

## HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

RITMOS, ARTE Y GEOMETRÍA

MATEMÁTICOS GALARDONADOS CON EL PREMIO NOBEL

## EXPERIENCIAS DOCENTES

UNA PRÁCTICA PARA FOMENTAR EL TRABAJO EN EQUIPO SECUENCIAL EN MATERIAS MATEMÁTICAS

## INVESTIGACIÓN

REGLA DE LA PARÁBOLA ASIMÉTRICA Y COTA DE ERROR PARA INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE FUNCIONES EN INTERVALOS EQUISPACIADOS

MEJORA DE CONVERGENCIA DE ALGORITMOS

FUNCIÓN PARTE ENTERA Y ALGUNAS PROPIEDADES

## JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS VÉDICAS

## CUENTOS MATEMÁTICOS

GORO EL OGRRO

## CRÍTICAS Y RESEÑAS

PROYECTO COLABORATIVO CUENTAMATES EN EXPERIMENTA MATES

## ENTREVISTA A:

PEDRO DANIEL PAJARES GALEANO  
"DE MONOLOGUISTA A DOCENTE"



Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen XII, Número 1, Abril 2022

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y  
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC

Ilustración de portada / Superficie minimal (Giroide) renderizada por Javier Cayetano Rodríguez

Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohíbe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

# Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático  
y  
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid



Volumen XII, Número 1, ISSN 2174-0410

## Coordinación Comité Editorial

Mariló López González  
Sagrario Lantarón Sánchez  
Javier Rodrigo Hitos  
José Manuel Sánchez Muñoz

## Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Javier Rodrigo Hitos,  
José Manuel Sánchez Muñoz, Fernando Chamizo Lorente, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey,  
Alfonso Garmendia Salvador, Fernanda Ramos Rodríguez, Santiago Higuera de Frutos, Trinidad Menárguez Palanca,  
María Isabel Garrido Carballo, Luigi Montoro, María Medina de la Torre, Susana Merchán Rubira

1 de abril de 2022





# Índice de Artículos

Editorial del Número 1 (Vol. XII) ..... 1

## Investigación

Regla de la parábola asimétrica y cota de error para integración numérica de funciones en intervalos equiespaciados ..... 5

*José Manuel Recio-López*

Mejoras de convergencia de algoritmos ..... 17

*Federico Ruíz López*

Función parte entera y algunas propiedades ..... 57

*Juan Carlos Arango Parra y Yeisson Alexis Acevedo Agudelo*

## Experiencias Docentes

Una práctica para fomentar el trabajo en equipo secuencial en materias matemáticas ..... 77

*Javier Rodrigo Hitos y Susana Merchán Rubira*

## Historias de Matemáticas

Ritmos, Arte y Geometría ..... 85

*Jesús Alonso*

Matemáticos galardonados con el Premio Nobel ..... 139

*Juan Núñez Valdés y Luis Rabasco González*

## Juegos y Rarezas Matemáticas

Matemáticas Védicas ..... 171

*Santiago Higuera de Frutos*

## Cuentos Matemáticos

Goro el ogro ..... 185

*Javier Rodrigo Hitos*

## Críticas y Reseñas

Proyecto colaborativo CuentaMates en Experimentamates ..... 189

*Alejandra Fernández Sánchez, Verónica Navarro Fernández y Javier Rodrigo Hitos*

## Entrevista

Pedro Daniel Pajares Galeano ... “de monologuista a docente” ..... 195

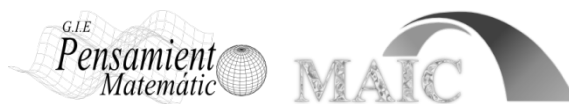
*José Manuel Sánchez Muñoz*



# Editorial del Número 1 (Volumen XII)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 001-004, ISSN 2174-0410

1 de abril de 2022

## Resumen

Este es el número 1 del volumen XII de Pensamiento Matemático del año 2022. A partir de él, la publicación de la Revista será anual, todos los meses de abril se pondrá a disposición de todo el mundo un nuevo número de Pensamiento Matemático.

Seguimos mejorando en lo que se refiere a la Covid-19 pese a que se abren otros frentes preocupantes como la guerra de Ucrania. Esperamos que la lógica se imponga y seamos capaces de vivir en paz.

Como siempre, en este número de Pensamiento Matemático se incluyen una variedad de trabajos interesantes distribuidos en cada una de las secciones de la publicación.

## Abstract

This is number 1 of volume XII of the Journal of the year 2022. From then on, the publication of the Journal will be annual, every April a new number of Mathematical Thought will be made available to everyone.

We continue to improve with regard to Covid-19 despite the fact that other worrying fronts are opening up, such as the war in Ukraine. We hope that logic prevails and we are able to live in peace.

As always, this issue of Mathematical Thought includes a variety of interesting works distributed in each of the sections of the publication.

## Introducción

Tras unos años complicados en torno a la salud mundial que gracias a la Ciencia parecen estar encaminándose, otros problemas importantes preocupan al mundo. Todos esperamos que se encuentre una solución óptima al conflicto en Ucrania y solo debamos ocuparnos de temas que conciernen al conocimiento y la educación académica.

Nuestra Revista ha recibido trabajos de gran interés que queremos compartir con todo el público interesado en las matemáticas. En este segundo volumen del año se incluyen los siguientes artículos que estamos seguros os interesarán.

A partir de este momento, la Revista pasará a ser anual y publicaremos los números en el mes de abril.

## Investigación

*Regla de la parábola asimétrica y cota de error para integración numérica de funciones en intervalos equiespaciados.* Este trabajo presenta un método de integración numérica para una función definida en un intervalo  $[a, b]$  equiespaciado con  $n$  subintervalos. Determina una cota del error cometido entre la aproximación por dicho método y el valor exacto de la integral para una función de integral conocida.

*Mejoras de convergencia de algoritmos.* Un trabajo que analiza el proceso de obtención de soluciones de ecuaciones no lineales, mediante procedimientos iterativos, basados en los teoremas de punto fijo. El artículo puede considerarse además como una introducción a la teoría de sistemas dinámicos discretos.

*Función parte entera y algunas propiedades.* En este artículo se analizan algunas de las propiedades de la función parte entera desde una componente algebraica. Adicionalmente, se estudian algunas aplicaciones y contextos matemáticos donde dicha función toma sentido.

## Experiencias Docentes

En la sección dedicada a compartir experiencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se publica la siguiente interesante propuesta:

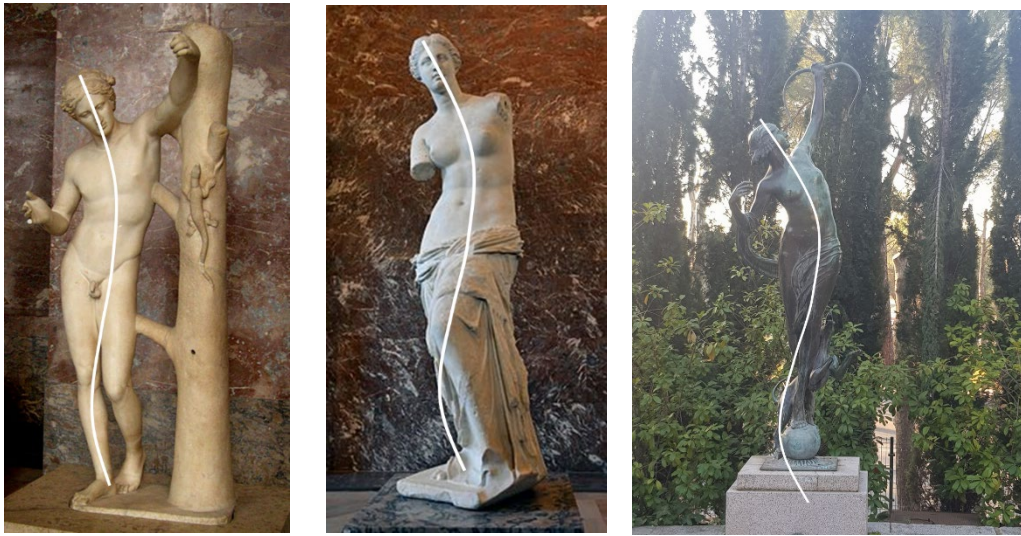
*Una práctica para fomentar el trabajo en equipo secuencial en materias matemáticas,* presenta la realización de una práctica con ordenador en la que los estudiantes de segundo curso de ingeniería informática, divididos en grupos, se enfrentaban a la resolución de una parte de un problema en la que es necesario la resolución de la parte realizada por otros grupos. Con ellos se fomenta el trabajo secuencial en equipo.

La práctica, encuadrada en la asignatura de Matemática Discreta, consistía en el cifrado y descifrado de un mensaje utilizando el algoritmo RSA y un software matemático del grupo Wolfram, como es el Mathematica.

## Historias de Matemáticas

Esta sección incluye estudios sobre matemáticas y sus aplicaciones, así como artículos de historia de la matemática. En este número se presentan dos trabajos con diferente enfoque:

*Ritmos, Arte y Geometría* es un precioso artículo donde Arte, Música y Matemáticas se enredan. En este trabajo se hace un recorrido por distintas manifestaciones del arte, ya sea pintura, escultura, fotografía, moda, arquitectura, ingeniería, artes decorativas y otras, recogiendo sus relaciones con los ritmos musicales y sus características geométricas.



*Matemáticos galardonados con el Premio Nobel* nos presenta las biografías de los matemáticos que llegaron a ser premiados en algunas de las modalidades en las que los Premios Nobel se conceden, no solo científicas, como Física o Química, sino también en Economía o incluso en Literatura.

## Juegos y rarezas matemáticas

*Matemáticas Védicas* expone algunas de las técnicas de cálculo en la literatura védica con la intención de despertar la curiosidad del lector. Propone una alternativa a los métodos clásicos tanto para ejercitar la mente a través del cálculo mental, como para que la enseñanza de las matemáticas en las edades tempranas se pueda hacer de una forma más amena.

## Cuentos

*Goro el ogro* es un cuento infantil, orientado a niños de 6 a 9 años en el que se introducen las operaciones aritméticas básicas.

## Reseñas

ExperimentaMates es un laboratorio ciudadano impulsado por la Comunidad SSERIES (Science for a Sustainable Envision of Reality and Information for an Engaged Society) de la Universidad Politécnica de Madrid, dentro de la alianza de universidades EELISA. Se presentó dentro de la convocatoria que formaba parte de la experiencia piloto de Red de Laboratorios Ciudadanos de la Comunidad de Madrid de universidades y centros de investigación impulsada por la Fundación para el Conocimiento Madri+d. CuentaMates ha sido uno de los proyectos que se seleccionaron y se llevaron a cabo dentro del laboratorio. *Proyecto*



*Colaborativo CuentaMates en Experimentamates* nos describe dicho proyecto en el que se ha pretendido realizar una página web que sea un repositorio de cuentos matemáticos para distintas edades y clasificado por métodos didácticos y/o contenidos.



## Entrevistas

El número se cierra con una entrevista a un docente “monolguista”: *Pedro Daniel Pajares Galeano*. José Manuel Sánchez del Comité Científico y Editorial de Pensamiento Matemático ha hablado con Pablo, divulgador y docente extremeño que ha sido elegido uno de los jóvenes extremeños más influyentes. Nos cuenta su experiencia.

# Investigación

## Regla de la parábola asimétrica y cota de error para integración numérica de funciones en intervalos equiespaciados

### Asymmetric parabolic rule and error bound for numerical integration of functions in equispaced intervals

José Manuel Recio-López

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 005–016, ISSN 2174-0410  
Recepción: 9 Oct'21; Aceptación: 10 Nov'21

1 de abril de 2022

#### Resumen

En este trabajo se presenta un método de integración numérica para una función definida en un intervalo  $[a, b]$  equiespaciado con  $n$  subintervalos de longitud  $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ . Además, se ha determinado una cota del error cometido entre la aproximación por dicho método y el valor exacto de la integral para una función de integral conocida.

Se compara este método con la regla de los trapecios analizando el error de la aproximación utilizando una función particular y se demuestra que el error es menor que el obtenido mediante la regla de los trapecios, proporcionando una cota para este error.

**Palabras Clave:** integración numérica, función discreta, regla de cuadratura, análisis modal de estructuras, mecánica experimental, integración de velocidades y aceleraciones, filtrado de señales.

#### Abstract

This work presents a method of approximated numerical integration of a function defined on an equispaced interval  $[a, b]$  with  $n$  subintervals of length  $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ . Furthermore, a bound of the error between the approximation by said method and the exact value of the integral has been determined for a function whose integral is known.

This method is compared with the trapezoidal rule analyzing the approximation error using a particular function demonstrating that this error is smaller than that obtained by the trapezoidal rule.

**Keywords:** numerical integration, discrete function, quadrature rule, modal analysis of structures, experimental mechanics, integration of velocities and accelerations, signal filtering.

## 1. Introducción

Uno de los intereses más frecuentes en investigación en mecánica de medios continuos es determinar la función integral de otra función, definida por un número finito de valores, por ejemplo, los valores del registro de datos de un acelerómetro; recogidas las aceleraciones la integración de dicho registro proporciona los valores de velocidad del móvil cuyas aceleraciones se han registrado.

Se utilizan frecuentemente la regla de los trapecios y la regla de Simpson para integración numérica de funciones, sin embargo las reglas de cuadratura de Durand [1] apenas se conocen. En 1894 el profesor e ingeniero mecánico W. F. Durand [1] sugirió una regla de integración denominada de la parábola asimétrica. Sin embargo, en el artículo de Walter W. Piegorsch [2] no queda claramente reflejada la obtención de dicha regla y, solamente es válida para el intervalo completo  $[a, b]$ , sin permitir obtener el valor de la función integral en un punto intermedio de dicho intervalo.

Con este artículo se pretende: la obtención de dicha regla de la parábola asimétrica en cada punto de integración y la acotación de su error –no determinadas por Durand–, así como poner de manifiesto que no se puede aplicar la regla de Simpson, si se desea obtener el valor de la función integral en puntos interiores del intervalo de integración.

La regla de los trapecios establece que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en el intervalo compacto  $[a, b]$  y  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  es una partición de  $[a, b]$  que divide a este intervalo en  $n$  partes iguales, entonces el valor

$$IT = \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(a)}{2} + f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right) \quad (1)$$

aproxima a la integral  $I = \int_a^b f(t)dt$  con un error

$$e_t = |IT - I| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} K_t \quad (2)$$

siempre que la función  $f(t)$  tenga derivada segunda continua y llamando  $K_t$  a una cota de la derivada segunda de la función  $f(t)$ , es decir  $K_t = |f''(v)|$  para  $v \in [a, b]$ .

Además, permite obtener el valor de la integral en el punto de integración  $t_k$  de forma recursiva según

$$IT_k = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ IT_{k-1} + \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(t_{k-1}) + f(t_k)}{2} \right) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

La regla de Simpson aplicada a una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con derivada cuarta continua en el intervalo compacto  $[a, b]$  y siendo  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  una partición de  $[a, b]$  que divide a este intervalo en  $n$  partes iguales, siendo  $n$  un número par, establece que

$$IS = \frac{b-a}{3n} (f(a) + f(b) + 4(f(t_1) + f(t_3) + \dots + f(t_{n-1})) + 2(f(t_2) + f(t_4) + \dots + f(t_{n-2}))) \quad (4)$$

aproxima a la integral  $I = \int_a^b f(t)dt$  con un error

$$e_s = |IS - I| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} K_s \quad (5)$$

siendo  $K_s$  una cota de la derivada cuarta de la función  $f(t)$ , es decir  $K_s = |f^{IV}(\xi)|$  para  $\xi \in [a, b]$ .

Además, se verifica, únicamente para los puntos de integración con índice par  $t_{2k}$ , que el valor de la integral es

$$IS_{2k} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ IS_{2k-2} + \frac{b-a}{n} (f(t_{2k-2}) + 4f(t_{2k-1}) + f(t_{2k})) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \end{cases} \quad (6)$$

La regla de Simpson, solamente es válida si el número de particiones  $n$  es un número par y no permite obtener el valor de la integral en los puntos con índice impar del intervalo de definición  $[a, b] = [t_0, t_n]$ .

Nace, por tanto, el interés de obtener una regla de integración que permita calcular el valor de la integral numérica de la función integrando  $f(t)$  en cualquier punto  $t_k$  de la partición  $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n\}$ , del intervalo de definición  $[a, b] = [t_0, t_n]$ , siendo  $n \in \mathbb{N}^*$  ( $n > 0$ ), considerando como función aproximante en el subintervalo  $[t_{k-1}, t_k]$  una función parabólica  $f_k^*(t)$ , definida como

$$f_k^*(t) = \alpha_{2k}t^2 + \alpha_{1k}t + \alpha_{0k} \quad (7)$$

La integral de la función  $f(t)$  se puede calcular de forma recursiva, como suma de integrales en cada uno de los subintervalos  $[t_{k-1}, t_k]$ , según

$$I_k = \int_{t_0}^{t_k} f(t)dt = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ I_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

Y sustituyendo la función  $f(t)$  por la función aproximante  $f_k^*(t)$  se obtiene la integral numérica

$$I_k^* = \int_{t_0}^{t_k} f_k^*(t)dt = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ I_{k-1}^* + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t)dt & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

## 2. Enunciado de la regla de la parábola asimétrica

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable cuatro veces y con derivada cuarta continua (es decir de clase  $C^4$ ) en el intervalo  $[a, b]$ . Sea  $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$  que divide a este intervalo en  $n$  partes iguales de longitud  $\Delta t = \frac{b-a}{n}$  ( $a = t_0$  y  $b = t_n$ ) y  $f(t_k) = f_k$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , los valores de la función en los puntos de la partición. Se tienen pues  $n$  subintervalos y  $n + 1$  puntos de integración.

El valor de la integral numérica en el punto  $t_k$ ,  $I^*(t_k) = I_k^*$ , partiendo del punto  $t_0$ , viene dado por la expresión siguiente:

$$I_k^* = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ I_{k-1}^* + \frac{\Delta t}{12} (5f_{k-1} + 8f_k - f_{k+1}) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ I_{k-1}^* + \frac{\Delta t}{12} (5f_k + 8f_{k-1} - f_{k-2}) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (10)$$

Además, el valor de la cuadratura de la integral de la función aproximante  $f^*(t)$  evaluada en todo el intervalo  $[a, b]$ ,  $I_n^*$ , que toma el valor:

$$I_n^* = \int_{a=t_0}^{b=t_n} f^*(t)dt = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t)dt \right) = \frac{b-a}{12} \sum_{k=0}^{k=n} (p_k f_k) \quad (11)$$

con:

$$p_k = \begin{cases} 5, & \text{si } k = 0 \\ 13, & \text{si } k = 1 \\ 12, & \text{si } k = 2 \\ 12, & \text{si } k = 3, \dots, n - 3 \\ 11, & \text{si } k = n - 2 \\ 15, & \text{si } k = n - 1 \\ 4, & \text{si } k = n \end{cases} \quad (12)$$

aproxima a la integral de la función  $f(t)$  en el intervalo  $[a, b]$ ,  $I_n = \int_a^b f(t)dt$ , con un error  $e_{pa}$  tal que:

$$e_{pa} = |I_n^* - I_n| = \left| \int_a^b f^*(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} B_1 + \frac{(b-a)^5}{90n^4} B_2 \quad (13)$$

siendo  $B_1 = |f^{III}(\mu)|$  y  $B_2 = |f^{IV}(\lambda)|$  con  $\mu, \lambda \in [a, b]$  tales que:  $|f^{III}(t)| \leq |f^{III}(\mu)|$  y  $|f^{IV}(t)| \leq |f^{IV}(\lambda)| \forall t \in [a, b]$ .

### 3. Demostración de la regla de la parábola asimétrica

Considérense los puntos:  $(t_{k-1}, f_{k-1}), (t_k, f_k), (t_{k+1}, f_{k+1})$  y la función que pasa por esos puntos  $f_k^*(t)$ , que aproxima a la función  $f(t)$  en el subintervalo  $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ :

$$f_k^*(t) = \alpha_{2k}t^2 + \alpha_{1k}t + \alpha_{0k} \quad (14)$$

Se definen las siguientes integrales de la función aproximante  $f_k^*(t)$ :

$$A_{1k} = \int_{t_k - \Delta t}^{t_k} f_k^*(t)dt = \int_{t_k - \Delta t}^{t_k} (\alpha_{2k}t^2 + \alpha_{1k}t + \alpha_{0k})dt \quad (15)$$

$$A_{2k} = \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} f_k^*(t)dt = \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} (\alpha_{2k}t^2 + \alpha_{1k}t + \alpha_{0k})dt \quad (16)$$

de tal forma que  $t_{k-1} = t_k - \Delta t$  y  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ , cuya representación gráfica puede verse en la figura 1.

Figura 1. Representación de la función aproximante  $f_k^*(t)$  en el intervalo  $[t_{k-1}, t_{k+1}]$  y las regiones  $A_{1k}$  y  $A_{2k}$

Integrando (15) y (16) resulta:

$$A_{1k} = \left[ \frac{\alpha_{2k}t^3}{3} + \frac{\alpha_{1k}t^2}{2} + \alpha_{0k}t \right]_{t_k - \Delta t}^{t_k} = \Delta t \left( \frac{\alpha_{2k}}{3}(3t_k^2 - 3\Delta t t_k + \Delta t^2) + \frac{\alpha_{1k}}{2}(2t_k - \Delta t) + \alpha_{0k} \right) \quad (17)$$

$$A_{2k} = \left[ \frac{\alpha_{2k}t^3}{3} + \frac{\alpha_{1k}t^2}{2} + \alpha_{0k}t \right]_{t_k}^{t_k + \Delta t} = \Delta t \left( \frac{\alpha_{2k}}{3}(3t_k^2 + 3\Delta t t_k + \Delta t^2) + \frac{\alpha_{1k}}{2}(2t_k + \Delta t) + \alpha_{0k} \right) \quad (18)$$

Para determinar los coeficientes de la parábola se impone que debe pasar por los tres puntos que la definen:

$$\text{para } t = t_{k-1} : f_{k-1} = f(t_{k-1}) = \alpha_{2k}(t_k - \Delta t)^2 + \alpha_{1k}(t_k - \Delta t) + \alpha_{0k} \quad (19)$$

$$\text{para } t = t_k : f_k = f(t_k) = \alpha_{2k}t_k^2 + \alpha_{1k}t_k + \alpha_{0k} \quad (20)$$

$$\text{para } t = t_{k+1} : f_{k+1} = f(t_{k+1}) = \alpha_{2k}(t_k + \Delta t)^2 + \alpha_{1k}(t_k + \Delta t) + \alpha_{0k} \quad (21)$$



siendo  $f_{k-1} = f(t_k - \Delta t)$ ,  $f_k = f(t_k)$  y  $f_{k+1} = f(t_k + \Delta t)$ .

