do GeoGebra pode despertar interesse e curiosidade de discentes, o que favorece os processos de ensino e aprendizagem e instiga o raciocínio lógico. O *software,* ao que tudo indica, permite ao aluno a capacidade de fazer conjecturas e desenvolver o processo dedutivo.

Nessa perspectiva, Zanella, Franco e Canavarro (2018) sugerem que a utilização do Geogebra, em demonstrações, potencializa a relação teoria e prática e possibilita celeridade nas relações entre os conteúdos em estudo. A partir disso, os autores afirmam que houve, por parte dos alunos, maior percepção das propriedades geométricas quando comparado à utilização apenas de meios convencionais. Destacam, também, maior interação alunos-professores e alunos-conteúdo, possibilitando resoluções em conjunto.

Neste sentido, Viana e Boiago (2015), ao analisarem sequências utilizadas por estudantes de ensino médio, em atividades de desenho geométrico utilizando o GeoGebra, indicam outra característica, que foi a manipulação e a movimentação das figuras facilitarem a resolução de exercícios. Esse fato deixa os alunos mais atentos, e o aprendizado se constrói simultaneamente, pois o "*software* permite interpretar e construir figuras envolvendo os diferentes tipos de apreensão em geometria e as atividades de desenho possibilitam um melhor entendimento de alguns processos cognitivos específicos da atividade geométrica" (VIANA; BOIAGO, 2015, p. 162).

Em relação ao uso desses recursos de ensino, Henrique e Bairral (2019) alertam para a importância do planejamento escolar e apontam que uma atividade ou sequência didática, desenvolvida com base no uso de alguma ferramenta tecnológica, demanda mais tempo para ser elaborada e mais dedicação. Isso porque precisam ser levadas em conta competências e habilidades na hora da seleção dos conteúdos a serem apresentados para os discentes. A atividade proposta deve estar bem fundamentada no conteúdo e precisa permitir ao aluno chegar aos objetivos propostos com o estudo. Caso contrário, acontecerá o efeito reverso e haverá apenas uma perda de tempo, pois os objetivos não serão alcançados.

Quanto ao dinamismo do GeoGebra e a resolução de problemas na perspectiva da aprendizagem significativa, é importante destacar o papel do programa em relação à aprendizagem e à execução das sequências didáticas. Com isso, torna-se essencial um olhar voltado à preparação do professor frente à utilização de ferramentas tecnológicas para a realização de atividades a serem desenvolvidas com o *software*.

No tocante à utilização de recursos tecnológicos aplicados ao ensino, é importante destacar o papel da formação continuada de professores para esse fim. A temática da formação continuada tem sido entendida como um processo permanente e constante de aperfeiçoamento dos saberes necessários à atividade dos educadores. Desenvolvida após a formação inicial, a formação continuada tem como objetivo manter o professor atualizado, na perspectiva de assegurar um ensino de qualidade aos alunos. Vivemos em uma sociedade marcada por constantes avanços tecnológicos, logo faz-se necessário que o profissional docente esteja apto a trazer para o ambiente da sala de aula estratégias metodológicas que envolvam tecnologias (SILVEIRA, 2018).

Nesse sentido, é oportuno destacar a importância do professor de matemática estar apto a essas mudanças em sala de aula. Sob a ótica de Silveira (2018), a utilização do *software* GeoGebra permite um tratamento diferenciado aos conteúdos matemáticos, favorecendo a realização de investigações tanto matemáticas quanto aquelas relativas à ação da matemática na sociedade. Bennemann e Allevato (2014) acrescentam que é essencial que o docente saiba o "que" ensina, "como" ensina e, principalmente, "porque" ensina determinado conteúdo.

Desse modo, cabe destacar que é também função do educador buscar meios de proporcionar ao aluno condições para que ele possa construir sua aprendizagem da melhor maneira, o que facilitará as coisas para todos os envolvidos no processo. O medo e o preconceito de se trabalhar com novos métodos também é um desafio a ser vencido, porém os trabalhos evidenciam que foi notável a boa recepção da proposta, tanto em relação à utilização do programa em estudo na formação inicial como na formação continuada.

A formação deve refletir novos paradigmas que promovam no professor o desejo de continuar seu caminho de forma autônoma. Cada docente absorve o que faz sentido para sua rotina, possibilitando, assim, o início do processo de transformação da prática em sala. Formar professores para a utilização da tecnologia educacional requer condições para que seja construído "conhecimento sobre as técnicas computacionais, entenda por que e como integrar o computador na sua prática pedagógica e seja capaz de superar barreiras de ordem administrativa e pedagógica" (VALENTE, ALMEIDA, 1997, p.08).

2. Procedimentos Metodológicos

O estudo apoiou-se em pressupostos da pesquisa qualitativa e, inicialmente, foi realizada uma revisão bibliográfica que, segundo Gil (2008, p.50), "é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído de livros e artigos científicos". Nessa direção, a proposta de Gil (2008) foi utilizada em quatro etapas: seleção das fontes de estudo; coleta de dados feita a partir da leitura exploratória e seletiva do material; análise e interpretação dos resultados a partir de leitura analítica dos trabalhos, com a finalidade de organizar as informações; discussão dos resultados obtidos.

Para este trabalho, assumiu-se a Engenharia Didática como metodologia, cuja forma de organização ocorre a partir da construção de uma sequência de aulas planejadas. As sequências didáticas foram construídas pautando-se nos aportes teóricos e levando-se em conta os aspectos julgados necessários para trabalhar pontos centrais do conteúdo em sala de aula, a partir da representação gráfica e dinâmica das construções.

A sequência de aprendizagem deve apresentar uma ordem lógica e sistematizada de assuntos que favoreçam o ensino. O currículo deve estar atento à preocupação de suavizar as dificuldades dos alunos. O estudo sobre Sequências Didáticas foi baseado nos estudos de Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), pois se acredita que esta é uma maneira mais didática e organizada de ensino, em que as atividades são constituídas por módulos, facilitando a aprendizagem do aluno. As sequências configuram-se como elementos capazes de auxiliar a prática docente, tendo em vista que os professores muitas vezes sentem dificuldade para lecionar determinados assuntos de forma prática e objetiva.

Nas reflexões iniciais, considera-se as Sequências Didáticas sob o conceito de uma ferramenta capaz de contemplar uma sequência de atividades estruturadas. Essas atividades têm como finalidade a realização de objetivos educacionais determinados e conhecidos tanto pelo professor quanto pelo aluno (ZABALA, 1998), de forma a auxiliar o fazer docente no alcance dos objetivos de ensino.

O propósito das Sequências Didáticas é fazer com que os discentes tenham contato com situações que sejam capazes de estimular experiências produtivas, a partir de situações dinâmicas que envolvam as cônicas. Alguns conceitos anteriores como circunferências, pontos, distância entre dois pontos devem ser conhecidos e revisados durante a aplicação das sequências de ensino. É essencial que os alunos saibam que, por conta de algumas propriedades, as cônicas têm várias aplicações na Astronomia, na Óptica, na Engenharia, na Arquitetura e nas novas tecnologias. Na astronomia, por exemplo, elas estão presentes na trajetória elíptica dos planetas ao redor do sol e na trajetória de cometas no sistema solar.

As atividades serão divididas em etapas, levando em conta as preceitos da Engenharia Didática, fazendo com que o saber seja construído de forma mais ativa. O *software* de geometria dinâmica GeoGebra será utilizado como ferramenta para construir as sequências, além de considerar que a geometria deve possibilitar ao aluno a oportunidade de resolver problemas práticos do seu dia a dia, visando que o estudo da matemática se torne mais concreto aos olhos do aluno (BRASIL, 1997).

Embora a Engenharia Didática apresente diferentes fases, nesse estudo, as sequências didáticas construídas foram pautadas nas duas primeiras etapas: Análise Prévia, na qual se conhece o tema e o campo de ação e Análise a Priori, na qual se define as variáveis e descreve-se cada atividade proposta, não constituindo objeto de discussão ao fazer de Experimentação e Análise a posteriori e Validação, considerando-se que tais sequências didáticas não foram aplicadas com estudantes em sala de aula.

A seguir, serão descritas as sequências didáticas sobre cônicas com a utilização do *software* GeoGebra.

3. Proposições de Sequências Didáticas para o ensino de Cônicas utilizando o *software* GeoGebra

No século III a. C., o matemático grego Apolônio de Perga deu importante contribuição à Geometria, com sua obra "*As Cônicas*", mostrando como obtê-las por meio da interseção de um plano, com uma superfície cônica circular dupla, que deu origem ao nome secções cônicas (LEONARDO, 2013).

As cônicas aparecem ou devem aparecer, pela primeira vez na vida acadêmica de estudantes, no 9º Ano do Ensino Fundamental, quando é estudada a parábola. No entanto, segundo Quaranta Neto (2008), esta é vista como representação de função polinomial de segundo grau, ou seja, com ênfase no conceito de função. Em seguida, no 1º Ano do Ensino Médio, a parábola recebe a mesma atenção que no 9º Ano. Já no terceiro ano do Ensino Médio, são apresentadas aos alunos as cônicas: parábola, elipse e hipérbole, com o enfoque na geometria analítica, ao passo que a circunferência, que também é uma cônica, geralmente é vista separadamente.

O curto período de tempo para tratar desses temas direciona os trabalhos apenas para o caminho das manipulações de suas equações analíticas, cujas demonstrações são feitas a partir de sua caracterização bifocal (QUARANTA NETO, 2008). Sobre essa observação, Lopes (2014), afirma que o estudo das cônicas, quando feito, é contemplado apenas no 3º Ano do Ensino Médio e, geralmente, é limitado a uma ou duas semanas.

Com a finalidade de expor de forma mais clara como esse conteúdo se apresenta aos alunos, traz-se uma ilustração das superfícies cônicas, que constitui a Figura 1.

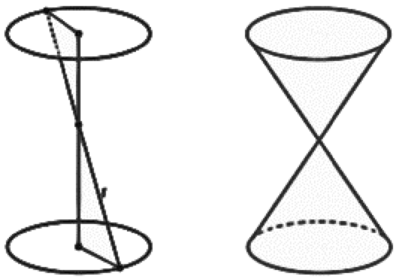

FIGURA 1: Cone de revolução duplo
FONTE:https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-conicas.htm

Pela Figura 1, pode-se perceber que se obtém uma superfície cônica circular dupla, com vértice V, por meio da rotação de uma reta *r* em torno de um eixo concorrente com esse eixo. Variando a inclinação do plano alfa em relação ao eixo, pode-se demonstrar que obtém-se as três cônicas que serão abordadas neste trabalho. Em seguida, estuda-se cada uma das cônicas: elipse, hipérbole e parábola, respectivamente, a partir de sua construção, representadas na Figura 2.

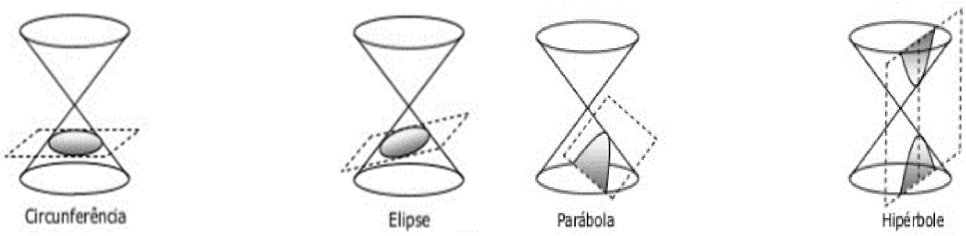

FIGURA 2: Intersecção da superfície cônica com o plano
FONTE: Figura do trabalho de (CRUZ, 2017).

Essa ilustração propõe que as curvas cônicas possam ser visualizadas por meio da intersecção de um plano com o cone, como se espera que seja trabalhado pelos professores do Ensino Médio.

Estes conteúdos, apesar da vasta aplicação nos mais variados campos (Geometria, Física, engenharia, Área Tecnológica, Astronomia, etc), são difíceis de serem trabalhados. Como já enfatizado, muitas vezes essa dificuldade está relacionada ao pouco período de tempo que o professor tem para ministrar as aulas e, também, pelo fato de, muitas vezes, o assunto ser visto apenas de forma analítica.

Acredita-se que durante as aulas é essencial que o professor, além de abordar o tema de forma analítica, trabalhe também as aplicações, relacionando-as ao cotidiano. O formato do farol de um automóvel é parabólico e, no foco desta parábola, encontra-se uma lâmpada que, após acesa, incide raios luminosos no espelho parabólico e estes são refletidos paralelos ao eixo da parábola. As antenas parabólicas são exemplos de aplicações da parábola, pois captam os sinais de mesma direção na superfície da antena e os direcionam, de tal forma que se concentrem em um único ponto. Salas de sussurros são exemplos de aplicações da propriedade bissetora da elipse, essas salas são construções feitas em forma oval em que são marcados dois pontos no chão. Nela, duas pessoas ficam em pé, em cada um dos pontos, podendo-se comunicar em voz sussurrada, de forma que no restante da sala não é possível ouvir a voz delas (CRUZ, 2017).