El conjunto de ecuaciones (19), (20) y (21) se puede reescribir en forma matricial de la forma:

$$\begin{bmatrix} (t_k - \Delta t)^2 & t_k - \Delta t & 1 \\ t_k^2 & t_k & 1 \\ (t_k + \Delta t)^2 & t_k + \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2k} \\ \alpha_{1k} \\ \alpha_{0k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k-1} \\ f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (22) se obtiene:

$$\alpha_{2k} = \frac{f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}}{2\Delta t^2} \quad (23)$$

$$\alpha_{1k} = -\frac{(2t_k + \Delta t)f_{k-1} - 4t_k f_k + (2t_k - \Delta t)f_{k+1}}{2\Delta t^2} \quad (24)$$

$$\alpha_{0k} = \frac{(t_k^2 + \Delta t t_k)f_{k-1} - 2(t_k^2 - \Delta t^2)f_k + (t_k^2 - \Delta t t_k)f_{k+1}}{2\Delta t^2} \quad (25)$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes de (23), (24) y (25) en (17) y (18), se tiene:

$$A_{1k} = \frac{\Delta t}{12} (5f_{k-1} + 8f_k - f_{k+1}) = \frac{\Delta t}{12} (5f(t_k - \Delta t) + 8f(t_k) - f(t_k + \Delta t)) \quad (26)$$

$$A_{2k} = \frac{\Delta t}{12} (5f_{k+1} + 8f_k - f_{k-1}) = \frac{\Delta t}{12} (5f(t_k + \Delta t) + 8f(t_k) - f(t_k - \Delta t)) \quad (27)$$

Seguidamente, según la definición (9), la integral aproximada desde el punto  $t_0$  hasta el punto  $t_k$ , con  $k = 1, 2, \dots, n$ , sabiendo que  $I_0^* = 0$ , viene dada por:

$$I_k^* = I_{k-1}^* + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t) dt \quad (28)$$

Teniendo en cuenta (26) y (27):

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t) dt = \begin{cases} A_{1k} = \frac{\Delta t}{12} (5f_{k-1} + 8f_k - f_{k+1}) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ A_{2(k-1)} = \frac{\Delta t}{12} (5f_k + 8f_{k-1} - f_{k-2}) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (29)$$

Por tanto, resulta, como se quería demostrar, que la aproximación de la integral en el intervalo  $[t_0, t_k]$  es:

$$I_k^* = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ I_{k-1}^* + \frac{\Delta t}{12} (5f_{k-1} + 8f_k - f_{k+1}) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ I_{k-1}^* + \frac{\Delta t}{12} (5f_k + 8f_{k-1} - f_{k-2}) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (30)$$

Considerando todo el intervalo  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned}
 I_n^* &= \int_{a=t_0}^{b=t_n} f^*(t)dt = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t)dt \right) = \int_{t_0}^{t_1} f_k^*(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} f_k^*(t)dt + \int_{t_2}^{t_3} f_k^*(t)dt + \\
 &+ \dots + \int_{t_{n-4}}^{t_{n-3}} f_k^*(t)dt + \int_{t_{n-3}}^{t_{n-2}} f_k^*(t)dt + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} f_k^*(t)dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f_k^*(t)dt = \\
 &= A_{11} + A_{12} + A_{13} + \dots + A_{1(n-3)} + A_{1(n-2)} + A_{1(n-1)} + A_{2(n-1)} = \\
 &= \frac{\Delta t}{12}(5f_0 + 8f_1 - f_2) + \frac{\Delta t}{12}(5f_1 + 8f_2 - f_3) + \frac{\Delta t}{12}(5f_2 + 8f_3 - f_4) + \dots + \\
 &+ \frac{\Delta t}{12}(5f_{n-4} + 8f_{n-3} - f_{n-2}) + \frac{\Delta t}{12}(5f_{n-3} + 8f_{n-2} - f_{n-1}) + \frac{\Delta t}{12}(5f_{n-2} + 8f_{n-1} - f_n) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{12}(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2})
 \end{aligned} \tag{31}$$

Agrupando términos en (31), el valor de la integral numérica aproximada en todo el intervalo  $[a, b]$ , como se quería demostrar, es:

$$I_n^* = \frac{\Delta t}{12}(5f_0 + 13f_1 + 12f_2 + 12f_3 + \dots + 12f_{n-3} + 11f_{n-2} + 15f_{n-1} + 4f_n) \tag{32}$$

Escrita, más resumidamente, en forma de sumatorio:

$$I_n^* = \frac{\Delta t}{12}(5f_0 + 13f_1 + 12 \sum_{k=2}^{k=n-3} f_k + 11f_{n-2} + 15f_{n-1} + 4f_n) \tag{33}$$

Si se compara la ecuación (33) con la obtenida por W. F. Durand [2] (pág. 332) puede observarse que es la misma cuadratura. La cuadratura de W. F. Durand debe considerarse en el cálculo numérico, como regla de integración parabólica, en detrimento de la regla de Simpson [3, 4, 5, 6, 7, 8], que como se ha comentado no permite la integración en los puntos con índice impar del intervalo de definición.

#### 4. Acotación del error de la aproximación. Comparación con el error obtenido mediante la regla de los trapecios

Considérese la función  $E_k(s) : [0, \Delta t] \rightarrow \mathbb{R}$ , diferencia entre el valor de la integral de la función aproximante  $f_k^*(t)$ , parábola definida mediante los puntos  $(t_{k-1}, f(t_{k-1}))$ ,  $(t_k, f(t_k))$ ,  $(t_{k+1}, f(t_{k+1}))$ , y el valor de la integral de la función  $f(t)$ , en el intervalo  $[t_{k-1}, t_{k-1} + s] \equiv [t_k - s, t_k]$ , siendo  $t_k = t_{k-1} + s$  y  $t_{k+1} = t_k + s$  [9], con  $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$E_k(s) = \begin{cases} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+s} f_k^*(t)dt - \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+s} f(t)dt, & \text{si } k \neq n \\ \int_{t_k-s}^{t_k} f_k^*(t)dt - \int_{t_k-s}^{t_k} f(t)dt & , \text{si } k = n \end{cases} \tag{34}$$

Definiendo cada sumando de (34) como:

$$G_k^*(s) = \begin{cases} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+s} f_k^*(t)dt, & \text{si } k \neq n \\ \int_{t_k-s}^{t_k} f_k^*(t)dt & , \text{si } k = n \end{cases} \tag{35}$$

$$G_k(s) = \begin{cases} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+s} f(t)dt = F(t_{k-1}+s) - F(t_{k-1}), & \text{si } k \neq n \\ \int_{t_k-s}^{t_k} f(t)dt = F(t_k) - F(t_k-s) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (36)$$

siendo  $F(t)$  una primitiva de la función  $f(t)$ , resulta:

$$E_k(s) = G_k^*(s) - G_k(s) \quad (37)$$

Teniendo en cuenta (29):

$$G_k^*(s) = \begin{cases} \frac{s}{12}(5f(t_{k-1}) + 8f(t_{k-1}+s) - f(t_{k-1}+2s)), & \text{si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(5f(t_k) + 8f(t_k-s) - f(t_k-2s)) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (38)$$

Las derivadas sucesivas de  $G_k^*(s)$ , primer sumando de (34), son:

$$\dot{G}_k^*(s) = \frac{d}{ds} (G_k^*(s)) = \begin{cases} \frac{s}{12}(8\dot{f}(t_{k-1}+s) - 2\dot{f}(t_{k-1}+2s)) + \frac{1}{12}(5f(t_{k-1}) + \\ + 8f(t_{k-1}+s) - f(t_{k-1}+2s)) & , \text{ si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(-8\dot{f}(t_k-s) + 2\dot{f}(t_k-2s)) + \\ + \frac{1}{12}(5f(t_k) + 8f(t_k-s) - f(t_k-2s)), & \text{ si } k = n \end{cases} \quad (39)$$

$$\ddot{G}_k^*(s) = \frac{d^2}{ds^2} (G_k^*(s)) = \begin{cases} \frac{s}{12}(8\ddot{f}(t_{k-1}+s) - 4\ddot{f}(t_{k-1}+2s)) + \\ + \frac{1}{12}(16\dot{f}(t_{k-1}+s) - 4\dot{f}(t_{k-1}+2s)), & \text{ si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(8\ddot{f}(t_k-s) - 4\ddot{f}(t_k-2s)) + \\ + \frac{1}{12}(-16\dot{f}(t_k-s) + 4\dot{f}(t_k-2s)) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (40)$$

$$G_k^{*III}(s) = \frac{d^3}{ds^3} (G_k^*(s)) = \begin{cases} \frac{s}{12}(8f^{III}(t_{k-1}+s) - 8f^{III}(t_{k-1}+2s)) + \\ + \frac{1}{12}(24\ddot{f}(t_{k-1}+s) - 12\ddot{f}(t_{k-1}+2s)), & \text{ si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(-8f^{III}(t_k-s) + 8f^{III}(t_k-2s)) + \\ + \frac{1}{12}(24\ddot{f}(t_k-s) - 12\ddot{f}(t_k-2s)) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (41)$$

Y las derivadas sucesivas de  $G_k(t)$ , segundo sumando de (34), son:

$$\dot{G}_k(s) = \frac{d}{ds}(G_k(s)) = \begin{cases} f(t_{k-1} + s) & , \text{ si } k \neq n \\ f(t_k - s) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (42)$$

$$\ddot{G}_k(s) = \frac{d^2}{ds^2}(G_k(s)) = \begin{cases} \dot{f}(t_{k-1} + s) & , \text{ si } k \neq n \\ -\dot{f}(t_k - s) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (43)$$

$$G_k^{III}(s) = \frac{d^3}{ds^3}(G_k(s)) = \begin{cases} \ddot{f}(t_{k-1} + s) & , \text{ si } k \neq n \\ \ddot{f}(t_k - s) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (44)$$

Por tanto, la derivada tercera con respecto del tiempo de la función  $E_k(s)$  es:

$$E_k^{III}(s) = \frac{d^3}{ds^3}(E_k(s)) = \begin{cases} \frac{s}{12}(8f^{III}(t_{k-1} + s) - 8f^{III}(t_{k-1} + 2s)) + \\ + \frac{1}{12}(12\ddot{f}(t_{k-1} + s) - 12\ddot{f}(t_{k-1} + 2s)), \text{ si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(-8f^{III}(t_k - s) + 8f^{III}(t_k - 2s)) + \\ + \frac{1}{12}(12\ddot{f}(t_k - s) - 12\ddot{f}(t_k - 2s)) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (45)$$

Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange en (45):

$$E_k^{III}(s) = \frac{d^3}{ds^3}(E_k(s)) = \begin{cases} -\frac{12s}{12}(f^{III}(\mu_k)) - \frac{8s^2}{12}(f^{IV}(\lambda_k)), \text{ si } k \neq n \\ +\frac{12s}{12}(f^{III}(\mu_k)) - \frac{8s^2}{12}(f^{IV}(\lambda_k)), \text{ si } k = n \end{cases} \quad (46)$$

siendo  $\lambda_k, \mu_k \in [t_k, t_k + s]$ , si  $k \neq n$  y  $\lambda_k, \mu_k \in [t_{k-1} - s, t_{k-1}]$  si  $k = n$ .

Aplicando seguidamente la desigualdad triangular,  $|x + y| \leq |x| + |y|$  en (46) se tiene que:

$$|E_k^{III}(s)| \leq \frac{12s}{12} |f^{III}(\mu_k)| + \frac{8s^2}{12} |f^{IV}(\lambda_k)|, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (47)$$

Integrando dos veces la función  $|E_k^{III}(s)|$  entre 0 y  $s$ , se obtiene:

$$|\dot{E}_k(s)| \leq \frac{s^3}{6} |f^{III}(\mu_k)| + \frac{s^4}{18} |f^{IV}(\lambda_k)|, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (48)$$

Integrando ahora la función  $|\dot{E}_k(s)|$  entre 0 y  $\Delta t$ , resulta:

$$|E_k(\Delta t)| \leq \frac{\Delta t^4}{24} |f^{III}(\mu_k)| + \frac{\Delta t^5}{90} |f^{IV}(\lambda_k)|, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (49)$$

Eligiendo  $\lambda, \mu \in [a, b]$  tales que  $|f^{III}(\mu_k)| \leq |f^{III}(\mu)|$  y  $|f^{IV}(\lambda_k)| \leq |f^{IV}(\lambda)|$ , se define  $E(\Delta t)$  como una cota de los valores  $|E_k(\Delta t)|$ :

$$E(\Delta t) = \frac{\Delta t^4}{24} |f^{III}(\mu)| + \frac{\Delta t^5}{90} |f^{IV}(\lambda)| \quad (50)$$

Denotando  $B_1 = |f^{III}(\mu)|$  y  $B_2 = |f^{IV}(\lambda)|$ , la cota de los valores  $|E_k(\Delta t)|$  toma el valor:

$$E(\Delta t) = \frac{\Delta t^4}{24} B_1 + \frac{\Delta t^5}{90} B_2 \quad (51)$$

Calculando ahora la función error de la aproximación  $e_{pa} = |I_n^* - I_n|$ , se tiene:

$$\begin{aligned} e_{pa} &= \left| \int_a^b f^*(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \\ &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\Delta t} f^*(t) dt - \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\Delta t} f(t) dt \right| + \\ &+ \left| \int_{t_n-\Delta t}^{t_n} f^*(t) dt - \int_{t_n-\Delta t}^{t_n} f(t) dt \right| = \\ &= \sum_{k=1}^{k=n-1} |E_k(\Delta t)| + |E_n(\Delta t)| = \sum_{k=1}^{k=n} |E_k(\Delta t)| \end{aligned} \quad (52)$$

Y teniendo en cuenta  $E(\Delta t)$ , como una cota de los valores  $|E_k(\Delta t)|$ :

$$e_{pa} = \sum_{k=1}^{k=n} |E_k(\Delta t)| \leq nE(\Delta t) \quad (53)$$

Sustituyendo el valor de  $E(\Delta t)$ :

$$e_{pa} \leq n \left( \frac{\Delta t^4}{24} B_1 + \frac{\Delta t^5}{90} B_2 \right) \quad (54)$$

Teniendo en cuenta que  $\Delta t = \frac{b-a}{n}$  y sustituyendo en (54), resulta la cota del error que se quería demostrar:

$$e_{pa} \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} B_1 + \frac{(b-a)^5}{90n^4} B_2 \quad (55)$$

A continuación, se demuestra que esta cota de error obtenida para la regla de la parábola asimétrica es menor que la correspondiente a la regla de los trapecios. Para ello se consideran las cotas de error  $C_{pa}(\Delta t)$  de (54), para la regla de la parábola asimétrica, y  $C_t(\Delta t)$  de (2), para la regla de los trapecios:

$$C_{pa}(\Delta t) = n \left( \frac{\Delta t^4}{24} B_1 + \frac{\Delta t^5}{90} B_2 \right) \quad (56)$$

$$C_t(\Delta t) = n \frac{\Delta t^3}{12} K_t \quad (57)$$

Si el cociente  $\frac{C_t(\Delta t)}{C_{pa}(\Delta t)}$  tiende asintóticamente a  $\infty$ , cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , entonces se puede decir que el error de la regla de los trapecios es mayor que el error de la regla de la parábola asimétrica.



Efectivamente, fácilmente se observa que dicho límite tiende a  $\infty$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C_t(\Delta t)}{C_{pa}(\Delta t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{n \frac{\Delta t^3}{12} K_t}{n \left( \frac{\Delta t^4}{24} B_1 + \frac{\Delta t^5}{90} B_2 \right)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12} K_t}{\left( \frac{\Delta t}{24} B_1 + \frac{\Delta t^2}{90} B_2 \right)} = \infty \quad (58)$$

Teniendo en cuenta que el paso de integración en los registros de datos  $\Delta t$  es típicamente  $\ll 1$ , se puede asegurar que el error de la regla de la parábola asimétrica es inferior al error de la regla de los trapecios, tanto más cuánto menor sea el paso de integración.

### 5. Aplicaciones. Resolución de un caso particular

Son muchas las aplicaciones que pueden hacerse de esta regla en las distintas ramas de la ingeniería y las ciencias. Se destacan entre ellas, por ser las que han motivado este trabajo, las siguientes: teoría de la señal, métodos experimentales en ingeniería, análisis modal de estructuras y filtrado de señales.

Seguidamente se va a aplicar la regla de la parábola asimétrica a la resolución de un problema típico con un función arbitraria, comparando el resultado con la resolución mediante la regla de los trapecios. Este problema podría ser perfectamente un problema de determinación de velocidades a partir del registro de aceleraciones, de un punto de un puente o estructura sometida a cargas externas, medidas por un acelerómetro.

Considérese la función de aceleraciones de un punto de una estructura  $f(t) = \text{sen}(t)$  en el intervalo  $[a, b] = [0, 1]$  y paso de integración  $\Delta t = 0.1$ . La integral de esta función desde 0 hasta el instante  $t$  proporciona las velocidades del punto y viene dada por la función  $F(t)$ :

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt = 1 - \text{cos}(t) \quad (59)$$

Para esta función se tienen los siguientes resultados:

Tabla 1. Resultados para la función  $f(t) = \text{sen}(t)$

$t$	$I_{\text{exacta}}$	$I_{\text{regla-t}}$	$I_{\text{regla-pa}}$	$e_{\text{regla-t}}$	$e_{\text{regla-pa}}$
0	0	0	0	0	0
0.1	$4.9958 \cdot 10^{-3}$	$4.9917 \cdot 10^{-3}$	$5.0000 \cdot 10^{-3}$	$4.1639 \cdot 10^{-6}$	$4.1486 \cdot 10^{-6}$
0.2	$19.9334 \cdot 10^{-3}$	$19.9168 \cdot 10^{-3}$	$19.9417 \cdot 10^{-3}$	$16.6140 \cdot 10^{-6}$	$8.2406 \cdot 10^{-6}$
0.3	$44.6635 \cdot 10^{-3}$	$44.6263 \cdot 10^{-3}$	$44.6757 \cdot 10^{-3}$	$37.2258 \cdot 10^{-6}$	$12.2349 \cdot 10^{-6}$
0.4	$78.9390 \cdot 10^{-3}$	$78.8732 \cdot 10^{-3}$	$78.9551 \cdot 10^{-3}$	$65.7935 \cdot 10^{-6}$	$16.0917 \cdot 10^{-6}$
0.5	$122.4174 \cdot 10^{-3}$	$122.3154 \cdot 10^{-3}$	$122.4372 \cdot 10^{-3}$	$102.0315 \cdot 10^{-6}$	$19.7725 \cdot 10^{-6}$
0.6	$174.6644 \cdot 10^{-3}$	$174.5188 \cdot 10^{-3}$	$174.6876 \cdot 10^{-3}$	$145.5779 \cdot 10^{-6}$	$23.2404 \cdot 10^{-6}$
0.7	$235.1578 \cdot 10^{-3}$	$234.9618 \cdot 10^{-3}$	$235.1843 \cdot 10^{-3}$	$195.9975 \cdot 10^{-6}$	$26.4609 \cdot 10^{-6}$
0.8	$303.2933 \cdot 10^{-3}$	$303.0405 \cdot 10^{-3}$	$303.3227 \cdot 10^{-3}$	$252.7865 \cdot 10^{-6}$	$29.4018 \cdot 10^{-6}$
0.9	$378.3900 \cdot 10^{-3}$	$378.0747 \cdot 10^{-3}$	$378.4221 \cdot 10^{-3}$	$315.3776 \cdot 10^{-6}$	$32.0336 \cdot 10^{-6}$
1	$459.6977 \cdot 10^{-3}$	$459.3145 \cdot 10^{-3}$	$459.7272 \cdot 10^{-3}$	$383.1453 \cdot 10^{-6}$	$29.4888 \cdot 10^{-6}$

En la tabla 1 se muestran para la función  $f(t) = \text{sen}(t)$ , los valores (redondeados al cuarto decimal en potencia  $10^{-3}$ ) de la integral exacta  $I_{\text{exacta}}$ , la integral aproximada obtenida mediante la regla de los trapecios  $I_{\text{regla-t}}$ , la integral aproximada obtenida mediante la regla de la parábola asimétrica  $I_{\text{regla-pa}}$ , el error de la aproximación mediante la regla de los trapecios  $e_{\text{regla-t}}$  y

el error de la aproximación mediante la regla de la parábola asimétrica  $e_{regla-pa}$ . Se puede comprobar que el error obtenido mediante la regla de la parábola asimétrica en todo el intervalo  $[0, 1]$  cumple la condición (13), tomando como cotas  $B_1 = |-\cos(0)| = 1$  y  $B_2 = |\sin(1)|$ :

$$e_{regla-pa}(t = 1) = 29.4888 \cdot 10^{-6} \leq 42.6016 \cdot 10^{-6} \quad (60)$$

La figura 2 muestra los valores de la función integral de la función considerada como ejemplo  $f(t) = \sin(t)$ , en el intervalo  $[0, 1]$ .

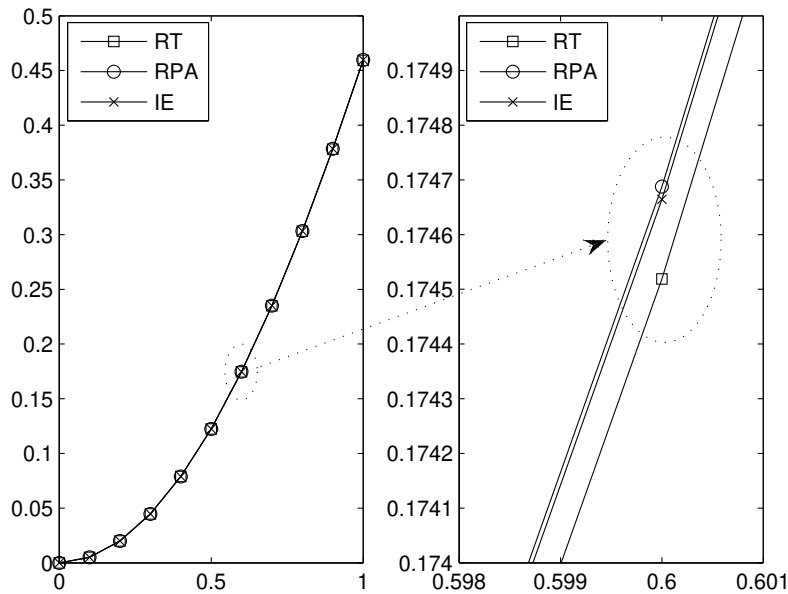


Figura 2. Función integral  $F(t) = 1 - \cos(t)$  y sus aproximaciones: RT = regla de los trapecios, RPA = regla de la parábola asimétrica, IE = integral exacta.<sup>1</sup>

## 6. Conclusiones

Mediante la regla de la parábola asimétrica, mostrada en este trabajo, se ha obtenido un método de integración numérica de funciones definidas en un intervalo equiespaciado de paso de integración  $\Delta t$ , con el que se obtiene un error, cuya cota superior se ha estimado en (13), menor que el que resulta al aplicar la regla de los trapecios, estimado por una cota superior dada en (2); de ahí su interés en incluirla como regla básica en cálculo numérico, sustituyéndola por la famosa regla de Simpson, pues se ha mostrado la limitación de esta última al no permitir obtener la función integral en cada uno de los puntos de integración.

## 7. Agradecimientos

El autor desea agradecer a la Dra. Carmen Sáez Agulló y al Dr. Jorge Galán Vioque, profesora titular y catedrático, respectivamente, del departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla, su muestra de interés y su apoyo para la realización de este trabajo; así como al Dr. Pedro Galvín Barrera, profesor titular del departamento de Mecánica de Medios

<sup>1</sup>Figura obtenida con el programa MATLAB.

Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad de Sevilla, por la motivación transmitida para llevarlo a cabo.

## Referencias

- [1] DURAND, W. F., *New rules for approximate integration*, Engineering News, N° 31, pp. 42–43, 1894.
- [2] PIEGORSCH, W. W., *Durand's rules for approximate integration*, Historia Mathematica, N° 16, pp. 324–333, 1989.
- [3] DEMIDOVICH, B. P., MARON, I. A., *Cálculo numérico fundamental*, Paraninfo, 1985.
- [4] DOUBOVA, A., GONZÁLEZ, G., *Un Curso de Cálculo Numérico: Interpolación, Aproximación, Integración y Resolución de Ecuaciones Diferenciales*, Universidad de Sevilla, 2007.
- [5] FAIRES, J. D., BURDEN, R., *Métodos numéricos*, Thomson, 2004.
- [6] MATHEWS, J.H., *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice-Hall International Editions, 1992.
- [7] RODRÍGUEZ GÓMEZ, F. J., *Cálculo y Métodos Numéricos: Teoría, Algoritmos y Problemas Resueltos*, Universidad Pontificia Comillas, 2003.
- [8] SAMARSKI, A. A., *Introducción a los métodos numéricos*, Editorial Mir, Moscú, 1986.
- [9] DE BURGOS, J., *Cálculo infinitesimal de una variable*, McGraw-Hill Interamericana, 2000.

### Sobre el/los autor/es:

Nombre: José Manuel Recio-López

Correo electrónico: josreclop@alum.us.es

Institución: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla.

# Investigación

## Mejoras de convergencia de algoritmos

## Algorithm convergence improvements

Federico Ruiz López

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 017-055, ISSN 2174-0410  
Recepción: 26 Sep'21; Aceptación: 27 Oct'21

1 de abril de 2022

### Resumen

En este artículo se analiza el proceso de obtención de soluciones de ecuaciones no lineales, mediante procedimientos iterativos, basados en los teoremas de punto fijo. Se proponen algoritmos de mejora para ser implementados en un lenguaje de programación apropiado. Los resultados parten de la imposibilidad de resolver ecuaciones algebraicas de grado superior a cuatro mediante métodos puramente algebraicos. Este trabajo también se puede considerar una introducción a la teoría de sistemas dinámicos discretos.

**Palabras Clave:** Sistemas dinámicos, puntos fijos, algoritmos iterativos, convergencia.

### Abstract

This article analyzes the process of obtaining solutions of nonlinear equations, through iterative procedures, based on the fixed point theorems. The article proposes some improvement algorithms to be implemented in an appropriate programming language. The results are based on the impossibility of solving algebraic equations of degree higher than four using purely algebraic methods. This work can also be considered an introduction to the theory of discrete dynamical systems.

**Keywords:** Dynamic systems, fixed points, iterative algorithms, convergence.

## 1. El cálculo de la raíz cuadrada de 2

Supóngase que se quiere determinar la raíz cuadrada de 2 sin una calculadora. Sólo se dispone de lápiz, papel y grandes dosis de paciencia. El problema se traduce en determinar la única solución positiva de la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 2 = 0 \tag{1}$$

Como es sabido, la solución  $\alpha = \sqrt{2}$ , es un número real que trasciende al conjunto de los números racionales. Por tanto, debe existir una expresión decimal en forma de serie infinita,

$$\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot 10^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

donde  $a_i \neq 0$ , para una cantidad no finita de términos. El primer objetivo es determinar un algoritmo programable, con el fin de determinar la mayor cantidad de cifras del número  $\alpha$ , recordando que:

$$a_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$$

son dígitos.