As deduções das equações da elipse, hipérbole e parábola são bastante conhecidas e envolvem cálculos exaustivos que, se apresentados aquis podem tirar o foco desta proposição. Por esta razão, sugerimos consultar os autores Iezzi; Hazzan (2006)[3] ou Camargo; Boulos (2007)[4] que, didaticamente, abordam as conclusões lógicas dessas equações.

Finalmente, apresenta-se uma proposta de aulas, a qual se espera que possa ser utilizada por professores do Ensino Médio, com o objetivo de sistematizar de modo significativo o conteúdo aqui abordado.

4.2 Proposta didática

O trabalho com desenho geométrico é fundamental para aprimorar no aluno a visão espacial e a criatividade, além de ser essencial para a compreensão e fixação, pois ao desenhar uma figura, o estudante procura caminhos, imagina soluções e estimula o raciocínio enquanto exercita a mente, buscando aprender assuntos importantes com maior facilidade e rapidez. Acredita-se que construir uma figura, por meio do desenho geométrico, aumenta a capacidade de planejar,

[3] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Analítica. São Paulo: Editora Atual, 2006.
[4] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica:** um tratamento vetorial. Prentice Hall, 3a edition, 2007.

projetar ou abstrair, estabelecendo relações entre a percepção visual e o raciocínio espacial, observando que na

> Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim – e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem (BRASIL, 2018, p. 277).

Assim, no contexto do estudo de geometria, a possibilidade de visualização assume importância fundamental. Ao visualizar objetos geométricos, o indivíduo passa a ter controle sobre o conjunto de operações mentais básicas exigidas no trato da geometria, possibilitando melhor compreensão para a resolução de um problema. Numa ponta do eixo: o que se sabe; na outra extremidade: o que se quer.

Nesse sentido, foram realizadas Sequências Didáticas sobre o estudo das Cônicas: Elipse, Parábola e Hipérbole, utilizando o *software* GeoGebra Classic 5, com o intuito de trabalhar com uma ferramenta didática dinâmica. Assim, deseja-se a partir destas construções: identificar as cônicas em situações reais, diferenciar as elipses, as parábolas e as hipérboles; reconhecer componentes de cada uma das Cônicas (foco, eixo, vértice, distância focal, entre outros); associar as cônicas com suas respectivas equações e resolver situações-problema que envolvam o estudo das Cônicas e suas propriedades.

Para que se possa aplicá-las, é necessário que os alunos dominem as noções básicas de informática, caso queiram reproduzir as sequências e alguns conceitos da Geometria Analítica - ponto e distância entre dois pontos. É preciso, ainda, investigar até que ponto o tema seções cônicas é importante, na visão dos alunos, para o desenvolvimento de tecnologias, além de diagnosticar a forma como o conteúdo “cônicas” é encarado por estes.

Nessa perspectiva, é importante apresentar aos alunos o *software* GeoGebra e ensiná-los a usar suas ferramentas, explicando suas funcionalidades para que sejam utilizadas nas atividades propostas. Fazer uma análise a *priori* do panorama dos conhecimentos prévios dos alunos também se mostra necessário, a fim de alcançar melhor compreensão dos conteúdos a serem estudados nas sequências e realizar as atividades sugeridas, de acordo com a turma.

4.3 Sequência Didática 01: Construção dinâmica da Elipse utilizando controles deslizantes para translação de eixos

Nessa primeira sequência didática, foi descrito o passo a passo da construção da elipse por meio do *software* GeoGebra Classic 5, mostrando suas principais características matemáticas, de forma dinâmica, permitindo, por sua vez, a visualização de suas propriedades matemáticas e os conceitos de forma mais concreta.

4.3.1 Objetivos:

Espera-se que, com essa construção, se possa trabalhar a definição de elipse a partir de sua construção geométrica e identificar os seus componentes (foco, eixo, vértice, distância focal, excentricidade, entre outros). Em seguida, fazer a dedução geométrica e analítica da equação reduzida da elipse com centro na origem e com centro sobre um ponto qualquer. Pretende-se analisar os dois casos da elipse: eixo maior sobre o eixo das abscissas e eixo maior sobre o eixo das ordenadas.

4.3.2 Metodologia:

Antes de falar especificamente sobre a construção em si, é válido salientar que o *software* em uso nomeia, automaticamente, os elementos geométricos conforme sua construção, sendo possível que o usuário renomeie os itens a qualquer momento. Alguns elementos dessa construção foram renomeados de maneira a manter certa organização entre eles. As opções de exibir rótulos, exibir objetos e caixas para exibir/esconder objetos são ferramentas importantes, pois permitem que o conteúdo possa ser trabalhado em etapas e de maneira mais organizada.

É interessante ressaltar que cada construção pode ser realizada de várias maneiras, inclusive a da elipse. Dessa forma, pode-se fazer construções estáticas, a partir de um ponto fixo; ou dinâmicas, utilizando controles deslizantes para fazer a variação dos comprimentos dos focos e dos eixos sobre a malha. Isso permitirá que, em uma única construção, se possa ter diversas elipses apenas variando os valores do controle. Optou-se, no caso, por construir uma elipse dinâmica.

A construção passo a passo dessa figura permitirá aos discentes conhecer os elementos que compõem a elipse de forma mais lúdica, além de fornecer condições para que um professor possa reconstruí-la, aproveitando cada passo para mostrar os conceitos, regras e propriedades que compõem a construção. Algumas das propriedades da elipse são apresentadas, além de serem mostrados seus elementos principais e como a sua equação varia quando se modificam alguns desses elementos. Discute-se, também, a propriedade da distância de um ponto aos focos que caracteriza a elipse. Ao construir a figura, propõe-se que o professor ressalte outras questões que achar pertinente enquanto realiza a atividade com os alunos.

A aplicação da definição de elipse deve utilizar a distância entre dois pontos para chegar à equação reduzida da curva. Um recurso interessante é a inserção da função soma das distâncias dos segmentos de retas que ligam os focos a um ponto móvel sobre a elipse e a percepção de que esse valor será uma constante. No nosso caso, são os segmentos h e g (s = h + g) e o ponto P. A animação da construção mostrará que a soma das distâncias de um ponto P, pertencente à elipse, até os focos F_1 e F_2 será igual à medida do eixo maior.

Como se pretende evidenciar os elementos da elipse e a partir deles realizar as movimentações dinâmicas, a fim de se compreender a equação reduzida, é necessária a criação de parâmetros para que, de acordo com a variação dos valores, a construção possa se movimentar. A construção vai trabalhar, simultaneamente, com uma elipse de centro na origem e fora da origem. Parte-se da equação reduzida da elipse com centro em um ponto qualquer, pois ela engloba também a situação de centro na origem. É preciso observar quais variáveis carecem de parâmetros. Feito isso, é importante observar a necessidade de criar controles deslizantes para realizar a translação de eixos. Foram criados os parâmetros *m* e *n,* para que seja possível fazer essa translação. Quando se varia o controle *m,* tem-se a translação paralela ao eixo horizontal da elipse, e quando se varia o controle *n* a variação será paralela ao eixo vertical.

Foi necessária, também, a criação de parâmetros para os valores de *a* e *b*, pois a partir deles, é possível fazer a variação na altura e no comprimento da elipse. Quando se varia o controle *a,* tem-se a manipulação do comprimento da elipse no eixo *x*. Quando se varia o controle *b,* a variação da altura da elipse no eixo *y*. É interessante observar que, quando *a* e *b* forem iguais tem-se uma circunferência. É pertinente salientar, também, que com a variação dos valores de *a* e *b*, é possível obter em uma única construção uma elipse com eixo maior sobre o eixo das abscissas e também das ordenadas.

Durante essa construção, é válido evidenciar a relação pitagórica, que geralmente é utilizada na dedução algébrica da equação da elipse e, ainda, para encontrar a excentricidade. Algumas elipses são bem associadas a uma circunferência e outras são mais achatadas, característica que se determina de acordo com a excentricidade. Quanto mais próxima de zero, mais parecida será com uma circunferência, e quando mais próxima de um mais achatada será.

Diante da temática proposta, o professor deve ser livre para fazer os ajustes que achar necessário. Outras diversas funcionalidades são possíveis de serem realizadas com a utilização do *software*. A partir da familiarização do docente com o programa, acredita-se que novas ideias possam surgir e cada construção possa ter algumas peculiaridades. Sugere-se que, em seguida, o professor apresente aos alunos problemas extraídos de livros didáticos ou de sua preferência. Além das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, podem ser propostas atividades extraclasse para resolução de problemas e fixação de conteúdo.

4.3.3 Passo a passo:

1. Crie 4 controles deslizantes e chame-os de *a, b, m* e *n*. Para isso, selecione a ferramenta *controle deslizante*, , sugere-se o intervalo de 0 até 4 e incremento 1.
2. Em seguida, insira no campo de entrada da janela de álgebra a equação da elipse e associe-a a cada parâmetro (controle deslizante). Insira a expressão *(x-m)^2/a^2 +(y-n)^2/b^2 = 1*
3. No campo de entrada da janela de álgebra, insira *Eixo Maior (<cônica>)*, no caso tem-se *Eixo Maior(eq1)*, pois *eq1* é o nome da cônica. Isso criará uma reta.
4. No campo de entrada da janela de álgebra, insira *Eixo Menor (<cônica>)*, no caso tem-se *Eixo Menor(eq1)*. Isso criará uma reta.
5. Utilize a ferramenta *interseção de dois objetos*. Faça a interseção da reta com a elipse, criando, assim, os pontos que serão os vértices. Em seguida, renomeie-os para A_1, A_2, B_1, B_2. Para isso, selecione com o botão direito do mouse e escolha a opção *renomear*, utilize os seguintes nomes A_1, A_2, B_1, B_2.
6. Em seguida, oculte a reta. Para isso, clique com o botão direito do mouse e escolha a opção *exibir objeto*. Jamais apague, apenas esconda. Apagar um elemento inoportuno pode prejudicar toda construção. A reta some, mas os vértices ficam.
7. Utilize a ferramenta *segmentos* e unir A_1A_2 e B_1B_2.
8. Para inserir os focos da cônica, insira no campo de entrada da janela de álgebra *Foco(eq1)* e, em seguida, renomeie os pontos criados para F_1 e F_2.
9. Crie outro ponto qualquer sobre a elipse de forma que se possa movimentá-lo sobre ela. Para isso, utilize a ferramenta *ponto* e renomeie para ser o ponto P.
10. Utilize a ferramenta *segmentos* crie os segmentos F_1P e F_2P, renomeie-os para *f* e *g*.
11. Na soma dos segmentos, F_1P e F_2P será uma constante, então digite no campo de entrada da janela de álgebra a operação s = f + g. Perceba que, ao deslocar o ponto P, a soma permanece a mesma. Isso permite trabalhar a definição de elipse. Exiba em tela a operação *soma*. Basta arrastar a variável da janela de álgebra para a janela de visualização.
12. Um aspecto interessante nessa construção é trabalhar a relação pitagórica. Para isso, construa três *segmentos* de reta que ligam os pontos: B_1O, OF_1 e F_1B_1. Renomeie os rótulos dos segmentos para *a, b* e *c*.
13. Uma ferramenta bastante interessante para manter a organização da construção são as caixas para esconder/exibir objetos disponíveis no menu de ferramentas. Uma opção é criar uma *caixa para exibir objetos* para esconder o triângulo retângulo presente na figura e só mostrá-lo quando desejar evidenciar

essa relação. Ao criar a caixa, deve-se selecionar o nome do polígono e os segmentos que o criaram. Chama-se a caixa de relação pitagórica.

14. Sabe-se que a excentricidade é dada pela razão dos valores de *c* por *a*. De acordo com o triângulo formado, tem-se $a^2=b^2+c^2a^2=b^2+c^2$, então $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ Insira no campo de entrada da janela de álgebra a operação *c=sqrt(a^2-b^2)*. Esse comando criará a variável *c* e atribuirá um valor a ela, de acordo com os controles deslizantes *a* e *b*.

15. Em seguida, insira no campo de entrada da janela de álgebra a operação *e=c/a*, e será a excentricidade da elipse. Mostre em tela o valor de *e*. Basta arrastar a variável da janela de álgebra para a janela de visualização.

16. Para finalizar a construção, o docente fica livre para fazer os ajustes que julgar necessário. Como por exemplo, inserir a definição de elipse na tela utilizando a ferramenta texto ᴬᴮᶜ. Outra opção é habilitar o rastro no ponto P e animá-lo para visualizar a silhueta da elipse.