### 1.1. Ejemplo 1 (Dinámicas inútiles)

Se puede observar que cualquier número positivo que verifica la ecuación 1, también verifica la relación:

$$x = \frac{2}{x}$$

esto es, se trata de un punto fijo de la función  $f(x) = \frac{2}{x}$ . Gráficamente se tendría la configuración de la figura 1.

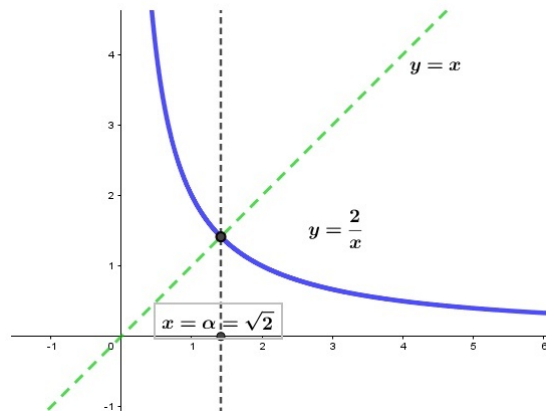


Figura 1. La solución buscada se encuentra en la intersección de la función  $y = \frac{2}{x}$  con la bisectriz del primer cuadrante.

Esto motiva a definir la función real de variable real:

$$f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{2}{x}$$

Es claro que  $f$  conserva el intervalo al tratarse de una función decreciente, que verifica:

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 1 \rightarrow f([1,2]) \subset [1,2]$$

Denotando por  $I = [1,2]$  dicho intervalo, se puede considerar el par  $(I, f)$ , que a partir de ahora se denominará en este artículo «sistema dinámico».

Estudiar la dinámica generada por  $f$  en el intervalo  $I$ , consiste en determinar la estructura topológica de los conjuntos que definen las órbitas de cada punto, esto es,

$$Orb_f(x_0) = \left\{ x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0) \cdots \right\}$$

para cada  $x_0 \in I$ .

Para el caso mencionado, la dinámica generada es bastante simple, ya que todos los puntos generan órbitas de longitud dos (ciclos de orden 2) y por tanto todas las iteraciones son cerradas. En efecto, si  $x_0 \in I = [1,2]$ ,

$$f(x_0) = \frac{2}{x_0} \rightarrow f^2(x_0) = f\left(\frac{2}{x_0}\right) = \frac{2}{\frac{2}{x_0}} = x_0$$

Por tanto,

$$Orb_f(x_0) = \left\{ x_0, \frac{2}{x_0} \right\}$$

Desde el punto de vista del *cálculo de la raíz* mediante iteraciones, este es el peor de los escenarios posibles, porque el punto fijo  $\alpha$  no podrá ser alcanzado nunca, a partir de sucesivas iteraciones de valores racionales. En cambio desde el punto de vista de la *teoría de sistemas dinámicos*, es la mejor de las situaciones, ya que se conoce perfectamente la dinámica generada por cualquier punto y la estructura topológica del sistema dinámico.

¿Cuál es el objetivo? Establecer un sistema dinámico apropiado que encierre a la solución de la ecuación como punto fijo, y que pueda ser alcanzado rápidamente por sucesivas iteraciones iniciadas desde cualquier punto relativamente próximo a él. Esto es particularmente interesante desde una perspectiva computacional. En este sentido, se pueden encontrar muchos sistemas  $(I, F)$  diferentes que cumplan dicho cometido, como se muestra en el siguiente ejemplo.

## 1.2. Ejemplo 2 (Atractores y repulsores)

Partiendo de la ecuación 1, se pueden multiplicar por  $x > 0$  los dos miembros de la ecuación para obtener la equivalente:

$$x^3 - 2x = 0 \tag{2}$$

La única raíz positiva de dicha ecuación cúbica es  $\alpha$ . Dicha solución también deberá cumplir la relación:

$$x = \sqrt[3]{2x}, \quad x > 0 \tag{3}$$

Se transforma el problema de determinar  $\alpha$  en un problema de punto fijo. En efecto, si se conviene en denotar por  $J = [0,2]$ , y:

$$F : J \rightarrow J$$

$$x \rightarrow F(x) = \sqrt[3]{2x}$$

se tiene un nuevo *sistema dinámico*  $(J, F)$ . Puesto que  $F$  es una función continua y creciente en  $J$  y:

$$F(0) = 0, \quad F(2) = \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8} = 2$$

se conserva el intervalo,

$$F([0, 2]) \subset [0, 2]$$

y, consecuentemente, se garantiza la existencia de al menos un punto fijo. La unicidad se deriva de la monotonía de la función con valores positivos, aunque en realidad  $F$  tiene dos puntos fijos, situados en el origen de coordenadas y en  $x = \sqrt{2}$ .

En efecto:

$$F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4x^2}} > 0, \quad \forall x > 0$$

Gráficamente, la situación aparece reflejada en la figura 2:

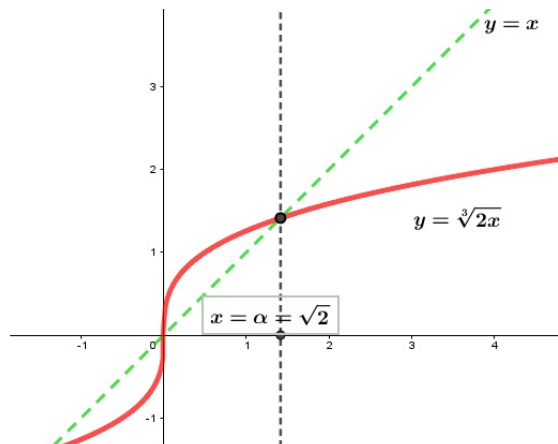


Figura 2. El valor de  $\alpha$  se determina como intersección de la función  $y = \sqrt[3]{2x}$  con la bisectriz del primer cuadrante.

Tanto de la expresión de la primera derivada, como de la gráfica de la figura 2, se observa que existe una singularidad en  $x = 0$ , donde la función derivada no está bien definida:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4x^2}} = +\infty$$

Esto hace que el origen se convierta en un punto fijo imposible de alcanzar por iteración.

**¿Cómo es la dinámica generada por el sistema  $(J, F)$  ?**

Partiendo del valor inicial  $x_0 = 1 \in J$ , se obtiene la órbita asociada:

$$Orb_F(1) = \left\{ 1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2}}, \dots \right\} = \left\{ 1, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{4}{9}}, 2^{\frac{13}{27}}, 2^{\frac{40}{81}}, \dots, 2^{\frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}}, \dots \right\}$$

donde:

$$F^n(1) = 2^{\frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}} = (\sqrt{2})^{1 - \frac{1}{3^n}}$$

Por tanto, la sucesión de iteraciones de  $F$  tienden al valor de  $\alpha$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^{1 - \frac{1}{3^n}} = \sqrt{2}$$

De hecho, todas las órbitas que parten de valores estrictamente positivos, muestran el mismo comportamiento, i.e., tienden al punto fijo  $\alpha$ . En efecto, partiendo de un valor cualquiera  $x_0 \in (0, 2]$ , es relativamente sencillo probar que:

$$F^n(x_0) = (\sqrt{2})^{1 - \frac{1}{3^n}} \cdot x_0^{\frac{1}{3^n}}$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . En consecuencia dicho punto fijo se convierte en un *atractor del sistema*, mientras que el origen se convierte en un **punto fijo repulsor**. Aunque los valores iniciales estén próximos al origen, las sucesivas iteraciones se van haciendo cada vez más próximas a  $\alpha = \sqrt{2}$ .

Esto se puede ver sin más que considerar la expresión de  $F$  en forma de potencia fraccionaria. De este modo:

$$F(x) = 2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}, \quad \forall x \in J = [0, 2]$$

Definiendo la sucesión  $x_n = F^n(x_0)$ , los primeros valores son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2^{\frac{1}{3}} \cdot x_0^{\frac{1}{3}} \\ x_2 &= 2^{\frac{1}{3}} \cdot x_1^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{9}} \cdot x_0^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}} \cdot x_0^{\frac{1}{9}} \\ x_3 &= 2^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{27}} \cdot x_0^{\frac{1}{27}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}} \cdot x_0^{\frac{1}{27}} \end{aligned}$$

y en general:

$$x_n = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n}} \cdot x_0^{\frac{1}{3^n}}$$

Ahora bien, calculando la suma de los  $n$  primeros términos de una serie geométrica,

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

se tiene que:

$$x_n = F^n(x_0) = 2^{\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{3^n})} \cdot x_0^{\frac{1}{3^n}} = (\sqrt{2})^{1 - \frac{1}{3^n}} \cdot x_0^{\frac{1}{3^n}}$$

y por tanto:



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x_0) = \sqrt{2}, \quad \forall x_0 \in J - \{0\}$$

La ventaja de este modelo frente al mostrado en el ejemplo 1, es evidente. Partiendo de cualquier valor inicial, e iterando suficientemente la función, se puede aproximar el valor de la raíz de 2, con tanta precisión como se quiera. No obstante, parece poco razonable que para determinar el valor de una raíz cuadrada, se precise el cálculo de infinitud de raíces cúbicas, cuyo algoritmo es, en principio, algo más complicado. En efecto, se desconoce un algoritmo simple que permita determinar la expresión decimal infinita del número:

$$2^{\frac{40}{81}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{40}}}}}$$

Se debe recordar que lo que se pretende es obtener números irracionales mediante aproximaciones sucesivas cuyo cálculo sea relativamente simple, como es el caso de aproximaciones puramente racionales. Este planteamiento fuerza a buscar una tercera vía.

### 1.3. Ejemplo 3: (El método de Newton)

Dada una función real de variable real  $f : I \rightarrow I$ , se llamará *transformada de Newton de  $f$*  a la nueva función:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \forall x \in I$$

Se debe observar que, para que  $F$  esté bien definida en el intervalo, la función  $f$  debe ser al menos de clase  $C^1(I)$ , con derivada no nula. El comportamiento de la derivada, determina en cierto grado la dinámica topológica del nuevo sistema  $(I, F)$ .

Además se cumple que:

$$f(c) = 0 \leftrightarrow F(c) = c, \quad c \in I$$

Por tanto determinar los ceros de la función  $f$  en el intervalo  $I$  equivale a determinar los puntos fijos de  $F$  en dicho intervalo. Aplicado al caso que nos ocupa, para  $f(x) = x^2 - 2$ , la transformada de Newton será:

$$F(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \left( x + \frac{2}{x} \right)$$

cuya gráfica se puede apreciar en la figura 3.

Puesto que  $F$  no está bien definida en  $x = 0$ , se puede considerar un entorno de  $x = 1,5$ , por ejemplo el intervalo compacto

$$I = [1, 2]$$

No es complicado probar que

$$F([1, 2]) \subset [1, 2]$$

.

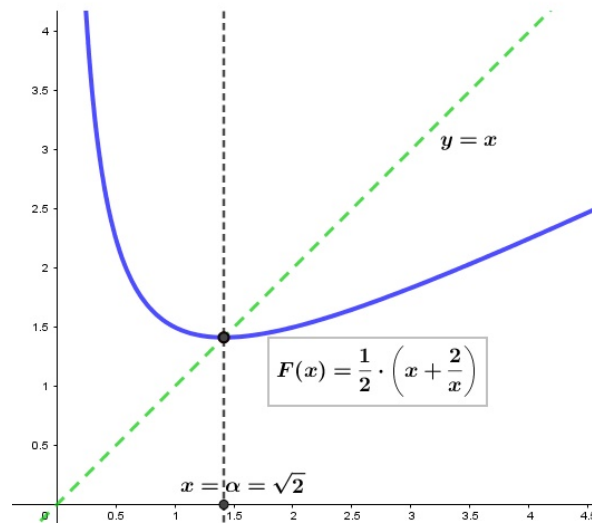


Figura 3. Transformada de Newton de la función  $f(x) = x^2 - 2$

De hecho, al ser

$$F(1) = \frac{3}{2}, \quad F(2) = \frac{3}{2}$$

, se podría aplicar el *Teorema de Rolle* para probar que existe un valor  $c \in (1, 2)$  donde la derivada se anula:

$$F(1) = F(2) \Rightarrow \exists c \in [1, 2] : F'(c) = 0$$

Lo curioso del caso, es que este valor es justamente el punto fijo del sistema. En efecto, derivando  $F$  se obtiene:

$$F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

Así:

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Estos hechos son relevantes y paradigmáticos, porque el hecho de que el punto fijo tenga derivada nula, mejora la velocidad de convergencia, como se verá más adelante en su marco teórico.

### Órbitas y convergencia

Si se toma como valor inicial  $x_0 = 1$ , se puede probar que todas las órbitas son convergentes al punto estacionario de la función  $F$ . Por tanto, la dinámica generada por este sistema es bastante útil. Lo interesante es que, mediante este procedimiento, se pueden ir obteniendo sucesivas aproximaciones racionales de  $\alpha = \sqrt{2}$ .

En efecto, cálculos más o menos sencillos, permiten escribir los primeros valores iterados:

$$Orb_F(1) = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \dots \right\}$$

Se debe recordar que

$$\alpha = \sqrt{2} = 1,414213562373095\dots$$

, y que el valor aportado tras la cuarta iteración es una fracción cuya expresión decimal es:

$$\frac{665857}{470832} \approx 1,41421356237464\dots$$

Es decir, con sólo cuatro iteraciones se obtiene una aproximación de ¡11 cifras decimales exactas!, así como la curiosa aproximación racional:

$$\sqrt{2} \approx \frac{665857}{470832}$$

Se debe observar que la órbita del 2, enlaza con la del 1, a partir de la primera iteración.

**¿Qué es lo que provoca esta velocidad tan rápida de convergencia?**

Pues la cuestión es clara. Cuanto más plana sea la curva en torno al punto estacionario mayor será dicha velocidad de convergencia. Y esto sucede con la transformada de Newton. En efecto, si se deriva la expresión de  $F$ :

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$$

esto es:

$$F'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}, \quad \forall x \in I$$

Por tanto

$$f(c) = 0 \leftrightarrow F'(c) = 0$$

, y el punto fijo de  $F$  es punto estacionario y por tanto atractor, en un entorno reducido del punto.

Estas consideraciones sugieren algoritmos que partan de transformadas de la forma

$$F(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx \leftrightarrow F'(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

cuya derivada se anula precisamente donde la función inicial  $f$  posee ceros, esto es, los puntos estacionarios de  $F$  son los ceros de  $f$ . En estos casos la velocidad de convergencia mejora notablemente.

**1.4. Ejemplo 4: (A vueltas con el método de Newton)**

Se va a mostrar un último ejemplo, que puede servir para dar luz a estos asuntos. Se considera en este caso la función real de variable real

$$g(x) = x^3 - 2x$$

cuyos ceros son precisamente

$$Z(g) = \{-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}\}$$

Si se aplica a  $g$  la *transformada de Newton*, en la forma

$$G(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{x^3 - 2x}{3x^2 - 2} = \frac{3x^3 - 2x - x^3 + 2x}{3x^2 - 2} = \frac{2x^3}{3x^2 - 2}$$

Puesto que  $G(1) = 2$  y  $1 < G(2) = \frac{16}{10} = 1,6 < 2$ , es claro que

$$G([1, 2]) \subset [1, 2]$$

tal como se aprecia en la gráfica de la figura 4.

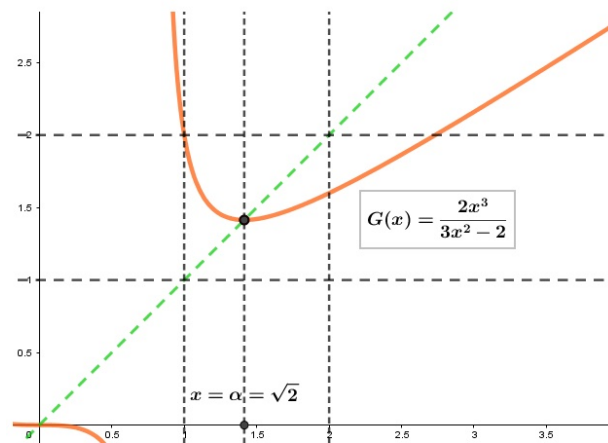


Figura 4. Transformada de Newton de la función  $g(x) = x^3 - 2x$ .

La órbita generada por el valor inicial  $x = 1$ , tiene como primeros valores

$$Orb_G(1) = \left\{ 1, 2, \frac{8}{5}, \frac{512}{355}, \dots \right\}$$

En la cuarta iteración se obtendría:

$$G\left(\frac{512}{355}\right) \approx 1,415012142\dots$$

lo cual es una aproximación de  $\alpha = \sqrt{2}$  bastante pobre, al no aproximar más allá de las centésimas. Es decir, el algoritmo de Newton aplicado a esta función  $g$  se muestra bastante ineficiente para determinar un elevado número de cifras significativas del valor buscado.

En cambio, si se itera a partir de un valor relativamente próximo a  $\alpha$ , la situación cambia completamente. En efecto, si se parte del valor inicial  $x_0 = 1,5$ , se obtendrían los valores:

$$\begin{aligned} x_1 &= G(1,5) = 1,42105 \\ x_2 &= G(1,42105) = 1,414262 \\ x_3 &= G(1,41426) = 1,4142135 \\ x_4 &= G(1,4142135) = 1,414213562 \end{aligned}$$

Es preciso recordar que la calculadora ofrece la aproximación

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562\dots$$

lo cual confirma que en cada iteración van surgiendo dos nuevas cifras decimales que coinciden con el valor esperado. Aquí la convergencia es mucho más fuerte que si se consideran órbitas alejadas del punto estacionario  $\alpha$ .

**Cuestiones abiertas** El análisis de los ejemplos mostrados lleva a plantear una serie de cuestiones, en las que se tratará de profundizar:

- ¿Qué función es la más apropiada para iterar?
- ¿Cómo caracterizar la dinámica del sistema a partir de su derivada?
- ¿El valor inicial condiciona la velocidad de convergencia?
- ¿Cómo estimar el error cometido al realizar la aproximación?
- ¿Es posible mejorar el algoritmo aplicado?

El objetivo es demostrar que *cualquier algoritmo de iteración es mejorable*, i.e., se puede encontrar un nuevo proceso que permite determinar el punto fijo del sistema, con mucha más rapidez. Se comenzará exponiendo los conceptos fundamentales que permiten fundamentar el estudio de estas cuestiones para formalizar este notable resultado. Conceptos como *algoritmo*, *órbita* o *velocidad de convergencia*, serán definidos dentro de la topología de la recta real. Una vez precisados estos conceptos, se podrá dar una respuesta razonada a cada una de las cuestiones planteadas.

## 2. Conceptos básicos sobre sistemas dinámicos

**Def.:** Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo compacto (cerrado y acotado) de la recta real y  $f : I \rightarrow I$  una función continua. Al par  $(I, f)$  se le llamará **sistema dinámico discreto**.

Dado un punto  $x_0 \in I$ , se define **la órbita del punto**, como el conjunto

$$Orb_f(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

donde

$$x_n = f^n(x_0), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Def.:** Se define el conjunto **omega-límite** del sistema dinámico  $(X, f)$  como

$$\Omega(f) = \cup_{x \in I} Orb_f(x)$$

esto es, como la unión de las órbitas de cada punto. Determinar la estructura topológica de este conjunto es el principal objetivo en la teoría de sistemas dinámicos discretos.

**Ejemplo:** La función  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(x) = x^2$  define el sistema

$$([0, 1], f)$$

cuya dinámica es bastante simple. Posee dos puntos fijos,

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

y la órbita de cualquier punto  $x \in (0, 1)$ , es convergente a cero. Por tanto  $x = 0$  se convierte en un **punto fijo atractor** y  $x = 1$  un **punto fijo repulsor**.

**Observación 1:** El concepto de sistema dinámico es mucho más general que el que se va a tratar aquí. Basta con extender la noción a espacios topológicos  $X$  en los que haya definida una

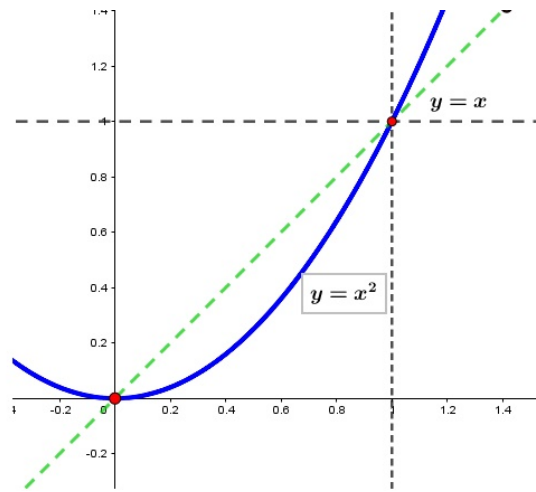


Figura 5. La función cuadrática  $y = x^2$  genera una dinámica simple sin órbitas periódicas y dos puntos fijos.

métrica. En realidad toda aplicación continua de un espacio topológico en sí mismo, produce una transformación que se puede interpretar como una dinámica de deformación. La iteración de esa deformación del espacio, a intervalos discretos de tiempo, es lo que se entiende como **dinámica discreta**.

**Observación 2:** Si la órbita de un punto es cerrada, en el sentido de que exista un  $k \in \mathbb{N}$ , tal que

$$f^k(x_0) = x_0$$

entonces se dice que existe un **ciclo de orden  $k$** , siendo  $k$  el mínimo de los números naturales que cumple tal condición. Cuando  $k = 1$ , se obtiene un *punto fijo* de  $f$ , Para  $k = 2$  ciclos de orden 2, y así sucesivamente. Es importante recordar que cuando  $X = \mathbb{R}$ , la existencia de ciclos de cierto orden, fuerza la existencia de ciclos de otros órdenes, de acuerdo con el *teorema de Sarkovskii*.

### **Teorema de Sarkovskii**

Sea una aplicación continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si esta función tiene un punto periódico de orden  $k$ , entonces tiene puntos periódicos de todos los períodos inferiores a  $k$  según el siguiente orden:

$$1 \ll 2 \ll 4 \ll 8 \ll \dots \ll 2^n \cdot 5 \ll 2^n \cdot 3 \ll \dots \ll 2 \cdot 5 \ll 2 \cdot 3 \ll \dots \ll 7 \ll 5 \ll 3$$

El orden debe ser interpretado de derecha a izquierda. En este sentido, si existe un ciclo de orden 8, existen ciclos de orden 4, 2 y 1, pero no necesariamente de orden 16. Si existe un ciclo de orden  $6 = 2 \cdot 3$ , existen ciclos de ordenes 10, 14, 18... pero no necesariamente de orden impar. En consecuencia, si existe un ciclo de orden 3, existen órbitas periódicas de todos los períodos (Teorema de Li-Yorke).

Este teorema es óptimo, es decir, si  $m \ll k$  según el orden precedente, existen aplicaciones continuas con puntos periódicos de periodo  $m$  pero sin punto periódico de período  $k$ .

Este resultado implica que si se encuentra una función continua en un intervalo compacto, conteniendo un ciclo de orden tres, habrá órbitas de cualquier orden. Este hecho induce comportamientos caóticos en el sistema. Una de las expresiones conocidas por los teóricos de estas cuestiones, es que "*período tres implica caos*". Aunque realmente el concepto de caos, está más bien asociado a la existencia de órbitas densas, o cierta dependencia sensible a las condiciones iniciales.

**Def.:** Dado un sistema dinámico  $(I, f)$ , se dice que existe una **órbita densa**, si para cierto valor inicial  $x_0 \in I$ , y para cada  $x \in I$

$$\forall \epsilon > 0, \exists k(\epsilon) \in \mathbb{N} : |f^k(x_0) - x| < \epsilon$$

Un sistema dinámico con una órbita densa se dice **transitivo**.

**Def.:** Se dice que el sistema  $(I, f)$  presenta **dependencia sensible a las condiciones iniciales** en el punto  $x \in I$ , si existe una constante positiva  $\epsilon > 0$ , (*constante de sensibilidad*) tal que

$$\forall \delta > 0, \exists y \in I : |y - x| < \delta \rightarrow |f^n(x) - f^n(y)| > \epsilon$$

para cierto  $n \in \mathbb{N}$ . Cuando esta propiedad es extensible a cualquier  $x \in I$ , se dice que el sistema tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Intuitivamente, esta noción sugiere que las órbitas generadas por puntos relativamente próximos se alejan de acuerdo con la constante de sensibilidad. Una primera intuición puede hacer pensar que las órbitas generadas por puntos próximos, deben ser muy similares, de manera que bajo iteración, las órbitas no se distancien demasiado. Esto no sucede en la realidad. Cuando un sistema presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales, estas órbitas pueden diferenciarse tanto como se estime. Lo cual convierte este tipo de sistemas en impredecibles, desde el punto de vista del determinismo numérico. Y poco útiles para los propósitos que se pretende alcanzar.

En 1989, el matemático R. Devaney [7] formuló la siguiente definición, que trata de delimitar la noción de caos.

#### **Sistemas caóticos**

Sea  $X$  un espacio métrico, no finito y  $f : X \rightarrow X$  una aplicación. Se dice que el sistema  $(X, f)$  es caótico si se verifican las siguientes condiciones:

1. El conjunto de puntos periódicos de la función  $f$  es denso en  $X$ .
2. El sistema es topológicamente transitivo (posee una órbita densa).
3. El sistema tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Se debe observar que, mientras que la primera y segunda condición son topológicas (se pueden definir en espacios más generales), la tercera es métrica, por tanto, la noción de caos sólo tiene sentido en espacios métricos. Aunque existen otras definiciones sobre caos, esta es, hoy día, la más comúnmente aceptada.

Existen ciertas relaciones entre las condiciones. Banks [3] ha probado que cuando se trabaja en espacios métricos, la primera y segunda condición implican la tercera. Y cuando  $X$  es un espacio métrico completo con base numerable, entonces la primera y segunda condición son equivalentes. Y como éstas implican la tercera, bastaría analizar si la tercera condición implica la primera para tener la equivalencia entre todas ellas (una cuestión que se analizará más adelante en profundidad). De este modo, en el caso particular  $X = \mathbb{R}$ , la existencia de una órbita densa implica dependencia sensible a las condiciones iniciales, y por tanto la existencia de caos.

### **3. Métodos iterativos**

Supóngase que se quiere resolver la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real de variable real. Siempre es posible encontrar una función  $g$ , sobre cierto intervalo compacto, de suerte que

$$f(\alpha) = 0 \leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$$

En efecto basta definir  $g(x) = x + f(x)$ . De suerte que cualquier problema de determinar los ceros de una función, se transforma en un problema de punto fijo. Sin embargo este no es el único modo posible, lo que dota de interés nuestro estudio. Se necesita desarrollar herramientas que permitan aproximar las raíces de  $f$  por iteración de  $g$ , acotando los errores cometidos.

### 3.1. Ejemplo 1: (La transformada de Newton-Raphson)

Sea  $f(x)$  una función de clase  $C^2(I)$  y  $\alpha$  una raíz en dicho intervalo,  $f(\alpha) = 0$ . Se supone, además, que  $f'(\alpha) \neq 0$ . Se define la *transformada de Newton-Raphson* de  $f$  como la función:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in J \subset I$$

En tal caso,

$$f(\alpha) = 0 \leftrightarrow F(\alpha) = \alpha$$

como se puede comprobar fácilmente.

### 3.2. Ejemplo 2: (Generalizando)

Se puede tratar de generalizar el caso anterior y definir la transformada

$$F(x) = x + f(x) \cdot g(x)$$

de  $f$ , para cierta función derivable  $g$  en un entorno de  $\alpha \in I$ . Se supone, como antes, que  $f(\alpha) = 0$ . Si se quiere que dicho valor se convierta en punto crítico de  $F$ ,

$$F'(x) = 1 + f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Si se impone la condición  $F'(\alpha) = 0$ , se tendrá:

$$1 + f'(\alpha) \cdot g(\alpha) + \cancel{f(\alpha)} \cdot \cancel{g'(\alpha)} = 0$$

Esto es,

$$1 + f'(\alpha) \cdot g(\alpha) = 0 \rightarrow g(\alpha) = \frac{-1}{f'(\alpha)}$$

Esto motiva definir,

$$g(x) = -\frac{1}{f'(x)}, \quad \forall x \in J \subset I$$

y por tanto

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in J \subset I$$

En consecuencia, la *transformada de Newton-Raphson* es el prototipo de función que transforma los ceros de  $f$  en puntos críticos de  $F$ .

### 3.3. Ejemplo 3: (El caso polinómico)

Se sabe que toda ecuación cúbica se puede expresar en la forma

$$x^3 + px + q = 0$$



con  $p, q \in \mathbb{R}$ . Por comodidad en la notación, se la puede suponer escrita en la forma

$$x^3 = px + q, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Es preciso observar que las raíces del polinomio, son los puntos fijos de la función

$$g(x) = \sqrt[3]{px + q}$$

En general, cualquier ecuación algebraica en la forma

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[X]$$

se puede transformar en la expresión equivalente:

$$x = \sqrt[n]{P_{n-1}(x)} = \sqrt[n]{-a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \dots - a_2x^2 - a_1x - a_0}$$

y por tanto determinar la raíz de un polinomio, se convierte, bajo este prisma, en un problema de puntos fijos.

La cuestión que interesa es, de todas las transformaciones posibles de la ecuación  $f(x) = 0$  en  $g(x) = x$ , discernir aquellas cuya dinámica sea lo más precisa, en el sentido de que el punto fijo sea un *punto fijo fuertemente atractor*. En este sentido, van orientadas las siguientes definiciones y resultados.

**Def.:** Dada la sucesión de números reales  $\{x_n\}$ , se dice que es **convergente** al número real  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |x_n - \alpha| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

En tal caso, se escribe

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

**Propiedad 1:** El límite de una sucesión de números reales, de existir, es único. Basta aplicar un sencillo argumento de acotación para llegar a que

$$|\alpha - \beta| < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

para  $\alpha, \beta$  posibles límites distintos.

**Propiedad 2:** Toda sucesión convergente de números reales está acotada, i.e.,

$$|x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Notación:** Para sucesiones convergentes, se define el **error de aproximación**  $\epsilon_n$  como

$$\epsilon_n = |d_n| = |x_n - \alpha| \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Teorema del punto fijo**

Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable que verifica:

1.  $g([a, b]) \subset (a, b)$
2.  $|g'(x)| < 1, \quad \forall x \in [a, b]$

Entonces, existe un único  $\alpha \in [a, b]$  tal que  $g(\alpha) = \alpha$ . Además, para todo  $x_0 \in [a, b]$ , la sucesión  $\{x_n\}$  generada por la iteración

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

converge a  $\alpha$ .

**Demostración:** Sea  $h(x) = g(x) - x$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces  $h(x)$  es una función continua y derivable (aunque no se puede afirmar mucho más acerca de la continuidad de la derivada).

Por otro lado, es claro que

$$h(a) = g(a) - a > 0, \quad h(b) = g(b) - b < 0$$

por lo que se verifican las condiciones del Teorema de Bolzano. En consecuencia, existe un  $\alpha \in (a, b)$  tal que

$$h(\alpha) = 0 \leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$$

esto es,  $\alpha$  es un punto fijo.

Para demostrar la unicidad, se supone que existen dos valores  $\alpha, \beta$ , puntos fijos de  $g$ . En tal caso

$$g(\alpha) = \alpha, \quad g(\beta) = \beta$$

No es restrictivo suponer  $\alpha < \beta$ . Aplicando el Teorema del Valor Medio, existe un  $c \in (\alpha, \beta)$ , tal que

$$g(\beta) - g(\alpha) = g'(c) \cdot (\beta - \alpha)$$

Pero entonces

$$\beta - \alpha = g'(c) \cdot (\beta - \alpha) \leftrightarrow g'(c) = 1$$

en contra de la hipótesis planteada en la segunda condición.

Sea ahora  $\{x_n\}$  la sucesión generada a partir del valor inicial  $x_0 \in [a, b]$ , mediante la iteración

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Si se denota por

$$K = \sup_{x \in [a, b]} |g'(x)| < 1$$

y por  $\epsilon_n = |x_n - \alpha|$ , se puede escribir:

$$\begin{aligned} \epsilon_n = |x_n - \alpha| &= |g(x_{n-1}) - g(\alpha)| = |g'(c_n)| \cdot |x_{n-1} - \alpha| \leq K \cdot \epsilon_{n-1} \leq \\ &\leq K^2 \cdot \epsilon_{n-2} \leq K^3 \cdot \epsilon_{n-3} \leq \dots \leq K^n \cdot \epsilon_0 \end{aligned}$$

Tomando límites es claro que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} K^n \cdot \epsilon_0 = 0$$

al ser  $0 < K < 1$ , lo que prueba la convergencia del método [cqd].

Del teorema expuesto, se deduce que interesa trabajar con funciones al menos de clase  $C^1$  en el intervalo compacto, de suerte que la constante  $K$  sea lo más pequeña posible. De este modo se consigue acelerar la convergencia.

## 4. Orden de convergencia

**Def.:** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de números reales convergente a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , con  $x_n \neq \alpha$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sean  $p, \lambda \in \mathbb{R}^+$ . Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^p} = \lambda \neq 0$$

entonces se dice que la sucesión  $\{x_n\}$  tiene **orden de convergencia**  $p$  con *constante de error asintótica*  $\lambda$ .

- Si  $p = 1$ , se trata de **convergencia lineal**.
- Si  $p = 2$ , se trata de **convergencia cuadrática**.
- Si  $p = 3$ , se trata de **convergencia cúbica**.

y así sucesivamente. Es claro que si la constante asintótica  $\lambda$  es menor que 1,

$$0 < \lambda < 1 \rightarrow \epsilon_{n+1} \approx \lambda \cdot \epsilon_n^p, \quad n \rightarrow +\infty$$

El orden de convergencia marca de algún modo, la velocidad de convergencia de la sucesión. De manera que converger cuadráticamente es más potente que converger de manera lineal. Y en procesos iterativos de cálculo esto implica que en cada iteración se obtienen un mayor número de cifras decimales exactas. En efecto si

$$\epsilon_n < 10^{-(k+1)}$$

la aproximación obtenida tras la  $n$ -ésima iteración, proporciona al menos  $k$  cifras decimales exactas. Esto permite, conocida la expresión para el error de aproximación, determinar el número de iteraciones necesarias para acotar el error cometido.

#### 4.1. Ejemplo 1: (convergencia lineal)

Sea  $\lambda \in (0, 1)$  y se define por recurrencia la sucesión

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \lambda \cdot x_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Entonces  $x_n$  converge linealmente a cero.

#### 4.2. Ejemplo 2: (convergencia cuadrática)

Sea  $\lambda \in (0, 1)$  y se considera la sucesión definida por la recurrencia

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \lambda \cdot (x_n)^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Entonces  $x_n$  converge cuadráticamente a cero. De hecho, se puede comprobar que la sucesión tiene por término general

$$x_n = \lambda^{2^n - 1}$$

#### 4.3. Ejemplo 3: (convergencia de orden $p$ )

Sea  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $p \geq 2$  y se considera la sucesión definida por la recurrencia

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \lambda \cdot (x_n)^p, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Entonces  $x_n$  converge a cero con orden de convergencia  $p$ . La expresión que determina el término general es de la forma

$$x_n = \lambda^{\frac{p^n - 1}{p - 1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

que generaliza los ejemplos anteriores.

#### 4.4. Velocidad de convergencia

**Corolario:** Las sucesiones geométricas convergentes, poseen un tipo de convergencia lineal.

Se supone que se tienen sucesiones convergentes al mismo número real. No es restrictivo suponer que dicho valor es nulo. Por ejemplo, se pueden considerar las sucesiones clásicas

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}, \quad c_n = \frac{1}{n^p}$$

con  $p > 2$ . Es claro que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$$

Además en general, el tipo de convergencia que presentan es lineal, al ser

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$$

Pero es claro que dentro de los diferentes modos de aproximarse a cero, la aproximación más rápida es la generada por  $c_n$ , de suerte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{b_n} = 0, \quad \forall p > 2$$

Esto motiva la siguiente definición.

**Def.: (Velocidad de convergencia)** Sean  $x_n$  e  $y_n$  dos sucesiones de números reales, convergentes a un mismo valor real  $\alpha$ . Se denota por

$$\epsilon_n = |x_n - \alpha|, \quad \hat{\epsilon}_n = |y_n - \alpha|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

los correspondientes errores de aproximación. Se dice que  $y_n$  **converge a  $\alpha$  con mayor rapidez que  $x_n$**  si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\hat{\epsilon}_n}{\epsilon_n} = 0$$

Si existe una constante  $\lambda > 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\hat{\epsilon}_n}{\epsilon_n} = \lambda \neq 0$$

se dice que las sucesiones poseen el mismo carácter de convergencia. En el caso particular que  $\lambda = 1$  las sucesiones son **convergentemente equivalentes**.

El siguiente resultado establece algo esperado: a mayor orden mayor rapidez de convergencia.

**Proposición** Sean  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  dos sucesiones de números reales convergentes a un mismo valor  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se supone que  $(x_n)$  tiene orden de convergencia  $p$  e  $(y_n)$  orden de convergencia  $q$ , con  $0 < p < q$ . Si existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|y_n - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = \lambda < +\infty$$

entonces  $\lambda = 0$ , es decir, la sucesión  $(y_n)$  converge al límite más rápido que la sucesión  $(x_n)$  (donde son considerados solamente los valores de  $n$  para los que  $|x_n - \alpha| \neq 0$ ).

**Demostración:** Se definen, como antes, los errores de aproximación

$$\epsilon_n = |x_n - \alpha|, \quad \hat{\epsilon}_n = |y_n - \alpha|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y la sucesión

$$z_n := \frac{\hat{\epsilon}_n}{\epsilon_n}, \quad \text{con } \epsilon_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En tal caso, se puede escribir:

$$z_{n+1} = \frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\epsilon_{n+1}} = \frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n} \cdot \frac{\hat{\epsilon}_n^q}{\epsilon_n^q} \cdot \frac{\epsilon_n^q}{\epsilon_n^p} \cdot \frac{\epsilon_n^p}{\epsilon_{n+1}} = \frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n} \cdot \left(\frac{\hat{\epsilon}_n}{\epsilon_n}\right)^q \cdot \epsilon_n^{q-p} \cdot \frac{\epsilon_n^p}{\epsilon_{n+1}}$$

esto es,

$$z_{n+1} = \frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n^q} \cdot z_n^q \cdot \epsilon_n^r \cdot \frac{\epsilon_n^p}{\epsilon_{n+1}}, \quad r = q - p > 0$$

Si la sucesión  $z_n$  es convergente a un valor  $\lambda$ , en particular debe estar acotada por un cierto valor  $M$ ,

$$|z_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces es convergente con valor nulo, ya que se tiene la acotación

$$|z_{n+1}| \leq \frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n^q} \cdot M^q \cdot \epsilon_n^r \cdot \frac{\epsilon_n^p}{\epsilon_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y teniendo garantizada la existencia de los límites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n} = \lambda_2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^p} = \lambda_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n^r = 0$$

se deduce por la propiedad de monotonía, que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_{n+1}| \leq \lambda_2 \cdot M^q \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n^r = 0$$

esto es,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$$

como se quería demostrar.

#### 4.4.1. Ejemplo 1:

Las sucesiones

$$x_n = \frac{1}{n^p}, \quad y_n = e^{-n}, \quad p > 0$$

convergen linealmente hacia cero (ambas son *infinitésimos*). En cambio la velocidad de convergencia de la segunda es mucho mayor que la primera, al ser

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{e^n} = 0, \quad \forall p > 0$$

#### 4.4.2. Ejemplo 2:

Las sucesiones

$$x_n = 2^{-3^n}, \quad y_n = 3^{-2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

convergen a cero. Pero mientras que la convergencia en la primera es cúbica, la segunda es cuadrática. Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{-3^n}}{3^{-2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2^n}}{2^{3^n}} = 0$$

la velocidad de convergencia de la primera es mucho mayor que la segunda. Esto también se puede comprobar observando que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{\log(3)}{\log(2)}, \quad \forall n > 1$$

En consecuencia

$$\frac{3^n}{2^n} > \frac{\log(3)}{\log(2)} \rightarrow 3^n \cdot \log(2) > 2^n \cdot \log(3) \rightarrow \log(2^{3^n}) > \log(3^{2^n})$$

i.e.,

$$2^{3^n} > 3^{2^n} \Leftrightarrow 2^{-3^n} < 3^{-2^n}, \quad \forall n > 1$$

tal como se deduce del orden de convergencia.

#### 4.4.3. Ejemplo 3:

Dado cualquier *infinitésimo*  $\epsilon_n$ , entendido como sucesión de números reales que tiende a cero, siempre es posible encontrar otro infinitésimo que mejora la velocidad de convergencia. En efecto basta considerar

$$y_n = \epsilon_n^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad p > 1$$

y se prueba de manera trivial que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{\epsilon_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon_n^p}{\epsilon_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n^{p-1} = 0$$

## 5. Multiplicidad del cero de una función

**Def.:** Se dice que  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un **cero de multiplicidad**  $m$  ( $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ) de la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si la función se puede expresar en la forma

$$f(x) = (x - \alpha)^m \cdot g(x), \quad \forall x \neq \alpha$$

con  $x \in I(\alpha)$  un entorno de  $\alpha$  y

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) \neq 0$$

O también, si existe un entero positivo  $m$ , tal que verifica:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{(x - \alpha)^k} = 0, \quad \forall k < m, \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{(x - \alpha)^m} \neq 0$$

Cuando  $m = 1$  se dice que  $\alpha$  es un *cero simple* de  $f$ . Para funciones suficientemente derivables, los siguientes criterios, obtenidos por aplicación de los Teoremas de Taylor, permiten caracterizar los ceros múltiples de una función.

**Criterio de cero simple** Sea  $f \in C^1(a, b)$  y  $\alpha \in (a, b)$ . Entonces  $f$  tiene un cero simple en  $\alpha$  si y sólo si

$$f(\alpha) = 0 \quad y \quad f'(\alpha) \neq 0$$

**Criterio de cero múltiple** Sea  $f \in C^n(a, b)$  y  $\alpha \in (a, b)$ . Entonces  $f$  tiene un cero de multiplicidad  $m$  en  $\alpha$  si y sólo si

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{m-1}(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f^m(\alpha) \neq 0$$

**Ejemplo:**

Se considera la función  $f(x) = e^x - x - 1$  definida en un entorno del cero  $I$ . Se calculan las dos primeras derivadas:

$$f'(x) = e^x - 1, \quad f''(x) = e^x$$

Ahora si se evalúan las funciones  $f, f', f''$  en el punto  $\alpha = 0$ :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1 \neq 0$$

Por los criterios establecidos,  $\alpha = 0$  es un cero de  $f$  de multiplicidad  $m = 2$ .

## 6. Teoremas sobre convergencia lineal y cuadrática

**Teorema 1 (condición suficiente para convergencia lineal)**

Sea  $g \in C^1[a, b]$  tal que  $g([a, b]) \subset [a, b]$  y  $|g'(x)| \leq k$  para todo  $x \in [a, b]$ , donde  $k \in (0, 1)$ . Se denota por  $\alpha$  un punto fijo de  $g$  en el intervalo  $[a, b]$ . Si  $g'(\alpha) \neq 0$ , entonces para cualquier  $x_0 \in [a, b] - \{\alpha\}$ , la sucesión  $(x_n)$  definida por la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

converge linealmente al punto fijo  $\alpha$ .

**Demostración:** Por la definición de la sucesión  $x_n$ , se pueden evaluar los errores de aproximación sucesivos, expresados en la forma:

$$\epsilon_{n+1} = |x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)|$$

Aplicando el *Teorema del Valor Medio* a  $g$  en el intervalo de extremos  $x_n$  y  $\alpha$ , existe un número real  $c_n \in [x_n, \alpha]$ , tal que:

$$|g(x_n) - g(\alpha)| = |g'(c_n)| \cdot |x_n - \alpha|$$

Esto es,

$$\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = |g'(c_n)|$$

Además es claro que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \alpha$ , al verificarse la desigualdad

$$0 \leq |c_n - \alpha| \leq |x_n - \alpha|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $g'$  es una función continua, se tendrá entonces que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g'(c_n) = g'(\alpha)$$

Por tanto, en el paso al límite, se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |g'(c_n)| = |g'(\alpha)| \neq 0$$

Por consiguiente la convergencia (garantizada por el teorema del punto fijo) es lineal, como se quería demostrar.

**Teorema 2 (condición suficiente para convergencia cuadrática)**

Sea  $g \in C^2[a, b]$  tal que  $g([a, b]) \subset [a, b]$  y  $|g''(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Se denota por  $\alpha$ , un punto fijo de  $g$  en el intervalo  $[a, b]$ . Si  $g'(\alpha) = 0$ , entonces existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ , la sucesión  $(x_n)$  definida por la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

converge al menos cuadráticamente al punto fijo  $\alpha$ . Además, para valores suficientemente grandes de  $n$ ,

$$\epsilon_{n+1} < \frac{M}{2} \cdot \epsilon_n^2$$

**Demostración:** Al ser  $g \in C^2[a, b]$ , se puede aproximar  $g$  por su *polinomio de Taylor* de segundo orden, en torno al valor fijo  $\alpha$ :

$$g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - \alpha)^2, \quad \alpha < \xi < x$$

Como  $g(\alpha) = \alpha$  y  $g'(\alpha) = 0$ , poniendo  $x = x_n$ , se obtiene:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \alpha + \frac{g''(\xi_n)}{2}(x_n - \alpha)^2, \quad \alpha < \xi_n < x_n$$

donde  $\xi_n$  está comprendido entre  $\alpha$  y  $x_n$ . Por consiguiente, el cociente de aproximaciones

$$\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^2} = \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{|g''(\xi_n)|}{2}$$

Suponiendo que la segunda derivada de  $g$  es continua, es claro que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|g''(\xi_n)|}{2} = \frac{|g''(\alpha)|}{2}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{|g''(\alpha)|}{2} < +\infty$$

lo que implica convergencia al menos cuadrática. La acotación dada como última tesis del teorema, es consecuencia de la acotación de la segunda derivada en cierto entorno del punto fijo.

**Teorema 3 (condición suficiente para convergencia de orden  $p$ )**

Sea  $g \in C^p[a, b]$  tal que  $g([a, b]) \subset [a, b]$ . Se denota por  $\alpha$  un punto fijo de  $g$  en el intervalo  $[a, b]$ . Si

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

entonces existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ , la sucesión  $(x_n)$  definida por la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

es convergente al punto fijo  $\alpha$ , con orden de convergencia  $p$ . Además, si  $|g^{(p)}(x)| < M$ , para todo  $x \in [a, b]$ , para valores suficientemente grandes de  $n$ ,

$$\epsilon_{n+1} < \frac{M}{p!} \cdot \epsilon_n^p$$

**Demostración:** Al ser  $g \in C^p[a, b]$ , se puede aproximar  $g$  por su *polinomio de Taylor* de orden  $p$  en torno al valor fijo  $\alpha$ :

$$g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2 + \dots + \frac{g^{(p)}(\xi)}{p!}(x - \alpha)^p, \quad \alpha < \xi < x$$



Como  $g(\alpha) = \alpha$  y  $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ , poniendo  $x = x_n$ , se obtiene:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \alpha + \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p, \quad \alpha < \xi_n < x_n$$

Por tanto,

$$|x_{n+1} - \alpha| = \frac{|g^{(p)}(\xi_n)|}{p!} |x_n - \alpha|^p, \quad \alpha < \xi_n < x_n$$

esto es,

$$\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^p} = \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \frac{|g^{(p)}(\xi_n)|}{p!}$$

Suponiendo que la derivada  $p$ -ésima de  $g$  es continua, es claro que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|g^{(p)}(\xi_n)|}{p!} = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!} \neq 0$$

lo que implica convergencia de orden  $p$ .

**Ejemplo: (Aproximaciones al número de oro)**

Se considera la sucesión de números reales, definida por:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La sucesión converge a la **constante de oro**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180\dots$$

siendo además esta convergencia de tipo lineal. En efecto, basta considerar la función  $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$g(x) = +\sqrt{1 + x}$$

y observar que  $g([1, 2]) \subset [1, 2]$ . Además,  $g(\Phi) = \Phi$ . La primera derivada es

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}} \neq 0, \quad \forall x \in [1, 2]$$

Por aplicación del *Teorema 1*, se concluye que la convergencia es lineal.

**Ejemplo: (Aproximaciones de  $\sqrt{c}$ )**

Sea  $c > 1$ . Se considera la sucesión de números reales, definida por:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La sucesión converge cuadráticamente a  $\sqrt{c}$ .

Para demostrar esto, se considera la función

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( x + \frac{c}{x} \right), \quad x \in I$$

siendo  $I$  un intervalo tal que  $[1, c] \subset I$ . Hay que observar que

$$1 < g(1) = g(c) = \frac{c+1}{2} < c, \quad c > 1$$

Además  $g$  tiene un único punto fijo dentro de este intervalo.

$$g(x) = x \leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{c}{x}\right) \leftrightarrow 2x = x + \frac{c}{x} \rightarrow x^2 = c \rightarrow x = \pm\sqrt{c}$$

Al considerar sólo valores positivos,

$$g(x) = x \leftrightarrow x = +\sqrt{c}$$

Derivando esta función una vez,

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{c}{x^2}\right) = \frac{x^2 - c}{2x^2}$$

se comprueba que  $g'(+\sqrt{c}) = 0$ . En consecuencia, aplicando el *Teorema 2*, se puede afirmar que existe un entorno del punto fijo, donde la convergencia es al menos cuadrática.