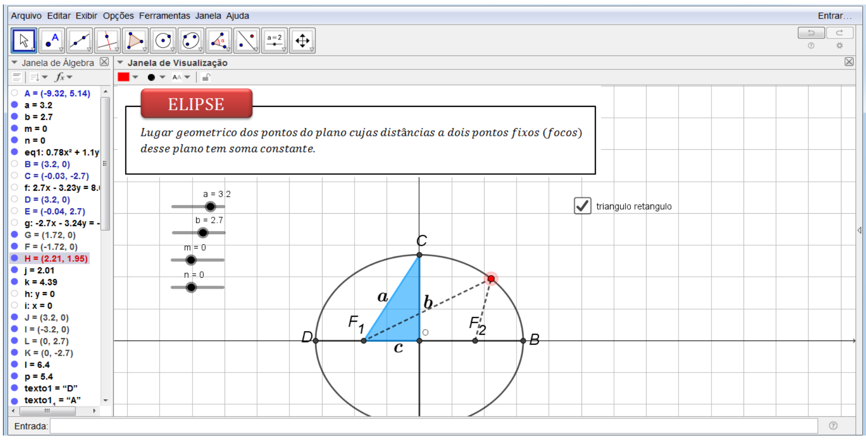

FIGURA 3 – Construção da elipse com controles deslizantes
FONTE: Elaboração própria (2021).

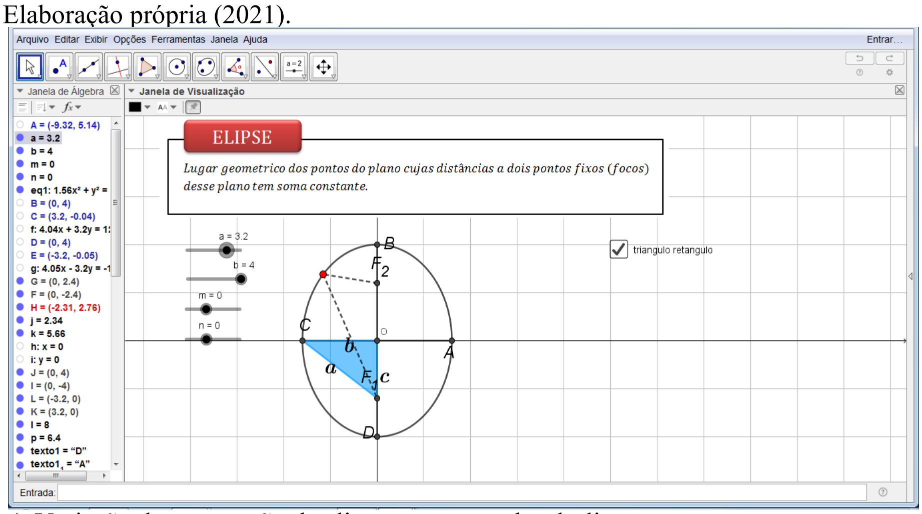

FIGURA 4: Variação da construção da elipse com controles deslizantes
FONTE: Elaboração própria (2021).

As figuras 3 e 4, mostram a construção após finalizada. A figura 3 evidencia o caso em que a elipse apresenta eixo maior sobre o eixo das abcissas e a figura 4 apresenta a elipse com eixo maior sobre o eixo das ordenadas.

4.4 Sequência Didática 02: Construção dinâmica da hipérbole utilizando controles deslizantes para translação de eixos

Na segunda sequência didática, descreve-se o passo a passo da construção da hipérbole, por meio do *software* GeoGebra Classic 5, mostrando suas principais características matemáticas, de forma dinâmica. Assim, permite-se, por sua vez, a visualização de suas propriedades matemáticas e os conceitos de forma mais concreta.

4.4.1 Objetivos

Com essa construção, espera-se estudar a definição de hipérbole a partir de sua construção geométrica e identificar os seus componentes (foco, eixo real e imaginário, vértice, distância focal, excentricidade, entre outros). Em seguida, fazer a dedução geométrica e analítica da equação reduzida da hipérbole, com vértice na origem e sobre um ponto qualquer. Pretende-se analisar os dois casos da hipérbole: eixo maior sobre o eixo das abscissas e eixo maior o eixo das ordenadas. E, por fim, trabalhar e compreender as retas assíntotas.

4.4.2 Metodologia

De maneira análoga à construção da elipse, o objetivo da construção da hipérbole é caracterizar os elementos que a compõem, trabalhando definições, conceitos e propriedades. O professor deverá se orientar pela sequência de passos sugeridos, sendo livre para fazer os ajustes que julgar necessários.

Na construção da cônica anterior, partiu-se da equação reduzida da elipse com eixo maior sobre o eixo das abscissas e conseguiu-se, com a utilização de controles deslizantes, manipular a construção para que ela se transformasse em uma elipse com eixo maior sobre o eixo das ordenadas. Dessa forma, uma única figura atingia as duas situações necessárias para o estudo das equações da elipse.

Já na construção da hipérbole, analisando algebricamente as duas equações reduzidas para os casos em que os focos estão sobre as ordenadas e, no caso de estarem sobre as abcissas, torna-se inviável utilizar a mesma lógica da construção anterior. Dessa forma, para conseguir fazer a permutação do eixo real com o eixo imaginário, seria necessário fazer com que o valor da variável x na equação assumisse um valor negativo. Isso dependeria do valor do parâmetro a, mas o parâmetro está elevado ao quadrado, logo o valor de x permanece positivo.

O docente pode optar por uma construção na qual trabalhe a cônica apenas de acordo com suas características geométricas, ou seja, poderia construir a figura apenas utilizando a ferramenta *cônicas* e ter uma representação mais superficial da figura. Optou-se por uma construção a partir da equação da hipérbole. De acordo com a inviabilidade de representar em uma única construção os dois casos da hipérbole, sugere-se a opção do docente construir duas hipérboles na mesma tela, o que permitiria trabalhar as características das duas situações simultaneamente.

O programa utilizaria os mesmos controles deslizantes e nomearia os elementos com letras que não foram utilizadas na primeira hipérbole. Utilizando a ferramenta *caixa* para exibir objetos, pode-se esconder as hipérboles e mostrá-las quando for conveniente. Outra opção seria abrir um novo arquivo e construir separadamente cada um dos casos. Optou-se por construir as duas hipérboles, mas como já foi mencionado, o docente fica livre para fazer os ajustes que julgar necessários. Como será apresentada a sequência de passos para a construção das duas situações, basta o docente escolher o que melhor se aplica ao seu objetivo.

O conjunto de ferramentas utilizadas serão praticamente os mesmos, tendo em vista que as características que se deseja trabalhar são bem parecidas. Nessa construção, serão apresentadas algumas das propriedades, os elementos principais e mostrado como a equação da hipérbole muda quando se varia alguns de seus elementos. Será discutida, também, a propriedade da distância de um ponto da hipérbole aos focos que a caracteriza, partindo-se da equação reduzida da hipérbole com centro em um ponto qualquer, pois ela engloba também a situação de centro na origem.