Para ilustrar la velocidad de convergencia, se puede tomar para el último ejemplo,  $c = 3$ . Los valores numéricos obtenidos para las primeras iteraciones son:

$$\begin{aligned} x_0 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1,732, \quad x_4 = 1,73205 \\ x_5 = 1,7320504, \quad x_6 = 1,732050806, \quad x_7 = 1,732050808\dots \end{aligned}$$

Puesto que  $\sqrt{3} = 1,7320508075688772\dots$  (*Wolfram alpha*), ya en la séptima iteración se obtienen 8 cifras decimales exactas!

## 7. Análisis del método de Newton-Raphson

### Teorema de convergencia local

Sea  $f : [a, b] \rightarrow$  una función de clase  $C^2$  en un entorno de  $\alpha$ , tal que

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) \neq 0$$

Entonces existe un número real  $\delta > 0$  tal que para todo  $x_0 \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$  la sucesión definida por la *transformada de Newton-Raphson*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3\dots$$

converge a  $\alpha$ . Además si  $f$  es de clase  $C^3[a, b]$  la convergencia es al menos cuadrática.

Este resultado local permite diseñar algoritmos para calcular raíces de polinomios con bastante eficiencia. No obstante, queda englobado en un resultado más general, como el que se expone a continuación.

### Teorema de convergencia global

Sea  $f : [a, b] \rightarrow$  una función de clase  $C^2[a, b]$  verificando:

1.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

2.  $f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b]$
3.  $f''(x) \cdot f''(y) \geq 0, \quad \forall x, y \in [a, b]$
4.  $mx \left\{ \frac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \frac{|f(b)|}{|f'(b)|} \right\} \leq b - a$

Entonces existe un único  $\alpha \in [a, b]$  tal que  $f(\alpha) = 0$  y para cada  $x_0 \in [a, b]$  la sucesión del método de Newton-Raphson, definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

converge a  $\alpha$ . Además si  $f$  es de clase  $C^3[a, b]$  la convergencia es al menos cuadrática.

**Demostración:** Por la primera condición, aplicando el Teorema de Bolzano, existe al menos una raíz  $\alpha$  para  $f$ . De la segunda condición, aplicando el Teorema de Rolle se deduce que dicha raíz debe ser única (de lo contrario la derivada tendría una raíz).

De las condiciones 2. y 3. se obtiene que, tanto  $f'$  como  $f''$ , conservan su signo en  $[a, b]$ . Esto es,  $f$  mantiene la monotonía (o bien es creciente o bien siempre decreciente) y la curvatura (cóncava o convexa, y carente de puntos de inflexión). Se supone que  $f'(x) > 0$  y  $f''(x) \geq 0$ . El análisis del resto de casos sería similar.

Se define la función  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  en  $[a, b]$ . Derivando

$$g'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Por ser  $f$  creciente, con  $f(\alpha) = 0$  es claro que

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in [a, \alpha)$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (\alpha, b]$$

Por consiguiente,  $g$  es decreciente en  $[a, \alpha)$  y creciente en  $(\alpha, b]$ . Entonces

$$\text{Si } x \in [a, \alpha) \rightarrow \alpha = g(\alpha) \leq g(x) \leq g(a)$$

Ahora bien, por la condición (4),

$$\frac{|f(a)|}{|f'(a)|} \leq b - a \rightarrow a - \frac{f(a)}{f'(a)} \leq b$$

$$g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \leq b$$

Por tanto

$$x \in [a, \alpha) \rightarrow g(x) \in [\alpha, b]$$

Análogamente, como  $g$  es creciente en  $(\alpha, b]$ ,

$$\text{Si } x \in (\alpha, b] \rightarrow \alpha = g(\alpha) \leq g(x) \leq g(b) < b$$

Por tanto

$$x \in [\alpha, b] \rightarrow g(x) \in [\alpha, b]$$

Es decir, en cualquiera de los dos casos, la sucesión generada por el método de Newton-Raphson verifica

$$x_n \in [\alpha, b], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

luego se trata de una sucesión estrictamente decreciente y acotada inferiormente. En consecuencia debe ser convergente. Si se denota por  $\beta$  a dicho límite es claro que

$$x_{n+1} = g(x_n) \rightarrow \beta = g(\beta)$$

y por la unicidad del punto fijo, debe ser

$$\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = \alpha$$

lo que prueba la tesis del teorema. Además, como  $g'(\alpha) = 0$ , por los resultados previos (sección 6, teorema 2), la convergencia es al menos cuadrática.

**Aplicación: (Cálculo de la raíz positiva de un número)**

Para hallar la raíz cuadrada positiva del número real  $c$ , se considera la función  $f(x) = x^2 - c$ . Sean  $a, b$  números reales, tales que

$$0 < a^2 < c < b^2$$

de suerte que  $a^2 - c < 0$  y  $b^2 - c > 0$ .

En tal caso se verifican las cuatro condiciones del teorema de convergencia global anterior. En efecto,

1.  $f(a) \cdot f(b) = (a^2 - c) \cdot (b^2 - c) < 0$ .
2.  $f'(x) = 2x > 0, \quad \forall x \in [a, b]$ .
3.  $f''(x) = 2 > 0, \quad \forall x \in [a, b]$ .
4.  $\frac{|f(b)|}{|f'(b)|} = \frac{b^2 - c}{2b} \leq \frac{b^2 - a^2}{2b} = \frac{(b+a)(b-a)}{2b} \leq b - a$

En consecuencia, el método de *Newton-Raphson* aplicado a  $f(x) = x^2 - c$  en un intervalo  $[a, b]$  en las condiciones dadas, converge a la raíz positiva de  $c$ .

**Aplicación: (Cálculo de la raíz  $p$ -ésima de un número)**

Para hallar la raíz  $p$ -ésima positiva del número real  $c$  ( $p > 2$ ), se considera la función  $f(x) = x^p - c$ . Sean  $a, b$  números reales, tales que

$$0 < a^p < c < b^p$$

Siguiendo un razonamiento similar al caso previo, es fácil demostrar las hipótesis del teorema de convergencia global.

1.  $f(a) \cdot f(b) = (a^p - c) \cdot (b^p - c) < 0$ .
2.  $f'(x) = px^{p-1} > 0, \quad \forall x \in [a, b]$ .
3.  $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0, \quad \forall x \in [a, b]$ .
4.  $\frac{|f(b)|}{|f'(b)|} = \frac{b^p - c}{p \cdot b^{p-1}} \leq \frac{b^p - a^p}{p \cdot b^{p-1}} \leq b - a$

Para probar la última condición, se parte de la desigualdad

$$1 \leq 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} \leq p, \quad \forall x \in [0, 1]$$

o, de manera equivalente

$$1 \leq \frac{x^p - 1}{x - 1} \leq p, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Al ser  $0 < a < b$ , se puede considerar  $x = \frac{a}{b} < 1$ , y se tendrá:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^p - 1}{\left(\frac{a}{b}\right) - 1} \leq p \rightarrow \frac{\frac{a^p - b^p}{b^p}}{\frac{a - b}{b}} \leq p \rightarrow \frac{b^p - a^p}{(b - a) \cdot b^{p-1}} \leq p$$

Esto es,

$$\frac{b^p - a^p}{p \cdot b^{p-1}} \leq b - a$$

lo que equivale a afirmar

$$0 < \frac{|f(b)|}{|f'(b)|} = \frac{b^p - c}{p \cdot b^{p-1}} \leq \frac{b^p - a^p}{p \cdot b^{p-1}} \leq b - a$$

siempre que  $0 < a < b$ , con  $a^p < c < b^p$ . Por tanto, el algoritmo de iteración

$$x_{n+1} = \frac{1}{p} \cdot \left( (p - 1) \cdot x_n + \frac{c}{x_n^{p-1}} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

con  $x_0 \in [a, b]$ , converge cuadráticamente al número  $\sqrt[p]{c}$ .

### Cálculo de $\sqrt[5]{2}$ .

Por ejemplo, para  $p = 5$  y  $c = 2$ , se obtendría la función

$$g(x) = \frac{1}{5} \cdot \left( 4x + \frac{2}{x^4} \right)$$

que se podría considerar definida en el intervalo  $[1, 2]$ , al ser  $1^5 < 2 < 2^5$ . Partiendo del valor inicial  $x_0 = 1$ , se obtendrían los valores numéricos

$$x_0 = 1, \quad x_1 = g(1) = 1,2, \quad x_2 = g(1,2) = 1,15290, \quad x_3 = g(1,15290) = 1,14872$$

$$x_4 = g(1,1487) = 1,148675, \quad x_5 = g(1,148675) = 1,14869835, \quad x_6 = 1,148698355$$

Ya en la séptima iteración se observa que las primeras ocho cifras significativas no varían,

$$x_7 = g(1,148698355) = 1,148698355\dots$$

aproximándose sucesivamente al valor real

$$\sqrt[5]{2} = 1,1486983549970350067986269467779275894438508890977975055137111184\dots$$

obtenido mediante el algoritmo de computación (*Wolfram Alpha*).

## 8. Aceleración de convergencia

La cuestión que se plantea ahora es la siguiente: *dada una sucesión de números reales  $(x_n)$  que converge con cierto orden al número real  $\alpha$ , encontrar un algoritmo iterativo que mejore la velocidad de convergencia, i.e.*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|y_n - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = 0$$

para una cierta sucesión  $(y_n)$  con límite  $\alpha$ .

### Diferencias progresivas

**Def.:** Dada la sucesión  $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ , se define la *diferencia progresiva de primer orden*  $\Delta x$ , por:

$$(\Delta x)_n := x_{n+1} - x_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La *diferencia progresiva de segundo orden*,  $\Delta^2 x$  es:

$$(\Delta^2 x)_n = (\Delta x)_{n+1} - (\Delta x)_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En general, la *diferencia progresiva de orden  $k$* ,  $\Delta^k x$  se define por la expresión recurrente:

$$\boxed{(\Delta^k x)_n = (\Delta^{k-1} x)_{n+1} - (\Delta^{k-1} x)_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots}$$

Así, la diferencia progresiva de orden 3, se obtiene del siguiente modo:

$$\begin{aligned} (\Delta^3 x)_n &= (\Delta^2 x)_{n+1} - (\Delta^2 x)_n = (x_{n+3} - 2x_{n+2} + x_{n+1}) - (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) = \\ &= x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = \binom{3}{0} x_{n+3} - \binom{3}{1} x_{n+2} + \binom{3}{2} x_{n+1} - \binom{3}{3} x_n \end{aligned}$$

No es complicado observar que, en general, estas diferencias obedecen a expresiones de la forma:

$$(\Delta^k x)_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \cdot x_{n+k-i}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Por ejemplo, si se considera la sucesión  $x_n = \frac{1}{n}$ , la diferencia de primer orden es una nueva sucesión, de la forma:

$$(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Esta nueva sucesión converge con mayor rapidez a cero. Las diferencias de segundo orden serían:

$$\begin{aligned} (\Delta^2 x)_n &= (\Delta x)_{n+1} - (\Delta x)_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n + n^2 + 3n + 2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

que aumenta la convergencia de la diferencia progresiva de primer orden. Esto es una propiedad general.

**Deducción de la fórmula de Aitken**

Sea  $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$  una sucesión de números reales que converge linealmente a  $\alpha$ . Se supone que las diferencias

$$e_n = x_n - \alpha$$

tienen el mismo signo (se puede suponer que son positivas). Entonces para valores suficientemente grandes de  $n$ ,

$$\frac{x_{n+2} - \alpha}{x_{n+1} - \alpha} \approx \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha}$$

ya que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = \lambda \neq 0$$

al suponer convergencia lineal. En este caso, multiplicando en cruz,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2\alpha x_{n+1} + \alpha^2 &\approx x_{n+2}x_n - \alpha x_{n+2} - \alpha x_n + \alpha^2 \\ \alpha \cdot (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) &\approx x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2 \\ \alpha \cdot (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) &\approx (x_{n+2}x_n - 2x_n x_{n+1} + x_n^2) - (x_{n+1}^2 - 2x_n x_{n+1} + x_n^2) \\ \alpha \cdot (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) &\approx x_n \cdot (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) - (x_{n+1} - x_n)^2 \end{aligned}$$

esto es,

$$\alpha \cdot (\Delta^2 x)_n \approx x_n \cdot (\Delta^2 x)_n - ((\Delta x)_n)^2$$

y por tanto

$$\alpha \approx x_n - \frac{((\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n}$$

Esto motiva definir la **transformada de Aitken** de la sucesión  $x_n$ ,

$$y_n = x_n - \frac{((\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

Por lo anterior, es claro que la *transformada de Aitken* de una sucesión convergente, es una nueva sucesión que converge al mismo límite. Lo interesante es que esta transformada acelera la velocidad de convergencia, tal y como se prueba en el siguiente teorema.

**Teorema sobre aceleración de convergencia (Aitken, 1926)**

Sea  $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$  una sucesión de números reales que converge linealmente al límite  $\alpha$ , con constante de convergencia  $0 < \lambda < 1$ . Se supone que para todos los valores de  $n$  suficientemente grandes, se tiene

$$(x_n - \alpha) \cdot (x_{n+1} - \alpha) > 0$$

Entonces la sucesión  $(y_n)$ , definida por

$$y_n = x_n - \frac{((\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

converge a  $\alpha$  con mayor rapidez que  $x_n$ , en el sentido de que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|y_n - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = 0$$

**Demostración:** Se denota

$$k_n = \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n}, \quad \epsilon_n = |x_n - \alpha| \neq 0$$

Por hipótesis, se sabe que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = \lambda \neq 0, \quad |\lambda| < 1$$

Sea  $y_n$  la sucesión definida por el *algoritmo de Aitken*. Las aproximaciones sucesivas, en este caso, son:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_n &= y_n - \alpha = x_n - \alpha - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = \\ &= (x_n - \alpha) - \frac{((x_{n+1} - \alpha) - (x_n - \alpha))^2}{(x_{n+2} - \alpha) - 2(x_{n+1} - \alpha) + (x_n - \alpha)} = \\ &= \epsilon_n - \frac{(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n)^2}{\epsilon_{n+2} - 2\epsilon_{n+1} + \epsilon_n} = \epsilon_n - \frac{(k_n \epsilon_n - \epsilon_n)^2}{k_{n+1} k_n \epsilon_n - 2\epsilon_n k_n + \epsilon_n} = \\ &= \epsilon_n - \frac{\epsilon_n^2 \cdot (k_n - 1)^2}{\epsilon_n \cdot (k_{n+1} k_n - 2k_n + 1)} = \epsilon_n \cdot \frac{k_n(k_{n+1} - k_n)}{k_{n+1} k_n - 2k_n + 1} \end{aligned}$$

Suponiendo que  $\lambda \neq 1$ , se pueden tomar límites en la expresión previa y obtener:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\hat{\epsilon}_n}{\epsilon_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n(k_{n+1} - k_n)}{k_{n+1} k_n - 2k_n + 1} = 0$$

**Observación:** Nótese que en la demostración anterior, es relevante la hipótesis sobre la constante asintótica

$$0 < \lambda < 1$$

En efecto, se va a demostrar con un par de ejemplos que, si  $\lambda = 1$ , el resultado no es válido, ni se mejora la velocidad de convergencia del algoritmo.

**Ejemplo:** El caso  $x_n = \frac{1}{n}$ . Para la sucesión  $x_n = \frac{1}{n}$ , que es estrictamente decreciente y convergente a  $\alpha = 0$ , se dispone de las diferencias progresivas,

$$\begin{aligned} (\Delta x)_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} \\ (\Delta^2 x)_n &= \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

La sucesión generada por el *algoritmo de Aitken*, es:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{((\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n} = \frac{1}{n} - \frac{\left(-\frac{1}{n(n+1)}\right)^2}{\frac{2}{n(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n^2(n+1)^2}}{\frac{2}{n(n+1)(n+2)}} = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{n(n+1)(n+2)}{2n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{n+2}{2n(n+1)} = \frac{2n+2-n-2}{2n(n+1)} = \frac{n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

Es decir, la sucesión generada para acelerar la convergencia es

$$y_n = \frac{1}{2(n+1)}$$

que si bien es convergente a cero, verifica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{2} \neq 0$$



esto es, poseen la misma velocidad de convergencia y no se cumple la tesis establecida por el teorema.

**Ejemplo:** El caso  $x_n = \frac{1}{n^2}$ .

El caso anterior es paradigmático de lo que sucede cuando  $\lambda = 1$ . Para la sucesión  $x_n = \frac{1}{n^2}$ , que converge a cero con mayor velocidad que  $\frac{1}{n}$ , se puede comprobar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

El algoritmo ideado no mejora la velocidad de convergencia.

En efecto, cálculos relativamente sencillos, permiten obtener en este caso, las expresiones:

$$\begin{aligned} (\Delta x)_n &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \\ (\Delta^2 x)_n &= \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{6n^2+12n+4}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{((\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n} = \frac{1}{n^2} - \frac{\left(-\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)^2}{\frac{6n^2+12n+4}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{1}{n^2} - \frac{(2n+1)^2 n^2 (n+1)^2 (n+2)^2}{n^4 (n+1)^4 (6n^2+12n+4)} = \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{(2n+1)^2 (n+2)^2}{n^2 (n+1)^2 (6n^2+12n+4)} = \frac{(n+1)^2 (6n^2+12n+4) - (2n+1)^2 (n+2)^2}{n^2 (n+1)^2 (6n^2+12n+4)} = \\ &= \frac{(n^2+2n+1)(6n^2+12n+4) - (4n^2+4n+1)(n^2+4n+4)}{n^2 (n+1)^2 (6n^2+12n+4)} = \\ &= \frac{6n^4+12n^3+4n^2+12n^3+24n^2+8n+6n^2+12n+4}{n^2 (n+1)^2 (6n^2+12n+4)} = \\ &= \frac{4n^4+16n^3+16n^2+4n^3+16n^2+16n+n^2+4n+4}{n^2 (n+1)^2 (6n^2+12n+4)} = \\ &= \frac{2n^4+4n^3+n^2}{n^2 (n+1)^2 (6n^2+12n+4)} = \frac{2n^2+4n+1}{(n+1)^2 (6n^2+12n+4)} \end{aligned}$$

Nótese que para  $n$  suficientemente grande, se puede tomar en buena aproximación,

$$\begin{aligned} y_n &\approx \frac{2n^2+4n+1}{(n+1)^2 (6n^2+12n+4)} = \frac{2(n^2+2n+1)}{(n+1)^2 \cdot 2(3n^2+6n+2)} = \\ &= \frac{2(n+1)^2}{2(n+1)^2 (3n^2+6n+2)} = \frac{1}{3n^2+6n+2} \end{aligned}$$

Aunque bien es cierto que

$$y_n = \frac{1}{3n^2+6n+2} < \frac{1}{n^2} = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

no es cierto que aumente la velocidad de convergencia. La sucesión  $y_n$  posee el mismo carácter de convergencia lineal que  $x_n$ , al verificar

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3n^2 + 6n + 2} = \frac{1}{3} \neq 0$$

Los ejemplos anteriores muestran las debilidades del algoritmo de Aitken. Lo cual insta a buscar nuevos procesos de mejora, que suplan los casos más restrictivos.

## 9. Método de Steffensen

El *método de Steffensen* se puede considerar como una combinación del método del punto fijo y del método de Aitken. Para construir la sucesión de las aproximaciones  $x_n$ , en todo tercer paso se usa la fórmula de Aitken, y en el resto se va aplicando la iteración

$$\begin{aligned} x_n &= g(x_{n-1}), & n \neq 3 \\ x_{3n+3} &= x_{3n} - \frac{(\Delta x)_{3n}^2}{(\Delta^2 x)_{3n}}, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Esto aumenta considerablemente la velocidad de convergencia. Concretamente se probará el siguiente resultado.

### Teorema sobre convergencia de Steffensen

Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^3[a, b]$ , con un punto fijo  $\alpha$ , tal que

$$g(\alpha) = \alpha, \quad g'(\alpha) \neq 1$$

Entonces existe un  $\delta > 0$ , tal que el *método de Steffensen* converge cuadráticamente para cualquier  $x_0 \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ .

### Aplicación

Se considera la función  $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

Al ser una función continua con  $g([1, 2]) \subset [1, 2]$ , existe al menos un punto fijo en el intervalo. Además, la derivada

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} > 0, \quad \forall x > 0$$

por lo que en el intervalo considerado se trata de una función estrictamente creciente. Esto garantiza la unicidad del punto fijo. Por otra parte es claro que

$$g'(x) < 1, \quad \forall x > 0$$

En consecuencia, se puede aplicar el algoritmo de iteración

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 = 1$$

que tenderá al único punto fijo  $\alpha \in [1, 2]$ . Nótese que, en este caso,

$$\alpha = \sqrt[3]{1+\alpha} \Leftrightarrow \alpha^3 = 1 + \alpha$$

i.e., se está obteniendo indirectamente la única raíz real positiva del polinomio

$$p(x) = x^3 - x - 1$$

en el intervalo  $[1, 2]$ .

Partiendo del valor inicial  $x_0 = 1$ , se obtienen los primeros valores de la sucesión  $x_n$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, & x_1 &= g(1) = \sqrt[3]{2} = 1,2599\dots, & x_2 &= g(1,2599) = 1,312293\dots \\ x_3 &= g(1,3123) = 1,322353, & x_4 &= g(1,3223) = 1,324268, & x_5 &= g(1,32468) = 1,324632 \\ x_6 &= g(1,324632) = 1,32470, & x_7 &= g(1,32470) = 1,3247148, \\ x_8 &= g(1,3247148) = 1,324717372, & x_9 &= g(1,324717372) = 1,324717846 \\ x_{10} &= g(1,324717846) = 1,324717936\dots \end{aligned}$$

En la décima iteración se obtienen 7 cifras decimales exactas, aproximándose cada vez más al valor

$$\alpha = 1,32471795724474609085\dots$$

obtenido con *Wolfram Alpha*.

Si se aplica el *algoritmo de Steffensen*, se deben fijar los tres primeros valores por iteración:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = g(1) = 1,2599, \quad x_2 = g(1,2599) = 1,3123$$

Para el cálculo de  $x_3$ , se aplica el *algoritmo de Aitken*,

$$x_3 = x_0 - \frac{(\Delta x)_0^2}{(\Delta^2 x)_0} = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = 1,32553$$

Continuando con el proceso, se itera el valor obtenido:

$$\begin{aligned} x_4 &= g(x_3) = g(1,32553) = 1,324872 \\ x_5 &= g(x_4) = g(1,324872) = 1,324747 \\ x_6 &= x_3 - \frac{(\Delta x)_3^2}{(\Delta^2 x)_3} = x_3 - \frac{(x_4 - x_3)^2}{x_5 - 2x_4 + x_3} = 1,324717685\dots \end{aligned}$$

y se sigue un nuevo ciclo,

$$\begin{aligned} x_7 &= g(x_6) = g(1,324717685) = 1,324717906 \\ x_8 &= g(x_7) = g(1,324717906) = 1,324717947 \\ x_9 &= x_6 - \frac{(\Delta x)_6^2}{(\Delta^2 x)_6} = x_6 - \frac{(x_7 - x_6)^2}{x_8 - 2x_7 + x_6} = 1,324717956\dots \end{aligned}$$

obteniendo 8 cifras decimales exactas en la novena iteración. No obstante, este método puede ser mejorado, utilizando un mayor número de veces el algoritmo de Aitken en el proceso.

Si se considera un proceso de iteración de punto fijo,  $x_{n+1} = f(x_n)$ , que se supone convergente a un cierto valor  $\alpha$ , el método de Aitken se vuelve poco útil, ya que se conoce la sucesión recurrente, pero no se dispone, en principio, de la expresión general que permite determinar el término  $n$ -ésimo de la sucesión

$$x_n = F(n)$$

Es por esto, que se puede realizar una pequeña variación de la expresión discreta del algoritmo y suponer la siguiente transformada de  $f$ ,

$$g(x) = x - \frac{(f(x) - x)^2}{f(f(x)) - 2f(x) + x}, \quad x \in I$$

conocida como *transformada de Steffensen*. De este modo, se dispone de una nueva sucesión de iteraciones,

$$y_{n+1} = g(y_n) = y_n - \frac{(f(y_n) - y_n)^2}{f(f(y_n)) - 2f(y_n) + y_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

con  $y_0 \in I$ . Lo interesante de esta sucesión es que mejora la velocidad de convergencia, pasando a ser al menos cuadrática, tal como se prueba en el siguiente teorema.

### **Teorema local de convergencia de Steffensen**

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  en  $(a, b)$ , con un punto fijo  $\alpha \in (a, b)$ , tal que

$$f(\alpha) = \alpha, \quad f'(\alpha) \neq 1$$

Entonces, existe un  $\delta > 0$  tal que  $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset (a, b)$  y para cualquier  $y_0 \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ , el algoritmo de Steffensen,

$$y_{n+1} = y_n - \frac{(f(y_n) - y_n)^2}{f(f(y_n)) - 2f(y_n) + y_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

está bien definido y converge hacia  $\alpha$  con orden de convergencia al menos  $p = 2$ .

**Demostración:** La idea fundamental consiste en expresar la diferencia  $|y_{n+1} - \alpha|$  en términos de  $|y_n - \alpha|$ , utilizando los desarrollos de Taylor de  $f$  en un entorno del punto  $\alpha$ .

Nótese que, en tal caso, si  $g$  es la *transformada de Steffensen* de  $f$ , se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|y_{n+1} - \alpha|}{|y_n - \alpha|^2} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - x}{(x - \alpha)^2}$$

Se probará que dicho límite tiene por valor una expresión de la forma,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - x}{(x - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha) \cdot f'(\alpha)}{2(f'(\alpha) - 1)}$$

lo que garantiza una convergencia, al menos cuadrática.

En lo sucesivo, se dirá que  $\epsilon_p(x) \approx o(x - \alpha)^p$ , es una *función infinitesimal* en torno al número real  $\alpha$ , si verifica:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\epsilon_p(x)}{(x - \alpha)^p} = 0$$

Nótese además que se verifican las propiedades:

$$[P1] : \quad o((x - \alpha)^p) + o((x - \alpha)^q) = o((x - \alpha)^{\min(p,q)})$$

$$[P2] : \quad o((x - \alpha)^p) \cdot o((x - \alpha)^q) = o((x - \alpha)^{p+q})$$

para todo  $p, q \in \mathbb{N}$ .

El polinomio de Taylor de segundo orden de la función  $f$  en torno al punto fijo  $\alpha$ , es:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)$$

Puesto que  $f(\alpha) = \alpha$ ,

$$f(x) - \alpha = \frac{f'(\alpha)}{1!}(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)$$

para  $x$  en un cierto entorno de  $\alpha$ . Elevando al cuadrado la expresión, se obtendrá:

$$(f(x) - \alpha)^2 = f'(\alpha)^2(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2), \quad \forall x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$$

Por otro lado,

$$(\Delta f)(x) = f(x) - x = (f'(\alpha) - 1)(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)$$

$$(\Delta f)^2(x) = (f(x) - x)^2 = (f'(\alpha) - 1)^2(x - \alpha)^2 + (f'(\alpha) - 1) \cdot f''(\alpha)(x - \alpha)^3 + o((x - \alpha)^3)$$

que proporciona la expresión para el numerador de la función  $g$ . Para el denominador, se realizan los siguientes cálculos:

$$f(f(x)) - f(x) = (f'(\alpha) - 1)(f(x) - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(f(x) - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)$$

Restando las expresiones obtenidas,

$$\begin{aligned} (\Delta^2 f)(x) &= f(f(x)) - 2f(x) + x = (f(f(x)) - f(x)) - (f(x) - x) = \\ &= (f'(\alpha) - 1)(f(x) - x) + \frac{f''(\alpha)}{2!} \cdot [(f(x) - \alpha)^2 - (x - \alpha)^2] + o((x - \alpha)^2) = \\ &= (f'(\alpha) - 1)^2(x - \alpha) + (f'(\alpha) - 1) \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \frac{f''(\alpha)}{2!}(f'(\alpha)^2 - 1)(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2) = \\ &= (f'(\alpha) - 1)^2(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(f'(\alpha) - 1)(1 + f'(\alpha) + 1)(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2) = \end{aligned}$$

esto es,

$$(\Delta^2 f)(x) = (f'(\alpha) - 1)^2(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(f'(\alpha) - 1)(f'(\alpha) + 2)(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)$$

Considerando la función que define el algoritmo de Steffensen,

$$g(x) = x - \frac{(f(x) - x)^2}{f(f(x)) - 2f(x) + x} = x - \frac{(\Delta f)^2(x)}{(\Delta^2 f)(x)}$$

se tendrá,

$$\begin{aligned} g(x) - \alpha &= (x - \alpha) - \frac{(\Delta f)^2(x)}{(\Delta^2 f)(x)} = \frac{(\Delta^2 f)(x)(x - \alpha) - (\Delta f)^2(x)}{(\Delta^2 f)(x)} = \\ &= \frac{\frac{f''(\alpha)}{2!}(f'(\alpha) - 1)f'(\alpha)(x - \alpha)^3 + o((x - \alpha)^3)}{(f'(\alpha) - 1)^2(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(f'(\alpha) - 1)(f'(\alpha) + 2)(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)} = \\ &= \frac{\frac{f''(\alpha)}{2!}(f'(\alpha) - 1)f'(\alpha)(x - \alpha)^3 + o((x - \alpha)^3)}{(f'(\alpha) - 1)^2(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(f'(\alpha) - 1)(f'(\alpha) + 2)(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{f''(\alpha)}{2!} f'(\alpha)(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)}{(f'(\alpha) - 1) + \frac{f''(\alpha)}{2!} (f'(\alpha) + 2)(x - \alpha) + o((x - \alpha))} =$$

En consecuencia,

$$\frac{g(x) - \alpha}{(x - \alpha)^2} = \frac{\frac{f''(\alpha)}{2!} f'(\alpha) + \frac{o((x - \alpha)^2)}{(x - \alpha)^2}}{(f'(\alpha) - 1) + \frac{f''(\alpha)}{2!} (f'(\alpha) + 2)(x - \alpha) + o((x - \alpha))}$$

Tomando límites, cuando  $x \rightarrow \alpha$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - \alpha}{(x - \alpha)^2} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\frac{f''(\alpha)}{2!} f'(\alpha) + \frac{o((x - \alpha)^2)}{(x - \alpha)^2}}{(f'(\alpha) - 1) + \frac{f''(\alpha)}{2!} (f'(\alpha) + 2)(x - \alpha) + o((x - \alpha))} = \frac{f'(\alpha) f''(\alpha)}{2(f'(\alpha) - 1)}$$

En definitiva, si  $f'(\alpha) \neq 1$ , dicho límite existe con valor finito, como se quería demostrar.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - \alpha}{(x - \alpha)^2} = \frac{f'(\alpha) f''(\alpha)}{2(f'(\alpha) - 1)}$$

Por tanto, ya sea un punto fijo *atractor* ( $f'(\alpha) < 1$ ), como repulsor ( $f'(\alpha) > 1$ ), el teorema sigue siendo válido.

**Observación 1:** Nótese que el método de Steffensen permite trabajar directamente con la función, con lo que mejora el algoritmo de Aitken, en el que hay que determinar los primeros valores por iteración antes de aplicar el algoritmo acelerado.

**Observación 2:** Si la sucesión determinada por iteración converge a un punto fijo linealmente, la aceleración de Steffensen lo hace al menos cuadráticamente. Si las iteraciones de punto fijo convergen con orden de convergencia  $p > 1$ , las de Steffensen convergen con convergencia de orden al menos  $2p - 1$ .

**Observación 3:** Si además se cumple que el punto fijo es estacionario, el algoritmo de Steffensen tienen una convergencia de orden  $p \geq 3$ .

### Métodos combinados

Dado un sistema dinámico de punto fijo  $\alpha$ ,  $(I, f)$ , siempre es posible encontrar otro sistema dinámico  $(I, g)$  con el mismo punto fijo, y que mejora la velocidad de convergencia. Por tanto, se podría acelerar un algoritmo diseñando una función compuesta con otra de mayor orden de convergencia. Esto presenta ciertas limitaciones como muestra la siguiente proposición.

### Proposición

Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones con un mismo punto fijo  $\alpha$ . Se supone que el orden de convergencia de  $f$  es  $p$  y el orden de convergencia  $g$  es  $q$ , esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - \alpha}{(x - \alpha)^p} = \lambda_1 \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - \alpha}{(x - \alpha)^q} = \lambda_2 \neq 0, \quad p, q \in \mathbb{N}$$

Entonces el orden de convergencia de la función compuesta  $f \circ g$  es  $q$ .

**Demostración:** Hay que observar en primer lugar que, efectivamente, la composición tiene el mismo punto fijo.

$$(f \circ g)(\alpha) = f(g(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$$

Sea  $n \in \mathbb{N}$  el orden de convergencia de la composición considerada. En tal caso,

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x)) - x}{(x - \alpha)^n} &= \frac{f(g(x)) - g(x)}{(x - \alpha)^n} + \frac{g(x) - x}{(x - \alpha)^n} = \\ &= \frac{f(g(x)) - g(x)}{(g(x) - \alpha)^p} \cdot \frac{(g(x) - \alpha)^p}{(x - \alpha)^n} + \frac{g(x) - x}{(x - \alpha)^q} \cdot \frac{(x - \alpha)^q}{(x - \alpha)^n} \\ &= \frac{f(g(x)) - g(x)}{(g(x) - \alpha)^p} \cdot \frac{(g(x) - \alpha)^p}{(x - \alpha)^{pq}} \cdot \frac{(x - \alpha)^{pq}}{(x - \alpha)^n} + \frac{g(x) - x}{(x - \alpha)^q} \cdot \frac{(x - \alpha)^q}{(x - \alpha)^n} \end{aligned}$$

Se denota por [EQ] la última expresión obtenida. Se va a analizar lo que sucede con cada uno de los sumandos al pasar al límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(g(x)) - g(x)}{(g(x) - \alpha)^p} &= \lim_{y=g(x) \rightarrow \alpha} \frac{f(y) - y}{(y - \alpha)^p} = \lambda_1 \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(g(x) - \alpha)^p}{(x - \alpha)^{pq}} &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{g(x) - \alpha}{(x - \alpha)^q} \right)^p = \lambda_2^p \neq 0 \end{aligned}$$

Si se supone que  $q > n$ , entonces  $pq > n$ , y en consecuencia

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x - \alpha)^{pq}}{(x - \alpha)^n} = \lim_{x \rightarrow \alpha} (x - \alpha)^{pq-n} = 0$$

por lo que el primer sumando se anula. De igual modo, los límites que figuran en segundo término deben valer:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - x}{(x - \alpha)^q} &= \lambda_2 \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x - \alpha)^q}{(x - \alpha)^n} &= \lim_{x \rightarrow \alpha} (x - \alpha)^{q-n} \end{aligned}$$

Para  $n < q$  este último límite también es nulo. En cambio, si  $n = q$ , se obtiene para la expresión general [EQ], un valor  $\lambda$  no nulo. En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(f \circ g)(x) - x}{(x - \alpha)^n} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(g(x)) - x}{(x - \alpha)^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < q \\ \lambda & \text{si } n = q \\ \infty & \text{si } n > q \end{cases}$$

siendo por tanto el orden de convergencia de la composición igual a  $q$ .

La proposición muestra que el orden en la composición condiciona el orden de convergencia. Se denota por  $Ord(f)$  el orden de convergencia de  $f$ , de suerte que, en la nueva notación

$$\boxed{Ord(f) = p, \quad Ord(g) = q \quad \Rightarrow \quad Ord(f \circ g) = Ord(g) = q}$$

### Aplicación numérica

Las ideas anteriormente expuestas pueden servir para acelerar considerablemente los algoritmos diseñados con el fin de determinar aproximaciones numéricas de ceros de una función.

La idea resulta bastante sencilla: partiendo de la ecuación funcional

$$f(x) = 0$$

se obtiene la transformada de Newton  $F$ ,

$$F(x) = N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \forall x \in I$$

de suerte que

$$f(\alpha) = 0 \leftrightarrow F(\alpha) = \alpha$$

en un determinado intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  donde está garantizada la convergencia (*verificar condiciones del teorema del punto fijo*).

A continuación se aplica el algoritmo de Steffensen a esta función  $F$ . Si se denota, como antes

$$S_f(x) = g(x) = x - \frac{(f(x) - x)^2}{f(f(x)) - 2f(x) + x}, \quad \forall x \in I$$

es claro que se puede considerar la composición

$$G(x) = (S_f \circ N_f)(x) = g(F(x)) = x - \frac{(F(x) - x)^2}{F(F(x)) - 2F(x) + x}$$

Al iterar esta función, a partir de un valor inicial  $x_0 \in I$ , la velocidad de convergencia del método de Newton, que se sabe que es al menos cuadrática, es acelerada por el método de Steffensen, por lo que se aumenta considerablemente la velocidad del proceso.

Para mostrar la eficiencia del proceso, considérese el problema de determinar un buen número de cifras decimales de  $\alpha = +\sqrt{2}$ , raíz positiva de la ecuación cuadrática

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

La transformada de Newton es

$$F(x) = N_f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 2]$$

Además

$$\begin{aligned} F(x) - x &= \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \\ F^2(x) = F(F(x)) &= \left( \frac{\frac{x}{2} + \frac{1}{x}}{2} + \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{1}{x}} \right) = \frac{(x^2 + 2)^2 + 8x^2}{4x(x^2 + 2)} \end{aligned}$$

La transformada de Steffensen de  $F$  es

$$\begin{aligned} G(x) = S_f(F(x)) &= x - \frac{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^2}{\frac{(x^2+2)^2+8x^2}{4x(x^2+2)} - x - \frac{x}{2} + x} = x - \frac{\left(\frac{2-x^2}{2x}\right)^2}{\frac{(x^2+2)^2+8x^2}{4x(x^2+2)} - \frac{x}{2}} = \\ &= x - \frac{\left(\frac{2-x^2}{2x}\right)^2}{\frac{(x^2+2)^2+8x^2-8(x^2+2)}{4x(x^2+2)}} = x - \frac{4x(x^2+2) \cdot \left(\frac{2-x^2}{2x}\right)^2}{(x^2+2)^2 - 16} = \\ &= \frac{x(x^2+2)^2 - 16x - \frac{4x}{4x^2} \cdot (2+x^2)(2-x^2)^2}{(x^2+2)^2 - 16} = \frac{6x^4 - 8x^2 - 8}{x \cdot (x^4 + 4x^2 - 12)} \end{aligned}$$

La expresión racional obtenida para  $G = S_f \circ N_f$ ,

$$G(x) = \frac{6x^4 - 8x^2 - 8}{x^5 + 4x^3 - 12x}, \quad x \in [1, 2]$$



proporciona un algoritmo eficiente de aproximación del punto fijo  $\alpha = +\sqrt{2}$ , con valores racionales.

En efecto, partiendo del valor inicial  $x_0 = 1$ , se tiene:

$$G(1) = \frac{10}{7} \approx 1,4285714\dots$$

$$G\left(\frac{10}{7}\right) = \frac{11144}{7880} = \frac{1393}{985} \approx 1,414213198\dots$$

que da una aproximación en la segunda iteración de 6 cifras decimales exactas. Iterando una vez más,

$$G\left(\frac{1393}{985}\right) = \frac{15290740090}{10812186007} \approx 1,4142135623730950488077373\dots$$

Hay que recordar que

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379\dots$$

por lo que en la tercera iteración se cuenta con **¡20 cifras decimales exactas!** Esto constata la potencia del método.

Idéntico proceso se podría seguir para determinar las raíces cúbicas o n-ésimas de un número real  $c > 0$ . Basta considerar la función

$$f(x) = x^n - c$$

y construir la composición  $G = S_f \circ N_f$ , como se ha explicado. De hecho, se podría aplicar sucesivamente el proceso

$$S_f \circ S_f \circ \dots \circ N_f$$

de suerte que se vaya acelerando progresivamente la convergencia. En el fondo lo que se está haciendo en esta composición es agrupar en una función, aquella que se obtendría de ir iterando la misma  $n$  pasos. Pero simplemente el hecho de combinar estos dos algoritmos, permite obtener importantes aceleraciones en la convergencia al punto fijo.

## 10. Conclusiones

El análisis de los métodos mostrados permite responder adecuadamente aquellas cuestiones planteadas al final de la sección primera.

**¿Qué función es la más apropiada para iterar?** Aquellas funciones de clase al menos  $C^2$  en intervalos cerrados por la composición, que contienen un punto fijo  $\alpha$ , siendo deseable que dicho punto fijo sea atractor, i.e.,  $f'(\alpha) < 1$ . Cuanto más próximo el valor de esta derivada se acerca a cero, mayor velocidad de convergencia.

**¿Cómo caracterizar la dinámica del sistema a partir de su derivada?** En el caso real, si  $|f'(\alpha)| < 1$  el algoritmo converge al menos linealmente, para casi todo valor inicial (*punto fijo atractor*). Si  $|f'(\alpha)| > 1$  el algoritmo diverge para casi todo valor inicial (*punto fijo repulsor*). En los casos en los que  $|f'(\alpha)| = 1$ , no se puede asegurar nada.

**¿El valor inicial condiciona la velocidad de convergencia?** En general el valor inicial no influye en la velocidad de convergencia, cuando se encuentra relativamente próximo al punto fijo, y el sistema es atractor. En cambio depende en buena medida de dicho valor, para sistemas

dinámicos caóticos. Discernir entre sistemas dinámicos que se comportan caóticamente, en el sentido de dependencia sensible a las condiciones iniciales, abre las puertas de la moderna teoría de sistemas dinámicos.

**¿Cómo estimar el error cometido al realizar la aproximación?** Las diferencias definidas

$$\epsilon_n = |x_n - \alpha|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

permiten estimar el error de aproximación. El comportamiento de esta secuencia de errores absolutos marca en cierto sentido la velocidad de convergencia. El análisis de la potencia de este tipo de infinitésimos permite establecer el orden de convergencia de la sucesión iterada.

**¿Es posible mejorar el algoritmo aplicado?** En efecto, este modelo es una propuesta sencilla, que sugiere la búsqueda de procesos de mejora, tipo *Newton-Steffensen*, donde en pocas iteraciones se consigan aproximaciones numéricas con un error relativamente pequeño.

Un objetivo deseable sería el determinar nuevos algoritmos (*tipo Aitken-Steffensen*) que resuelvan y superen las debilidades del método expuesto. El estudio de mejoras de algoritmos es un problema matemáticamente interesante, de igual modo que lo es su desarrollo práctico dentro de un lenguaje de programación adecuado, tipo *Python* o *C++*. Nuestra línea de trabajo va orientada en este sentido.

## Referencias

- [1] BURDEN, R.L.; FAIRES, J.D., *Análisis numérico.*, International Thomson, México, 1998.
- [2] PALLARÉS RUIZ, A. ; JIMÉNEZ LÓPEZ, V., *Métodos numéricos.*, Publicaciones Universidad de Murcia (UMU), Murcia 2008.
- [3] J. BANKS, J. BROOKS, G. CAIRNS, G. DAVIS Y P. STACEY., *On Devaney's definition of chaos*, Amer.Math. Monthly, Vol. 99 (1992) pp. 332–334.
- [4] L. ALSEDA, S. KOLYADA, J. LLIBRE Y L. SNOHA., *Entropy and periodic points for transitive maps.*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 351 (1999) pp. 1551–1573.
- [5] N.C. BERNARDES, A. BONILLA, V. MULLER Y A.PERIS., *Li-Yorke chaos in linear dynamics.*, Institute of Mathematics, Academic of Sciences of the Czech Republic, preprint no. 22–2012.
- [6] B. CASCALES, J. M. MIRA, J. ORIHUELA Y M. RAJA., *Análisis Funcional.*, Electolibris. Murcia, 2012.
- [7] R. L. DEVANEY. , *An introduction to chaotic dynamical systems.*, Benjamin-Cummings. Menlo Park, 1986.

### Sobre el autor:

Federico Ruiz López  
 Email: federico.ruiz2011@gmail.com  
 IES Jaime II (Alicante)



# Investigación

## Función parte entera y algunas propiedades

## Integer part function and some properties

Juan Carlos Arango Parra  
Yeisson Alexis Acevedo Agudelo

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 057–076, ISSN 2174-0410  
Recepción: 26 Abr'21; Aceptación: 25 Ago'21

1 de abril de 2022

### Resumen

En este artículo se pretende analizar algunas de las propiedades de la función parte entera desde una componente algebraica, algunas de ellas se demuestran y en otras se hace uso de la interpretación geométrica para obtener una mejor explicación de la propiedad o complementar la misma. Adicionalmente, se estudian algunas aplicaciones y algunos contextos matemáticos donde dicha función toma sentido, es el caso de los puntos red, los números complejos, las teselaciones, la teoría de números, la probabilidad, entre otros.

**Palabras Clave:** Función parte entera, mantisa, módulo, aditividad.

### Abstract

This article aims to analyze some of the properties of the integer part function from an algebraic component, some of them are demonstrated and in others the geometric interpretation is used to obtain a better explanation of the property or to complement it. Additionally, some applications and some mathematical contexts where this function makes sense are studied, such as network points, complex numbers, tessellations, number theory, probability, among others.

**Keywords:** Function integer part, mantissa, modulus, additivity.

## 1. Introducción

La función parte entera es utilizada en diferentes aspectos de la cotidianidad algunos conscientes o inconscientes, otras situaciones son producto de aspectos estandarizados; por ejemplo, en el sistema monetario COP (pesos), una cuenta que asciende a \$8497 genera un pago total de \$8500 si éste se hace en efectivo, lo cual termina siendo el entero superior en dicho sistema monetario que va de \$50 en \$50. Al preguntarse la hora a un transeúnte, la mayoría responde en intervalos enteros de 5 en 5 minutos (en un reloj analógico), así a pesar de ser las 8:31 se suele

decir que son las 8:30 (AM/PM). En cuyo caso estamos haciendo alusión al menor entero. Ocurre algo similar con los pesos de verduras y frutas cuando se hace la compra, al comprar una mercancía que cuesta \$19990. Entre otras muchas situaciones donde recurrimos al redondeo, pero de un número entero, inconscientemente hacemos uso de la función parte entera. Algunas de estas situaciones son culturales, otras mediadas por la divisa que maneje el país.

Pero la función parte entera no solo se aplica a situaciones de la cotidianidad, en la matemática misma tiene mucha funcionalidad, en particular para los campos de teoría de números, probabilidad, cálculo, geometría, así como una amplia gamma de contextos físicos y matemáticos. En [4], por ejemplo, los autores estudian una clase simple de sistemas dinámicos en  $\mathbb{Z}$  relacionados con las funciones de suelo y techo aplicadas en un problema combinatorio para un juego de cartas y su tiempo de parada. En [9], los autores presentan algunas generalizaciones para las funciones de parte entera de números racionales positivos usando el árbol Stern-Brocot y lo asocian a un problema de generalización para la conjetura  $4/3$  de ciencias de la computación. En [11], el autor determina expresiones de forma cerrada para el  $n$ -ésimo término de algunas secuencias y series de interés utilizando las funciones techo y suelo de manera individual y combinada. Algunas referencias sobre los últimos avances en el uso de las funciones de parte entera se pueden encontrar en [6, 7, 10, 12, 13, 15].

En este artículo se muestran algunas aplicaciones de la función parte entera (Suelo/Techo) en contextos matemáticos. Pese a que la función parte entera es conocida y bastante estudiada, en este trabajo se presentan situaciones desde un punto de vista geométrico así como también algunas propiedades que no son tan comunes. Además, en el presente escrito se utiliza una metodología en la cual, a partir de expresiones funcionales generales y el uso de su geometría adyacente, se deducen propiedades para los reales. El método empleado para deducir propiedades para  $\mathbb{R}$  (y en general para un conjunto), a partir de expresiones funcionales más generales (ej.  $\mathbb{R}^2$ ) y en consideración de representaciones geométricas se denomina *inferencia funcional* [14] y no se debe confundir con análisis funcional o análisis matemático. Otro aspecto metodológico que se utiliza en el presente estudio es considerar propiedades para la función parte entera en el intervalo  $[0, 1]$  y luego se extienden como generalización en toda la recta numérica. Esta técnica es viable ya que la mantisa asociada a un número real siempre es un valor entre 0 y 1 y todo número real es la suma de su parte entera más su mantisa.