É necessário observar quais variáveis precisam de parâmetros. Feito isso, percebe-se a necessidade de criar controles deslizantes para realizar a translação de eixos. Foram criados os parâmetros m e n para que seja possível fazer essa translação vertical e horizontal. Quando m e n forem a cônica, estará com centro na origem. Foi necessário, também, a criação de parâmetros para os valores de a e b, pois a partir deles, pode-se movimentar os ramos da hipérbole.

Terminada a construção, é interessante apresentar a hipérbole formalmente, aplicando a definição de hipérbole e utilizando os conceitos sobre distância entre dois pontos para que chegue à equação reduzida da curva, levando em consideração o caso de a hipérbole apresentar vértice na origem, e no caso dela apresentar vértice sobre um ponto qualquer.

O docente, ao construir a hipérbole, pode discutir outras questões pertinentes a este conteúdo durante a realização da atividade com os alunos. Conforme as dificuldades encontradas pelos alunos, é importante dar algumas dicas, mas sempre permitindo que raciocinem, errem e possam retomar a atividade. Pode ser que alguns discentes demorem a encontrar a solução e precisem de mais tempo. É nesse ponto da atividade que se fixam os conceitos e visualizam a forma.

4.4.3 Passo a passo: Hipérbole com focos pertencentes ao eixo das abscissas

1. Crie 4 controles deslizantes e chame-os de *a, b, m* e *n*. Para isso, selecione a ferramenta *controle deslizante* , sugere-se o intervalo de 0 até 4 e incremento 1.

2. Insira no campo de entrada da janela de álgebra a equação *c=sqrt(a^2+b^2).* Isso criará a variável *c*.
3. Insira no campo de entrada da janela de álgebra a equação da elipse e associe-a a cada parâmetro (controle deslizante). Insira a expressão *(x-m)^2/a^2 - (y-n)^2/b^2 = 1*
4. Insira os focos da cônica, incluindo no campo de entrada da janela de álgebra *Foco(eq1)* e, em seguida, renomeie os pontos criados para F_1 e F_2.
5. Utilize a ferramenta *segmentos* e una os focos F_1F_2, o que dará a distância focal.
6. Utilize a ferramenta *interseção de dois objetos* e faça a interseção dos ramos da hipérbole, com o segmento de reta que caracteriza a distância focal, criando assim os pontos que serão os vértices, em seguida, renomeie para A_1, A_2. Para isso, selecione com o botão direito do mouse e escolha a opção *renomear*. A distância de A_1 A_2 será o eixo real.
7. Insira a reta que contém o eixo imaginário, utilizando a ferramenta *ponto médio* e clique em F_1 e F_2 respectivamente, criando assim o ponto médio sobre o eixo real (chame-se o ponto médio de M). Em seguida, crie uma reta perpendicular sobre o ponto médio, utilizando a ferramenta *reta perpendicular* . Essa reta será o suporte para o eixo imaginário.
8. Utilize a ferramenta *reflexão em relação a uma reta* e crie o semieixo imaginário.
9. Um aspecto interessante nesta construção é trabalhar a relação pitagórica. Para isso, crie segmentos que podem ser chamados de *a*, *b* e *c,* que formarão o triângulo. Dependendo do controle deslizante, o segmento *b* estará sobre o eixo imaginário ou paralelo a ele. Para criar o segmento *b*, utiliza-se o comando *Segmento (<ponto>,<comprimento>)* no campo de entrada da janela de álgebra, o que permitirá criar um segmento a partir de um ponto fixo e com comprimento estabelecido. Nesse caso, crie o segmento a partir do ponto médio e com o comprimento estabelecido pelo controle deslizante *b*. Insira no campo de entrada da janela de álgebra: *Segmento(M,b).* A partir daí, foi criado o segmento *b* (o programa o nomeou de *h*).
10. Observe que o segmento *h* não está fixado ao eixo imaginário. Para fixá-lo, crie uma reta perpendicular ao segmento g. Utilize a ferramenta *reta*

perpendicular e clique sobre o ponto que está solto no segmento *h*. (Nesse caso é o ponto E).

11. Em seguida, faça a interseção do eixo imaginário com a reta perpendicular criada anteriormente, utilizando a ferramenta *interseção de dois objetos*. Será criado um novo ponto sobre o ponto E. Nesse caso, foi criado o ponto F. O ponto E e a reta criada, por não servirem, podem ser ocultados. Em seguida, oculte a reta. Para isso, clique com o botão direito do mouse e escolha a opção *exibir objeto*. Jamais apague, apenas esconda. Apagar um elemento inoportuno pode prejudicar toda construção.
12. Para criar o segmento *c*, traça-se um segmento de reta do ponto F até A1. Para isso, utilize a ferramenta *segmento*.
13. Utilize a função *assintota(<cônica>)*, a partir do campo de entrada da janela de álgebra, inserindo *assintota(eq1)*, comando que criará as retas. Uma ferramenta bastante interessante para manter a organização da construção são as caixas para esconder/exibir objetos disponíveis no menu de ferramentas. Uma opção é criar uma *caixa para exibir objetos* para esconder os elementos e ir mostrando-os aos poucos. Isso resultará numa construção mais organizada visualmente.

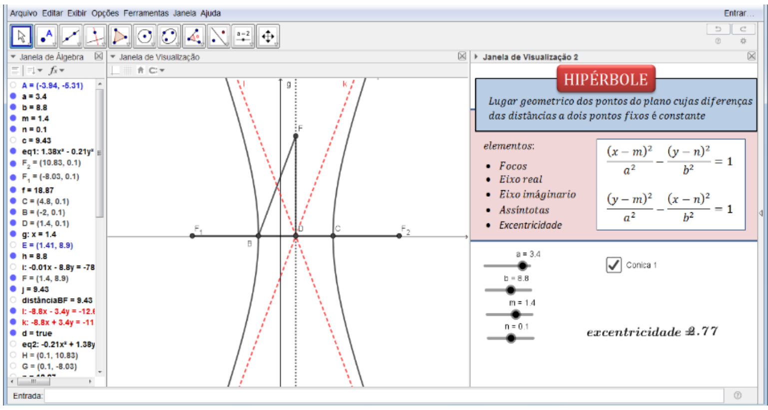

FIGURA 5 – Construção da hipérbole com controles deslizantes
FONTE: Elaboração própria (2021).