## 1.1. Función parte entera y Mantisa

La función parte entera, denotada  $\lfloor \cdot \rfloor$ , es el mayor de todos los enteros que son menores o iguales a un número real  $x$ ; es decir, si  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \leq x < n + 1$  entonces  $\lfloor x \rfloor = n$ , equivalente a

$$\lfloor x \rfloor = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{n \leq x\}. \quad (1)$$

La función parte entera de  $x$  cumple la propiedad de involución, a saber,  $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$ . Se suele utilizar la expresión *Floor* (suelo) para denotar esta función en programación. A diferencia de la función  $\lceil \cdot \rceil$  llamada función *Ceil / Ceiling* (techo), que es el menor de los enteros mayores o iguales que un real dado  $x$ , es decir,  $\lceil x \rceil = \min_{n \in \mathbb{Z}} \{x \leq n\}$ . Ambas funciones están relacionadas así

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ \lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La función mantisa de  $x$  indica la parte decimal de este número, se escribe como la diferencia entre el número y su parte entera, es decir,  $m(x) = x - \lfloor x \rfloor$ . Para todo número real  $x$ , se satisface la desigualdad  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ , de la cual se deduce que  $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ . Lo cual implica que la función mantisa está acotada para todo  $x \in \mathbb{R}$ , acorde a las desigualdades se cumple que  $\lfloor m(x) \rfloor = 0$ . Ya que  $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ , entonces se satisface que  $m(x + 1) = m(x)$ ,

lo cual implica que la función mantisa es una función periódica con periodo  $T = 1$ . En el intervalo  $[0, 1)$ , tiene un punto de corte con los ejes en  $(0, 0)$  y una discontinuidad inevitable en  $x = 1$ .

De forma general, la función  $m_k(x) = kx - [kx]$  para  $k \in \mathbb{N}$ , donde  $m_1(x) = m(x)$ , es periódica de periodo  $T = \frac{1}{k}$  y en el intervalo  $[0, 1)$  tiene  $k$  intersecciones con el eje  $x$  para  $x = 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}$ , cada uno de estos interceptos representa una discontinuidad no removible (no evitable). El área bajo la curva para  $m_k(x)$  en el intervalo  $[0, 1)$  es  $\frac{1}{2}$ , para todo valor de  $k$ . En efecto, la función es discontinua para  $x = \frac{1}{k}$  que es el periodo, entonces

$$\int_0^1 m_k(x)dx = k \cdot \int_0^{\frac{1}{k}} m_k(x)dx = k \cdot \lim_{b \rightarrow (\frac{1}{k})^-} \int_0^b (kx - [kx])dx = k \cdot \lim_{b \rightarrow (\frac{1}{k})^-} \left[ \int_0^b kx dx - \int_0^b [kx] dx \right],$$

como  $[kx] = 0$  para todo  $x \in [0, \frac{1}{k})$ , entonces se puede concluir que

$$\int_0^1 m_k(x)dx = k \left( \frac{kx^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

A partir de la función mantisa es posible hallar la distancia de un  $x \in \mathbb{R}$  al entero más próximo, la cual denotaremos  $d(x)$ . Esta función es periódica con  $T = 1$ , ya que da igual hacer el análisis en el intervalo  $[0, 1]$  que en el intervalo  $[n, n + 1]$  para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$ . Sin pérdida de generalidad, se efectúa el análisis para  $x \in [0, 1]$ . Si  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  entonces dicha distancia es la mantisa de  $x$ ,  $d(x) = m(x) = \frac{1}{2} + (m(x) - \frac{1}{2})$ . Si  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$  entonces está más cerca de 1 y por ende la distancia es la unidad menos la mantisa, es decir,  $d(x) = 1 - m(x) = \frac{1}{2} - (m(x) - \frac{1}{2})$ . Unificando ambas expresiones, concluimos que la distancia de un número real  $x$  al entero más próximo es

$$d(x) = \frac{1}{2} - \left| m(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \left| x - [x] - \frac{1}{2} \right|. \tag{2}$$

## 2. Contextos Matemáticos

### 2.1. Geometría: Teselaciones

Consideremos dos polígonos regulares diferentes  $P_1$  y  $P_2$  con  $n_1$  y  $n_2$  lados respectivamente. Se busca una condición para los polígonos  $P_1$  y  $P_2$  de tal forma que teselen el plano. Sean  $X_1$  y  $X_2$  el valor del ángulo interior de cada polígono; sobre un punto  $Q$  en el espacio se satisface que

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 = 360^\circ, \tag{3}$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  es el número de polígonos del tipo  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente que deben converger alrededor del punto  $Q$ . Por las propiedades de la geometría Euclidiana se sabe que los ángulos centrales de estos polígonos son  $w_1 = \frac{360^\circ}{n_1}$  y  $w_2 = \frac{360^\circ}{n_2}$  y que la relación entre el ángulo  $X_i$  y  $w_i$  son de la forma  $w_i + X_i = 180^\circ$  para  $i = 1, 2$ ; es por ello que  $X_i = 180^\circ \left( 1 - \frac{2}{n_i} \right)$  al sustituir en (3), resulta

$$180^\circ m_1 \left( 1 - \frac{2}{n_1} \right) + 180^\circ m_2 \left( 1 - \frac{2}{n_2} \right) = 360^\circ,$$

simplificado se escribe como  $m_1 + m_2 = 2 + \frac{2m_1}{n_1} + \frac{2m_2}{n_2}$ ; ya que cada  $m_i$  es un entero entonces la igualdad se expresa como

$$m_1 + m_2 = \left\lfloor 2 \left( 1 + \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \right) \right\rfloor .$$

La expresión anterior permite identificar los únicos casos en que es posible la situación de estudio, dado que obliga a que  $2 \left( \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \right)$  sea un entero, esto es:  $2 \left( \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \right) = \left\lfloor 2 \left( \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \frac{1}{2} \right\rfloor$  (ver subsección 3.3) y considerando que  $n_1, n_2 > 2$  y  $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}$ , tenemos que, los únicos valores para  $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$ , que cumplen la condición  $2 \left( \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \right) = m_1 + m_2 - 2$ , son los presentados en la Tabla 1, en esta se resumen las posibilidades que se pueden presentar cuando convergen dos polígonos diferentes alrededor de un vértice y la cantidad de tales polígonos.

Tabla 1: Posibilidades para  $m_1 + m_2$

$m_1 + m_2$	$m_1$	$m_2$	$n_1$	$n_2$	$X_1$	$X_2$	Polígonos
3	1	2	4	8	90°	135°	1 cuadrado y 2 octógonos
	1	2	3	12	60°	150°	1 triángulo y 2 dodecágonos
4	2	2	3	6	60°	120°	2 triángulos y 2 hexágonos
5	3	2	3	4	60°	90°	3 triángulos y 2 cuadrados
	4	1	3	6	60°	120°	4 triángulos y 1 hexágono

Análogamente, es posible que en un punto Q incidan tres polígonos regulares diferentes, en cuyo caso se debe presentar la expresión  $m_1 + m_2 + m_3 = \left\lfloor 2 \left( 1 + \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \frac{m_3}{n_3} \right) \right\rfloor$ . Para este último caso solo se presentan dos opciones. En la primera, convergen alrededor de un punto, un cuadrado, un hexágono y un dodecágono. En la segunda, un triángulo, dos cuadrados y un hexágono. En la Figura 1, se presentan las dos teselaciones posibles. Ambas configuraciones son muy similares.

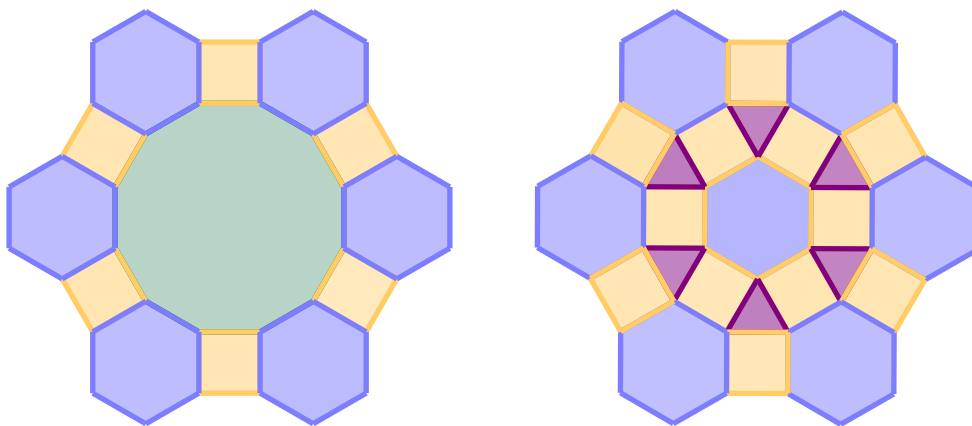


Figura 1: Teselaciones: Tres polígonos regulares diferentes que inciden en punto.

## 2.2. Geometría: Puntos Red

Se asume un punto red en el plano como aquel cuyas componentes  $(x, y)$  son ambas enteras. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función no negativa cuyo dominio es el intervalo  $[a, b]$  donde  $a$  y  $b$  son enteros

tales que  $a < b$ . Sea  $S$  el conjunto de puntos red  $(x, y)$  que satisfacen  $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$ . A continuación se deduce una expresión para determinar el número de puntos red que pertenecen al conjunto  $S$ .

Si se considera el hecho de que  $f$  sea una función no negativa, podemos afirmar que los puntos del conjunto  $S$  en el plano serán aquellos pertenecientes tanto al eje  $x$  como por encima de éste. La cantidad de puntos red a lo largo del eje  $x$  en el intervalo  $[a, b]$  están dados por  $b - a + 1$ .

Por otra parte, considerando el hecho que  $y \leq f(x)$ , entonces interesan también aquellos puntos que están en la curva de la función  $(x, f(x))$  y por debajo de esta. Así, para cada valor entero que asuma  $x$  en el intervalo  $[a, b]$  podemos afirmar que  $\lfloor f(x) \rfloor$  representa el número de puntos red de  $S$  que están en la curva y por debajo de esta. Luego el total de estos puntos en el intervalo  $[a, b]$  está dado por:

$$\text{card}(S) = \sum_{i=a}^b \lfloor f(i) \rfloor + b - a + 1, \tag{4}$$

donde  $\text{card}(\cdot)$  hace alusión al cardinal o número de elementos del conjunto  $S$ , el número de puntos red debajo de la función no-negativa  $y = f(x)$  y definida en el intervalo  $[a, b]$ .

### 2.3. Probabilidad

En [2], se encuentra el siguiente ejercicio, cuya solución se basa en la función parte entera y algunas de sus propiedades: "Hallar la probabilidad de obtener un número divisible por 2 o 3 en una secuencia de números del 1 al  $n$ . ¿Qué sucede si  $n \rightarrow \infty$ ?"

Sea  $A$  el evento que se describe en la situación anterior, Sea  $A_2$  el evento de obtener un número par entre 1 y  $n$ ,  $A_3$  el evento de obtener un número divisible por 3 y  $A_6$  es el evento de obtener un número divisible por 6. En este caso se sigue que  $P(A) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_6)$ . Para saber cuántos números divisibles por  $m \in \mathbb{N}$  hay entre 1 y  $n$ , se tiene la relación  $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ , es decir, la parte entera del cociente entre la longitud del intervalo y el número por el cual se está analizando la divisibilidad. Así, hay  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  divisibles por 2,  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  divisibles por 3 y  $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$  divisibles por 6. entonces la probabilidad del evento  $A$  es

$$P(A) = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} + \frac{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}{n} - \frac{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}{n} = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n}{6} \rfloor}{n}. \tag{5}$$

Por las propiedades de la función parte entera se tiene que  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ , es por ello que se tienen las siguientes desigualdades  $\frac{n}{2} - 1 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2}$ ,  $\frac{n}{3} - 1 < \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \leq \frac{n}{3}$  y  $\frac{n}{6} - 1 < \lfloor \frac{n}{6} \rfloor \leq \frac{n}{6}$ . Con estas desigualdades es posible acotar el numerador de la expresión para  $P(A)$  dada en (5)

$$\frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 - \frac{n}{6} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n}{6} \rfloor < \frac{n}{2} + \frac{n}{3} - \frac{n}{6} + 1.$$

Al dividir por  $n$ , en el término del medio nos queda la probabilidad del evento  $A$ , en los extremos se hacen las operaciones necesarias para tener la desigualdad

$$\frac{2n - 6}{3n} < P(A) < \frac{2n + 3}{3n}.$$

De acuerdo al teorema de estricción (regla del sandwich), se puede concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = \frac{2}{3}$ . Es decir, si efectuamos este experimento una gran cantidad de veces, podremos obtener un número divisible por 2 o por 3 en el 66 % de las extracciones. Es posible generalizar esta situación como sigue: Considere la secuencia de números naturales consecutivos  $1, 2, 3, \dots, n$ . La probabilidad de obtener números divisibles por  $k \in \mathbb{N}$  o  $r \in \mathbb{N}$ , en dicha secuencia y denotada por



$P(B)$ , está dado por

$$P(B) = \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n} + \frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{n} - \frac{\lfloor \frac{n}{m.c.m(k,r)} \rfloor}{n} = \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + \lfloor \frac{n}{r} \rfloor - \lfloor \frac{n}{m.c.m(k,r)} \rfloor}{n}, \tag{6}$$

donde  $m.c.m(k, r)$  es el mínimo común múltiplo de ambos números. A medida que  $n \rightarrow \infty$  resulta la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B) = \frac{1}{k} + \frac{1}{r} - \frac{1}{m.c.m(k,r)}. \tag{7}$$

### 2.4. Teoría de Números: Fórmula de Polignac

Consideremos la cantidad de dígitos ceros al final de  $n!$  y nombremos por conveniencia a estos dígitos como *Ceros Estables*, se denotan en adelante como  $C(n)$ . Para ello se hace uso de la descomposición de  $n!$  en sus factores primos, resultado que recibe el nombre de fórmula de Polignac (también se le atribuye la fórmula a Legendre [3, 5]). Consideremos los números naturales consecutivos del 1 al 5, en este intervalo hay un múltiplo de 2 y otro de 5, es por ello que  $5!$  debe terminar en cero ya que resulta un múltiplo de 10. Para  $21!$ , los números se pueden dividir en 4 intervalos de 5 números cada uno: 1 al 5, 6 al 10, 11 al 15 y 16 al 20, en cada uno hay un múltiplo de 2 y 5, por ende,  $21!$  debe terminar en 4 ceros, donde  $\lfloor \frac{21}{5} \rfloor = 4$ . En el caso de  $25!$ , hay 5 intervalos de 5 números cada uno, por lo que dicho factorial debe terminar en 5 ceros; sin embargo, 25 es  $5 \times 5$ , lo que implica que hay un 5 adicional que al multiplicarse por uno de los pares de cualquiera de los intervalos, produce un cero adicional, es por ello que  $25!$  termina en 6 ceros. Para  $25!$ , el total de ceros en los cuales termina es  $\lfloor \frac{25}{5} \rfloor + \lfloor \frac{25}{5^2} \rfloor = 5 + 1$ . Esta situación ocurre de nuevo cuando aparece otra potencia de 5 que es  $125 = 5^3$ . De acuerdo con esto, la cantidad de ceros se puede encontrar como

$$C(n) = \sum_{i=1}^k \lfloor \frac{n}{5^i} \rfloor, \tag{8}$$

donde  $k \in \mathbb{N}$  es el menor exponente tal que  $\lfloor \frac{n}{5^k} \rfloor = 0$ . Esta última expresión implica que  $0 \leq \frac{n}{5^k} < 1$ , aplicando algunas operaciones algebraicas se obtiene que  $\ln n < k \ln 5$ , como  $k$  es el menor entero entonces  $k = \lfloor \frac{\ln n}{\ln 5} \rfloor = \lfloor \log_5 n \rfloor$ . Otra manera de obtener esta cantidad de ceros estables es por la aplicación sucesiva del algoritmo de Euclides en la dirección de un cambio de base, en este caso en la base 5. En la Tabla 2, se muestran algunos de estos resultados:

Tabla 2: Número de ceros al final de  $n!$

$n$	$n!$	$C(n)$	$n$	$n!$	$C(n)$
1	1	0	11	39916800	2
2	2	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	6	0	15	1307674368000	3
4	24	0	16	20922789888000	3
5	120	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	720	1	20	2432902008176640000	4
7	5040	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	40320	1	$n$	$\Gamma(n + 1) = n!$	$\vdots$
9	362880	1			
10	3628800	2			

### 2.5. Sistemas numéricos: Números complejos

Considere un número complejo  $z$  escrito en forma binómica como  $z = a + bi$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Se define la parte entera de  $z$  como  $\lfloor z \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor i$ , donde se asume, por definición, que  $\lfloor i \rfloor = i$  y  $\lfloor -i \rfloor = -\lfloor i \rfloor = -i$ . Se analiza ahora la función compleja  $f(z) = \lfloor |z| \rfloor$ , donde  $|\cdot|$  es el módulo de dicho número complejo. Tal función  $f(z)$  se puede escribir como una función de dos variables en la forma

$$f(z) = \lfloor |z| \rfloor = \sqrt{\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor y \rfloor^2} = g(x, y). \tag{9}$$

Con base en la definición de la función parte entera de un número complejo, la imagen  $\lfloor z \rfloor$  es constante por rectángulos en el plano de Argand (plano complejo), es por ello que la función  $f(z) = \lfloor |z| \rfloor$ , en el intervalo  $I_{M,N} = [M, M + 1) \times [N, N + 1)$  es  $f(z) = \sqrt{M^2 + N^2}$ , las fronteras derecha y superior del rectángulo, donde la suma  $W = M + N$  (como enteros no negativos) permite escribir la función  $f$  como  $f(z) = \sqrt{M^2 + (W - M)^2}$ . Por ejemplo, si  $W = 4$ , entonces se presentan para  $M$  y  $N$  las posibilidades 4 y 0, 1 y 3, 2 y 2, 3 y 1, también 0 y 4 respectivamente. Las imágenes bajo  $f$  son 4,  $\sqrt{10}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{10}$  y 4 respectivamente. En la Tabla 3, se presenta esta información y se asocia un color acorde a la suma que resulta para  $W$ .

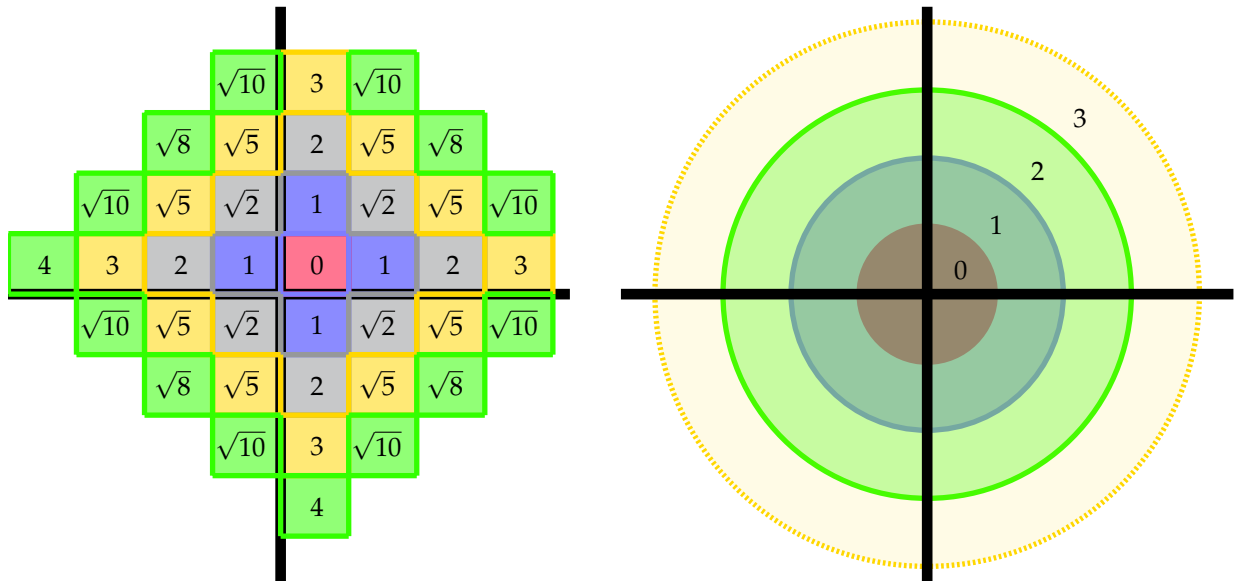
Tabla 3: Valores de  $W$  en la función  $f(z) = \lfloor |z| \rfloor$

$W$	$M$	$N$	$f(z)$	Color	$W$	$M$	$N$	$f(z)$	Color
0	0	0	0	Rojo	4	1	2	$\sqrt{5}$	Amarillo
1	1	0	1	Azul		0	3	3	Amarillo
	0	1	1	Azul		4	4	0	4
2	2	0	2	Gris		3	1	$\sqrt{10}$	Verde
	1	1	$\sqrt{2}$	Gris		2	2	$\sqrt{8}$	Verde
	0	2	2	Gris		1	3	$\sqrt{10}$	Verde
3	3	0	3	Amarillo		0	4	4	Verde
	2	1	$\sqrt{5}$	Amarillo					

En la Figura 2 a), se presentan las imágenes del módulo de la parte entera de un número complejo, analice dicho gráfico como una vista aérea de la función en tres dimensiones.

Considere ahora la función compleja  $g(z) = \lfloor |z| \rfloor$ , es decir, la parte entera del módulo de un número complejo. Como  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  entonces  $g(z)$  se puede ver como una función de dos variables de la forma  $h(x, y) = \lfloor \sqrt{x^2 + y^2} \rfloor$ . Ya que  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  representa un cono, entonces  $g(z) = h(x, y)$ , es la parte entera de un cono. Por la definición de la parte entera, si se tienen las desigualdades  $M \leq \sqrt{x^2 + y^2} < M + 1$  con  $M$  entero, entonces  $\lfloor \sqrt{x^2 + y^2} \rfloor = M$ , las desigualdades se cumplen siempre que  $M^2 \leq x^2 + y^2 < (M + 1)^2$ , es decir, para aquellos  $(x, y)$  que se encuentran comprendidos entre dos circunferencias de radio  $M$  y  $M + 1$ , sin contener la segunda circunferencia. Se forman así anillos circulares. Como  $x^2 + y^2$  es un valor no negativo entonces,  $M$  es un entero no negativo. En la Figura 2 b), se ilustra esta situación y en la Figura 3 a) y 3 b) se muestran vistas en 3D para ambos casos.

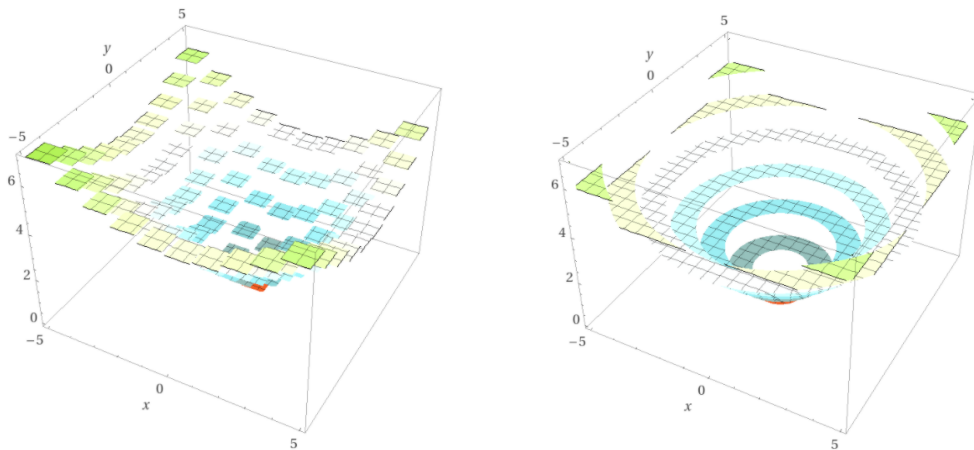
De acuerdo a los resultados para  $f(z) = \lfloor |z| \rfloor$  y  $g(z) = \lfloor |z| \rfloor$  y las Figuras 2 a) y 2 b), es posible encontrar aquellos valores complejos para los cuales  $\lfloor \lfloor z \rfloor \rfloor = \lfloor |z| \rfloor$ . Sea  $z = a + bi$  un número complejo para el cual se cumple dicha igualdad, los posibles valores de este número complejo son las porciones de las circunferencia para las cuales se satisface  $M - 1 < \sqrt{a^2 + b^2} < M$ , para  $M \in \mathbb{N}$  y  $a, b$  puede estar en cualquiera de los rectángulos  $[0, 1) \times [M - 1, M)$  o  $[M - 1, M) \times [0, 1)$ . En la Figura 4 se ilustran estas opciones.



a) Módulo de la parte entera,  $\lfloor |z| \rfloor$ .

b) Parte entera del módulo,  $\lfloor |z| \rfloor$ .

Figura 2: Parte entera y módulo de un número complejo.



a) Vista 3D del módulo de parte entera.

b) Vista 3D de la parte entera del módulo.

Figura 3: Vista en 3D para  $\lfloor |z| \rfloor$  and  $|z|$ .

### 3. Algunas Propiedades

#### 3.1. Condiciones de Aditividad

Considérese a continuación la función de dos variables dada por

$$f(x, y) = \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor. \tag{10}$$

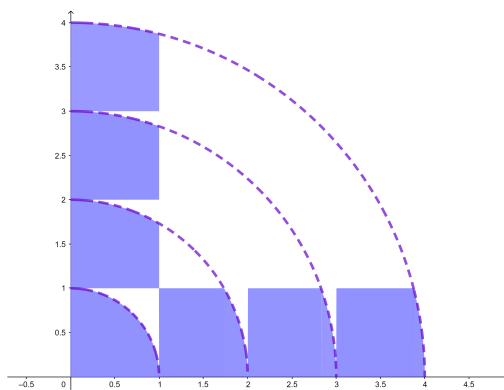


Figura 4: Valores que satisfacen  $\lfloor |z| \rfloor = |\lfloor z \rfloor|$ .