4.4.4 Passo a passo: Hipérbole com focos pertencentes ao eixo das ordenadas

1. Crie 4 controles deslizantes e chame-os de *a, b, m* e *n*. Para isso, selecione a ferramenta *controle deslizante*, sugere-se o intervalo de 0 até 4 e incremento 1.
2. Insira no campo de entrada da janela de álgebra a equação *c=sqrt(a^2+b^2)*, o que criará a variável *c*.
3. Insira no campo de entrada da janela de álgebra a equação da elipse e associe-a a cada parâmetro (controle deslizante). Insira a expressão *(y-m)^2/a^2 - (x-n)^2/b^2 = 1.*

4. Insira os focos da cônica, incluindo no campo de entrada da janela de álgebra *Foco(eq1)* e, em seguida, renomeie os pontos criados para F_1 e F_2.
5. Para verificar se a diferença da distância entre F_1P e F_2P sempre será uma constante, utilize a ferramenta *ponto* , criando um ponto móvel sobre um dos ramos da hipérbole e, com a ferramenta segmentos, crie o segmento F_1P e F_2P.
6. Utilize a ferramenta *segmentos* , unindo os focos F_1F_2, o que dará a distância focal.
7. Utilize a ferramenta *interseção de dois objetos*, fazendo a interseção dos ramos da hipérbole com o segmento de reta que caracteriza a distância focal, criando assim os pontos que serão os vértices, em seguida os renomeia-se para A_1, A_2. Para isso, selecione com o botão direito do mouse e escolha a opção *renomear*. A distância de A_1 A_2 será o eixo real.
8. Insira a reta que contém o eixo imaginário, escolhendo a ferramenta *ponto médio*
e clique em F_1 e F_2 respectivamente, criando assim o ponto médio sobre o eixo real (chame-se o ponto médio de M). Em seguida, crie uma reta perpendicular sobre o ponto médio, utilizando a ferramenta *reta perpendicular*. Essa reta será o suporte para o eixo imaginário.
9. Utilize a ferramenta de *reflexão em relação a uma reta* e crie o semieixo imaginário.
10. Um aspecto interessante nesta construção é trabalhar a relação pitagórica. Para isso, crie os segmentos que serão chamados de *a*, *b* e *c*, formando o triângulo. Dependendo do controle deslizante, o segmento *b* estará sobre o eixo imaginário ou paralelo a ele. Para criar o segmento *b*, utilize o comando *segmento(<ponto>,<comprimento>)* no campo de entrada da janela de álgebra, isso permitirá criar um segmento a partir de um ponto fixo e com comprimento estabelecido. Nesse caso, crie o segmento a partir do ponto médio e com o comprimento estabelecido pelo controle deslizante *b*. Insira no campo de entrada da janela de álgebra: *segmento(M,b)*. A partir daí, foi criado o segmento *b* (o programa o nomeou de *h*).
11. Observe que o segmento *h* não está fixado ao eixo imaginário. Para fixá-lo, crie uma reta perpendicular ao segmento *g*. Utilize a ferramenta *reta perpendicular* e clique sobre o ponto que está solto no segmento *h*. (Nesse caso é o ponto E).
12. Crie a interseção do eixo imaginário com a reta perpendicular criada, utilizando a ferramenta *interseção de dois objetos*. Será criado um novo ponto sobre o ponto E. Nesse caso, foi criado o ponto F. O ponto E e a reta criada quando não servir mais poderá ser ocultada. Em seguida, oculte a reta. Para isso, clique com o botão direito do mouse e escolha a opção *exibir objeto*.
13. Para criar o segmento *c*, trace um segmento de reta do ponto F até A_1, utilizando a ferramenta *segmento* .

14. Utilize a função *assintota(<cônica>)*, a partir do campo de entrada da janela de álgebra, inserindo *assintota(eq1)*, pois esse comando criará as retas.
15. Para calcular a excentricidade, insira no campo de entrada da janela de álgebra a operação *e=c/a*, a excentricidade varia de acordo com o valor dos controles.

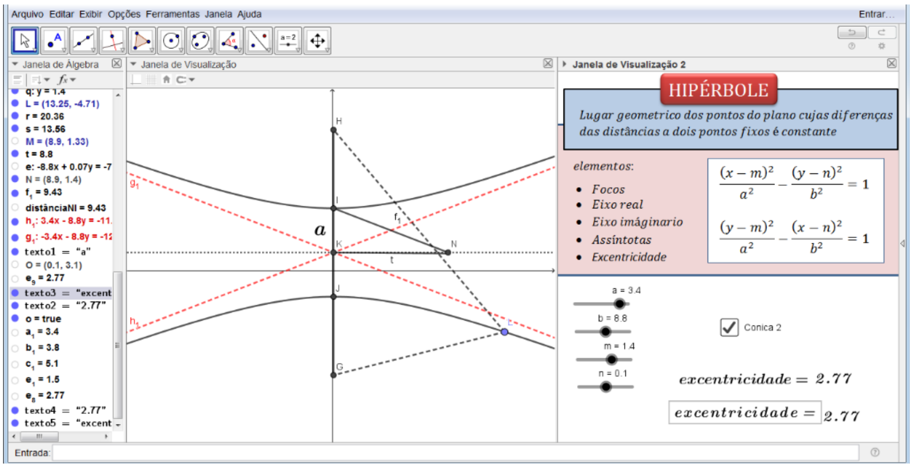

FIGURA 6: Variação da construção da hipérbole com controles deslizantes
FONTE: Elaboração própria (2021).

As figuras 5 e 6, mostram as construções das hipérboles, após finalizadas. A figura 5 evidencia o caso em que a hipérbole possui focos pertencentes ao eixo das abcissas, e a figura 6 apresenta a hipérbole com focos pertencentes ao eixo das ordenadas.

Considerações Finais

Este trabalho teve por objetivo apresentar e descrever um caminho para o ensino de cônicas (elipse, hipérbole e parábola), por meio do GeoGebra, na perspectiva de desenvolvimento do pensamento geométrico espacial de alunos do Ensino Médio. A partir do estudo realizado, percebe-se que é necessário maior incentivo para professores, no que diz respeito ao ensino da geometria de forma dinâmica, uma vez que proporciona ao aluno a capacidade de desenvolver o pensamento lógico e a melhor compreensão para lidar com situações do cotidiano.

Nessa pesquisa de caráter qualitativo, que tomou por base periódicos científicos nacionais, apresentou-se um estudo teórico sobre as melhorias trazidas pela utilização de recursos tecnológicos no ensino, tentando-se apresentar e descrever alternativas de aliar o ensino de conteúdos de Geometria Analítica a tecnologias aplicadas ao ensino dos estudantes. Em linhas gerais, o principal objetivo foi promover um encadeamento da utilização da Geometria Dinâmica no contexto das cônicas, pautadas na metodologia da Engenharia Didática. Dessa forma, foram trabalhados nesse panorama os principais elementos que compõem esse conteúdo, do 3º ano do Ensino Médio, apresentando-se pressupostos teóricos sobre o *software* utilizado como ferramenta de ensino.

Os principais fatores limitantes do estudo foram: a pouca quantidade de trabalhos publicados sobre o uso do GeoGebra para o ensino de cônicas na disciplina de Matemática; a complexidade de analisar todo o material da pesquisa, pois se trata de uma área que necessita de mais estudos, principalmente no que diz respeito a como utilizar o *software* nos conteúdos dentro de sala de aula; a pouca quantidade de modelos que utilizam o GeoGebra para construção sequências didáticas voltadas ao estudo de cônicas; bem como a falta de uma melhor formação e capacitação para utilização do programa.

As discussões e reflexões feitas durante a construção desse trabalho mostraram-se relevantes no sentido de romper com os paradigmas existentes e contribuir para alcançar um ensino de qualidade, investindo na formação continuada de professores. A formação continuada serve também para mostrar que as novas tecnologias não causam nenhum efeito se não forem utilizadas da maneira correta, sendo necessário um posicionamento e direcionamento da parte de cada docente.

Nesse sentido, é importante ressaltar o papel do professor de apontar novas maneiras de abordar os conteúdos de Geometria no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que estes devem estar preparados para aproveitar os benefícios e potenciais dessas tecnologias computacionais, utilizando-as a favor de processos de ensino e aprendizagem significativos. Percebeu-se a necessidade de o professor de matemática explorar inicialmente o *software* antes de utilizá-lo, pois quanto mais se conhece, mais ferramentas surgem e novas ideias podem ser construídas.

Considerando as contribuições do uso de tecnologias, em especial no ensino de Geometria com a utilização de *softwares* de geometria dinâmica, pode-se apontar que muitas são as possibilidades para desenvolver atividades e propor situações de ensino. O primeiro aspecto refere-se à possibilidade de propor outra possibilidade de trabalhar os conteúdos de cônicas (elipse, hipérbole e parábola) por meio de simulações, visto que esse conteúdo tem pouco espaço nas aulas e no material didático. Contudo, em detrimento de outros conteúdos que são vistos com maior visibilidade, muitos alunos acabam não chegando a estudar esse conteúdo matemático.

Espera-se que este trabalho colabore na valorização deste conteúdo, que tem importância, inclusive, no cotidiano das pessoas, tendo assim diversas possibilidades de estudos futuros, como por exemplo analisar a aplicação da sequência concebida, identificando a contribuição desta na aprendizagem dos elementos das cônicas.

Finaliza-se a pesquisa, destacando a importância de considerar as contribuições da Geometria Dinâmica para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, visando superar as dificuldades de visualização e o desenvolvimento do pensamento geométrico, atribuído à defasagem no ensino da Geometria, por meio de métodos usuais que continuam sendo privilegiados em detrimento do pensamento geométrico.

Referências

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

BENNEMANN M., ALLEVATO N.S.G. Utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação nas aulas de Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática** – ULBRA. v. 16, n. 3, 2014).

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática na Educação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: MEC/CNE, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF _110518_ versaofinal_site.pdf. Acesso em: 12 fev. 2021.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1997, Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/ pdf/livro01.pdf. Acesso em: 10 fev 2021.

DIAS. M. S. S. Resolução de problemas geométricos no GeoGebra. **Revistas Eletrônicas da PUC-SP**. v.1. n.1. São Paulo. 2012.

DOLZ, Joaquim; SCHNEUWLY, Bernard. Gêneros e progressão em expressão oral e escrita – elementos para reflexões sobre uma experiência suíça (francófona). In: SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim e colaboradores. **Gêneros orais e escritos na escola**. [Tradução e organização: Roxane Rojo e Glaís Sales Cordeiro]. Campinas-SP: Mercado de Letras, 2004.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

HENRIQUE M. P.; BAIRRAL M. A. Retas que se cortam e dedos que se movem com dispositivos de geometria dinâmica.**Educação Matemática Pesquisa**. v. 21, n. 1 (2019).

LEONARDO, F. M. **Conexões com a matemática**. 2º ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LOPES, E. M. C.; SOUZA JUNIOR, A. J. Ensinar e aprender geometria analítica com tecnologias digitais por meio de um trabalho colaborativo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 2, p. 66-79, 2019.

LOPES. S. P. **Uma sequência didática para o ensino de parábola enquanto lugar geométrico.** Dissertação (Mestrado) - PUC- SP. São Paulo, 2014. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11008 Acesso em: 22 de abr de 2021.

MENEZES, L. C. de. Matemática em todas as disciplinas. **Revista Nova Escola**, São Paulo, edição 215, set. 2008.

NASCIMENTO F., GOMES N. D. C, CASTRO E.Geometria Analítica com uso do *software*GeoGebra: Experiências vivenciadas no contexto escolar.**Portal de Periódicos da Faculdade de Letras** - UFMG. n.1.v.4. 2015.

PAIS, L C. **Didática da Matemática:uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**. v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993

QUARANTA NETO, F. Tradução comentada da obra "Novos elementos das seções Cônicas"

(PHILIPPE de LA HIRE – 1679) e sua relevância para o ensino médio de matemática. **Dissertação** (Mestrado). UFRJ, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: https://1library.org/ document/y950gwwz-traduc-comentada-obra-novos-elementos-sec-nicas-ebook.html Acesso em 23 jan de 2021.

SILVA, M. B. Secções Cônicas: atividades com Geometria Dinâmica com base no Currículo do Estado de São Paulo. **Dissertação** (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/ article/view/34778. Acesso em: 25 setembro de 2019.

SILVEIRA A. P. R. O GeoGebra como ferramenta de apoio para aprendizagem significativa da Geometria. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática.** v. 7, n. 1 (2018).

VALENTE, J. A; ALMEIDA, F. J. Visão analítica da informática na educação no Brasil: a questão da formação do professor. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, Florianópolis, v. 1, 1997.

VIANA O. A., BOIAGO C. E. P. Registros de representação semiótica em atividades de desenho geométrico no GeoGebra. **Revista Matemática de Educação Eletrônica**. v. 10, n. 1 2015.

ZABALA, A. **A Prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

ZANELLA, I. A.; FRANCO, V. S.; CANAVARRO, A. P. Realizar Construções Geométricas com o GeoGebra: A contribuição do ambiente de geometria dinâmica para o futuro professor de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Vol. 7, n. 14. 2018