Se procede al análisis de los valores  $x, y$  para que la función  $f$  satisfaga la igualdad  $f(x, y) = 0$ , lo que conduce a hallar las condiciones para que se de la igualdad

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor. \tag{11}$$

Sea  $K = \lfloor x + y \rfloor$ , donde  $K$  debe ser un número entero acorde a la definición de la función parte entera. Sin pérdida de generalidad, se asumirá que  $\lfloor x \rfloor = M + K$  y  $\lfloor y \rfloor = -M$  esto con el fin que la ecuación 11 se cumpla, donde  $M \in \mathbb{Z}$ . Por la definición de la función parte entera se presentan las desigualdades

$$K \leq x + y < K + 1, \quad M + K \leq x < M + K + 1 \quad \text{y} \quad -M \leq y < -M + 1.$$

La primera desigualdad implica que son todos los  $(x, y)$  que están por debajo de la recta  $y = -x + (K + 1)$  sin contenerla y que además están por encima de la recta  $y = -x + K$  conteniéndola. Las dos desigualdades restantes acotan los intervalos para  $x$  y  $y$ , en cuyo caso son los rectángulos

$$I_{M,K} = [M + K, M + K + 1) \times [-M, -M + 1). \tag{12}$$

Se analizan algunos de los casos, sabiendo que  $K$  y  $M$  son números enteros. Si  $K = 0$ ,  $f(x, y) = 0$  para aquellos valores por debajo de la recta  $y = -x + 1$  y por encima de la recta  $y = -x$ , el rectángulo admisible es  $I_{M,0} = [M, M + 1) \times [-M, -M + 1)$ . Se analizan algunas posibilidades para  $M$ . Si  $M = 0$ , el intervalo se escribe como  $I_{0,0} = [0, 1) \times [0, 1)$ , mientras que  $f(x, y) = 0$  se cumple para un triángulo rectángulo, el cual no contienen la hipotenusa. Para  $M = 1$ , el intervalo es  $I_{1,0} = [1, 2) \times [-1, 0)$ , el triángulo rectángulo que se forma contiene los vértices  $(1, 0)$ ,  $(1, -1)$  y  $(2, -1)$ . Cuando  $M = -1$ , en el intervalo  $I_{-1,0} = [-1, 0) \times [1, 2)$  se forma un triángulo rectángulo en el segundo cuadrante.

En la Figura 5 a) se ilustran los tres triángulos rectángulos para  $M = -2, -1, 0, 1, 2$ , rectángulos que no contienen la hipotenusa, pero sí los vértices. De manera análoga, al extender este razonamiento para cualquier valor de  $K$  y de  $M$ , se encuentra que  $f(x, y) = 0$  para todos los puntos que están en el interior de los triángulos rectángulos o en sus vértices pero sin contener las hipotenusas. En la Figura 5 b) se presentan los diferentes casos de manera general para que se satisfaga  $f(x, y) = 0$ .

Se elige ahora un punto que no esté en las regiones sombreadas de la Figura 5 b); es decir, una pareja  $(x, y)$  para la cual  $f(x, y) \neq 0$ . Sin pérdida de generalidad, se puede tomar cualquier punto  $(x, y)$  tal que  $\lfloor m(x) + m(y) \rfloor = 1$ , por ejemplo el punto  $(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$ , al calcular la imagen bajo  $f$  se obtiene  $f(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}) = \lfloor \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \rfloor - \lfloor \frac{3}{2} \rfloor - \lfloor \frac{2}{3} \rfloor = 2 - 1 - 0 = 1$ . En términos generales, para

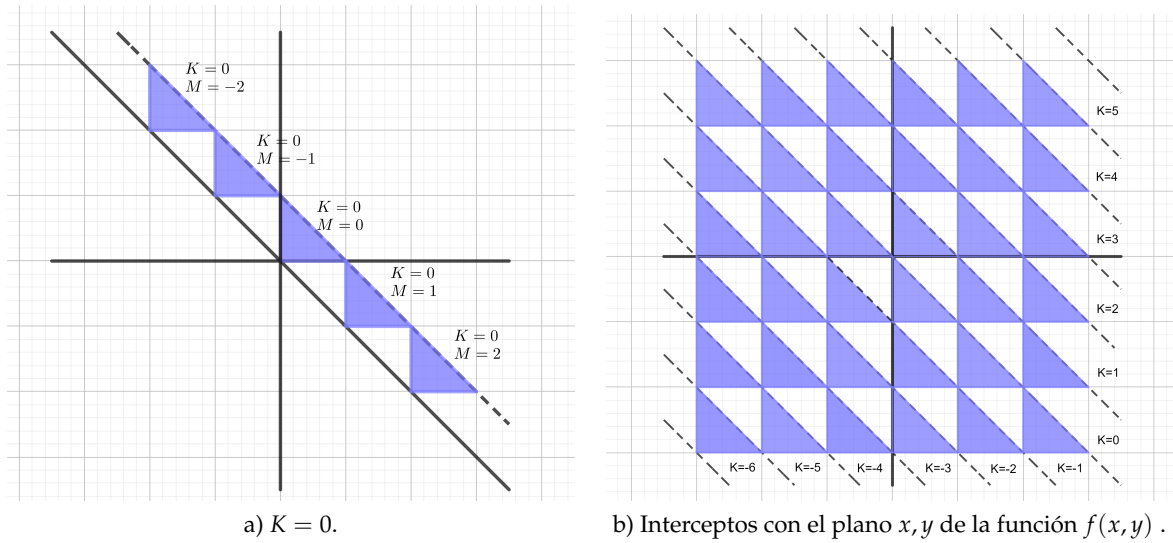


Figura 5: Valores para los cuales  $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ .

cualquier punto que no esté en dicha región,  $f(x, y) = 1$ , esto se demuestra fácilmente siempre que  $\lfloor m(x) + m(y) \rfloor = 1$ . Acorde con lo presentado hasta el momento, se puede concluir que la función  $f$  está acotada para todo valor de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  donde  $0 \leq f(x, y) \leq 1$ , y por tanto  $0 \leq \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq 1$ , con lo cual se presentan las igualdades

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 0 \quad \text{o} \quad \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1. \tag{13}$$

Por otra parte, como  $0 \leq m(x) < 1$  y  $0 \leq m(y) < 1$ , entonces  $0 \leq m(x) + m(y) < 2$ , lo cual implica dos opciones,  $\lfloor m(x) + m(y) \rfloor = 0$  o  $\lfloor m(x) + m(y) \rfloor = 1$ . Estos dos últimos casos permiten concluir (mediante sustitución directa) en (13), que

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor m(x) + m(y) \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \rfloor. \tag{14}$$

En la Figura 6, se presenta una porción del gráfico de la función  $f(x, y)$  a modo de ilustración del proceso así construido.

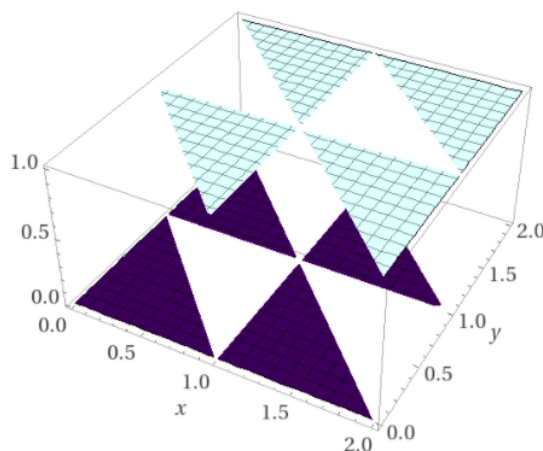


Figura 6: Gráfica de la función  $f(x, y) = \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ .

Finalmente, nótese el hecho que si  $y$  es un entero, llámese  $n$ , entonces  $\lfloor y \rfloor = n$  y  $m(y) = 0$ , luego en la expresión (14) se tiene que  $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n + \lfloor m(x) \rfloor$ , como  $0 \leq m(x) < 1$  se concluye que

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n. \tag{15}$$

La expresión 14 puede generalizarse para dos números complejos  $z_1$  y  $z_2$  como

$$\lfloor z_1 + z_2 \rfloor = \lfloor z_1 \rfloor + \lfloor z_2 \rfloor + \lfloor z_1 + z_2 - \lfloor z_1 \rfloor - \lfloor z_2 \rfloor \rfloor.$$

Otra versión para la igualdad 13 está dada por

$$\lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor \quad \text{o} \quad \lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1, \tag{16}$$

donde  $k \in \mathbb{Z}$ . La primera de ellas se cumple para  $0 \leq m(x) < \frac{1}{k+1}$  siempre que  $k \neq -1$ . Mientras que la segunda es cierta para  $\frac{1}{k+1} \leq m(x) < 1$ . Téngase en cuenta que si  $k = -1$  resulta la expresión  $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$  si  $x \in \mathbb{Z}$ , y  $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$  para cualquier real no entero.

### 3.2. Suma de partes enteras

De acuerdo con la igualdad 15 se puede demostrar una igualdad para la suma de las parte entera de un real  $x$  y la parte entera de su siguiente; tal relación depende del doble del número real  $x$  y se escribe como

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor = 1 + 2\lfloor x \rfloor. \tag{17}$$

Por medio de la igualdad 17 se hallará una serie para  $\lfloor kx \rfloor$  que dependa de  $\lfloor kx + i \rfloor$  para  $i \in \mathbb{N}$ . De acuerdo con la propiedad 17 es posible hallar expresiones para las sumas  $\lfloor kx \rfloor + \lfloor kx + 1 \rfloor$  y  $\lfloor kx + 1 \rfloor + \lfloor kx + 2 \rfloor$ , que al combinarse las mismas, conduce a una relación entre  $kx$ ,  $kx + 1$  y  $kx + 2$ , dada por  $\lfloor kx \rfloor = 2\lfloor kx + 1 \rfloor - \lfloor kx + 2 \rfloor$ . Ya que  $\lfloor kx + 2 \rfloor + \lfloor kx + 3 \rfloor = 1 + 2\lfloor kx + 2 \rfloor$ , entonces  $\lfloor kx \rfloor = 2\lfloor kx + 1 \rfloor - 2\lfloor kx + 2 \rfloor + \lfloor kx + 3 \rfloor - 1$ . Procediendo en forma inductiva, se concluye la siguiente propiedad

$$\lfloor kx \rfloor = 2\lfloor kx + 1 \rfloor - 2\lfloor kx + 2 \rfloor + 2\lfloor kx + 3 \rfloor - 2\lfloor kx + 4 \rfloor + \dots = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \lfloor kx + i \rfloor. \tag{18}$$

Análogamente, se puede demostrar que

$$\lceil kx \rceil = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \lceil kx + i \rceil. \tag{19}$$

Se presenta otra versión de la suma de partes enteras cuando tenemos fracciones con denominadores naturales. Ya que son ciertas las igualdades:  $\lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{1} \rfloor = \lfloor \frac{2\lfloor x \rfloor}{1} \rfloor$  y  $\lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{2} \rfloor = \lfloor \frac{3\lfloor x \rfloor}{2} \rfloor$ , es posible establecer la siguiente generalización: si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{n} \rfloor = \lfloor \frac{(n+1)\lfloor x \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \rfloor. \tag{20}$$

Para demostrar dicha igualdad, se procede de acuerdo con el principio de inducción matemática. Si  $n = 1$  la proposición se cumple ya que  $\lfloor x \rfloor$  es un entero. Se supone que la proposición es cierta para  $k \in \mathbb{N}$ , se escribe

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{k} \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \rfloor. \tag{21}$$

Mientras que la tesis inductiva, está dada por

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{k+1} \right\rfloor .$$

En primer lugar se asume que  $x \geq 0$ , en tal caso se presenta la desigualdad  $\frac{x}{k+1} \leq \frac{x}{k}$ , lo cual conduce a  $\left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$ . Como ambos términos son enteros, entonces existe un entero no negativo  $\lambda$ , para el cual  $\left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \lambda$ . Ya que  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , se puede hacer uso de la propiedad 15 y hacer uso de propiedades algebraicas como sigue

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor &= \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \lambda = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor - \lambda = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{k} - \lambda \right\rfloor , \\ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor &= \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{k+1} + \frac{\lfloor x \rfloor}{k} - \frac{\lfloor x \rfloor}{k+1} - \lambda \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{k+1} + \frac{\lfloor x \rfloor}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor . \end{aligned}$$

Si se demuestra que  $\lambda = \frac{\lfloor x \rfloor}{k(k+1)}$  entonces la tesis inductiva se cumple y por ende la igualdad 20 se satisface para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ya que  $\left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} - \lambda \right\rfloor$ , entonces se presenta la igualdad

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k+1} + \frac{x}{k} - \frac{x}{k+1} - \lambda \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k+1} + \frac{x}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor , \\ \left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k+1} + \frac{\lfloor x \rfloor + m(x)}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k+1} + \frac{m(x)}{k(k+1)} + \frac{\lfloor x \rfloor}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor . \\ \Rightarrow 0 &= \left\lfloor m \left( \frac{x}{k+1} \right) + \frac{m(x)}{k+1} + \frac{\lfloor x \rfloor}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor . \end{aligned}$$

Ahora bien como  $\left\lfloor \frac{x}{n_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n_k} \right\rfloor$  para todo  $n_k = 1, 2, 3, 4, \dots, k \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $m \left( \frac{x}{k} \right) + \frac{m(x)}{k} < 1$  y como  $\frac{x}{k+1} < \frac{x}{k}$  entonces se cumple la desigualdad  $0 \leq m \left( \frac{x}{k+1} \right) + \frac{m(x)}{k(k+1)} < 1$ , luego  $0 = \left\lfloor m \left( \frac{x}{k+1} \right) + \frac{m(x)}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor m \left( \frac{x}{k+1} \right) + \frac{m(x)}{k+1} + 0 \right\rfloor$ , entonces solo resta que  $\frac{\lfloor x \rfloor}{k(k+1)} - \lambda = 0$ . Lo cual permite concluir la demostración.

Algunas consecuencias de la igualdad 20 son

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{(i+1)\lfloor x \rfloor}{i} \right\rfloor - n \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor , \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{(i+1)\lceil x \rceil}{i} \right\rceil - n \lceil x \rceil = \left\lceil \frac{x}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{x}{n} \right\rceil . \tag{23}$$

### 3.3. Parte entera de un múltiplo

Puesto que  $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$  entonces la función parte entera satisface las propiedades

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \text{y} \quad \lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor ,$$

de acuerdo a esta secuencia, es posible establecer la siguiente generalización

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{i}{n} \right\rfloor . \tag{24}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Se demostrará esta propiedad por medio del principio de inducción matemática. La hipótesis inductiva tiene la forma

$$\lfloor kx \rfloor = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor. \tag{25}$$

Mientras que la tesis de inducción la cual ha de ser probada, puede ser planteada como

$$\lfloor (k+1)x \rfloor = \sum_{i=0}^k \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor.$$

De acuerdo con las ecuaciones presentadas en (16), se presentan dos casos

**Caso 1**  $\lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1$ , donde  $\frac{1}{k+1} \leq m(x) < 1$ .

Con base en la igualdad presentada en este primer caso y por la hipótesis inductiva se tiene

$$\begin{aligned} \lfloor (k+1)x \rfloor &= \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{k}{k} \right\rfloor = \sum_{i=0}^k \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Puesto que  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ , entonces para cada uno de estos valores de  $i$  fijos, se satisface  $0 \leq \frac{i}{k(k+1)} < \frac{i}{k+1} < 1$  y como  $\frac{1}{k+1} \leq m(x) < 1$  entonces se tiene que  $\left\lfloor \frac{i}{k} + m(x) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{i}{(k+1)} + m(x) \right\rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{i}{k} + m(x) \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{i}{(k+1)} + m(x) \right\rfloor, \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor = \left\lfloor x + \frac{i}{(k+1)} \right\rfloor$  lo que permite concluir para el caso 1, que

$$\lfloor (k+1)x \rfloor = \sum_{i=0}^k \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor.$$

**Caso 2**  $\lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor$ , donde  $0 \leq m(x) < \frac{1}{k+1}$ .

Por la ecuación 16, se cumple que  $\lfloor (k+1)x \rfloor = \lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor$ , sustituyendo la hipótesis inductiva en la anterior expresión y sabiendo que  $0 \leq \frac{k}{k+1} < 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , resulta

$$\begin{aligned} \lfloor (k+1)x \rfloor &= \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{k}{k+1} \right\rfloor = \sum_{i=0}^k \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor. \end{aligned}$$

El lector puede notar que la propiedad dada en (24), permite expresar un número entero como una suma finita de partes enteras, por ejemplo, para el número 8 se hace  $n = 4$  y  $x = 2$  con lo cual se obtiene  $8 = \lfloor 2 \rfloor + \left\lfloor 2 + \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor 2 + \frac{2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor 2 + \frac{3}{4} \right\rfloor$ .

### 3.4. Suma de la parte entera de los múltiplos de un número

Sea  $x \in \mathbb{R}$ . El objetivo ahora es encontrar una expresión para la suma de la parte entera de los múltiplos de  $x$  hasta  $nx$ , donde  $n \in \mathbb{N}$

$$f(n, x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor. \tag{26}$$



Este primer análisis se lleva a cabo para  $x \in [0,1)$  y para  $n = 4$ . Se halla primero  $\lambda = m.c.m.(1,2,3,4)$  que es el valor que determina el número de intervalos en que se subdivide al intervalo  $[0,1)$ , donde  $m.c.m.(1,2,3,4) = 12$ . A continuación se presenta dicha subdivisión y en cada entrada de la tabla 4 se coloca el resultado que admite  $\lfloor ix \rfloor$  para  $i = 1,2,3,4$  en cada subintervalo.

Tabla 4:  $f(4,x)$  para  $x \in [0,1)$

Subintervalos	$\lfloor x \rfloor$	$\lfloor 2x \rfloor$	$\lfloor 3x \rfloor$	$\lfloor 4x \rfloor$	Suma
$[0, \frac{1}{12})$	0	0	0	0	0
$[\frac{1}{12}, \frac{2}{12})$	0	0	0	0	0
$[\frac{2}{12}, \frac{3}{12})$	0	0	0	0	0
$[\frac{3}{12}, \frac{4}{12})$	0	0	0	1	1
$[\frac{4}{12}, \frac{5}{12})$	0	0	1	1	2
$[\frac{5}{12}, \frac{6}{12})$	0	0	1	1	2
$[\frac{6}{12}, \frac{7}{12})$	0	1	1	2	4
$[\frac{7}{12}, \frac{8}{12})$	0	1	1	2	4
$[\frac{8}{12}, \frac{9}{12})$	0	1	2	2	5
$[\frac{9}{12}, \frac{10}{12})$	0	1	2	3	6
$[\frac{10}{12}, \frac{11}{12})$	0	1	2	3	6
$[\frac{11}{12}, 1)$	0	1	2	3	6

Algunas conclusiones en la Tabla 4, en la primera columna todos los valores son ceros. En la segunda, se divide 12 entre dos, la primera mitad son ceros y la segunda mitad 1. Para la tercer columna se hace  $12 \div 3 = 4$ , se coloca 0, 1 y 2 cada 4 subintervalos. Finalmente, para la cuarta columna los números se distribuyen en 0, 1, 2 y 3 cada  $12 \div 4 = 3$  elementos. Por ejemplo, si  $x = 0.41$ , éste se encuentra en el quinto intervalo, es decir,  $x \in [\frac{4}{12}, \frac{5}{12})$  y por ende  $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor = 2$ .

¿Cómo encontrar el valor de  $f(n,x)$  sin recurrir a la tabla? Sea  $\lambda = m.c.m.(1,2,3,\dots,n)$ , número que determina el número de subintervalos. Dado  $x$ , es necesario saber en cuál de los  $\lambda$  subintervalos estará, para ello se encuentra el número  $w = x\lambda$ , cuya parte entera determina el subintervalo, ya que  $\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \leq x < \frac{\lfloor w \rfloor + 1}{\lambda}$ . Se hallan los múltiplos de los extremos del intervalo  $i \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda}$  para  $i = 1,2,\dots,n$ , se obtienen las parte enteras de estos resultados y se suma.

$$f(n,x) = \left\lfloor \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor + \left\lfloor 2 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor + \left\lfloor 3 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor n \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor, \tag{27}$$

equivalente a  $f(n,x) = f\left(n, \left\lfloor \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor\right)$  que depende del extremo izquierdo del intervalo que contiene a  $x$ . El valor máximo que puede tomar la suma definida en (26), para  $x \in [0,1)$  es  $1 + 2 + \dots + n - 1$ ; es por ello que

$$0 \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor \leq \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{si } x \in [0,1). \tag{28}$$

Sea  $x$  un número real arbitrario, el cual se puede escribir como un número entero y un decimal entre 0 y 1, se escribe  $x = N + m$ , donde  $N = \lfloor x \rfloor$  y  $m = m(x)$ . Por la expresión 15 se tiene

$\lfloor nx \rfloor = \lfloor nN + nm \rfloor = nN + \lfloor nm \rfloor$ , aplicando esto para cada valor de  $n$  resulta

$$\begin{aligned} f(n, x) &= \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor = (N + \lfloor m \rfloor) + (2N + \lfloor 2m \rfloor) + \dots + (nN + \lfloor nm \rfloor) \\ &= (N + 2N + 3N + \dots + nN) + (\lfloor m \rfloor + \lfloor 2m \rfloor + \dots + \lfloor nm \rfloor) = f(n, N) + f(n, m) \\ &= N \sum_{i=1}^n i + f(n, m) = \frac{Nn(n+1)}{2} + f(n, m). \end{aligned} \tag{29}$$

A modo de ejemplo, se considera a  $x = 4.82$ . La idea es hallar la suma de los múltiplos de  $x$  hasta  $9x$ , es decir,  $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \dots + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 9x \rfloor$ . El número  $x$  se puede descomponer como la suma  $x = 4 + 0.82$ , luego  $N = 4$  y  $m = 0.82$ . Se halla el mínimo común múltiplo de los números consecutivos hasta el 9,  $\lambda = m.c.m.(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2520$ , que es el número de subintervalos en que se divide  $[0, 1)$ . Se encuentra el extremo izquierdo del intervalo en que se encuentra  $m$ , donde  $w = m\lambda = 2066.4$  y  $\lfloor w \rfloor = 2066$ . El extremo izquierdo de este intervalo es  $\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} = \frac{2066}{2520}$ , la parte entera de los nueve múltiplos de estos extremos son

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor &= 0, & \left\lfloor 2 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor &= 1, & \left\lfloor 3 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor &= 2, & \left\lfloor 4 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor &= 3, & \left\lfloor 5 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor &= 4, \\ \left\lfloor 6 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor &= 4, & \left\lfloor 7 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor &= 5, & \left\lfloor 8 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor &= 6 & \text{ y } & \left\lfloor 9 \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor &= 7. \end{aligned}$$

Sumando estos resultados se tiene que  $f(9, 0.82) = 32$ , se sustituye  $N = 4$  y  $n = 9$  en la expresión 29 para concluir  $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \dots + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 9x \rfloor = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10}{2} + 32 = 212$ .

### 3.5. Suma de las raíces de los naturales consecutivos

En esta sección se pretende acotar la suma  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$ . Se denotará la suma parcial como  $R_n$ , la cual está dada por  $R_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n}$ , donde  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$  es una serie divergente. A continuación se encontrarán dos sucesiones  $a_n$  y  $b_n$  tales que  $a_n < R_n < b_n$  y se encontrará un valor aproximado para  $\lfloor R_n \rfloor$ . Sea  $w = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $n$  es 1, 2 o 3 entonces  $w = 1$  ya que la raíz no supera las dos unidades. En la Tabla 5 se presenta la relación entre  $w$  y  $n$ .

Tabla 5: Valores de  $w = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

$w = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$	Valores para $n$	Total
1	1, 2, 3	3
2	4, 5, 6, 7, 8	5
3	9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	7
4	16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24	9

De acuerdo con la tabla se sabe que estas partes enteras se presentan a través de una cantidad impar de términos. Dado  $n$ , la pretensión está en determinar cuántos bloques de números impares hay antes de él y cuántos términos faltan por manipular. Por ejemplo, si  $n = 18$  se puede decir que  $w = \lfloor \sqrt{18} \rfloor = 4$  y  $3 + 5 + 7 + 3 = 18$ , es decir, en la suma  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{17} + \sqrt{18}$  hay tres términos cuya parte entera es 1, hay 5 cuya parte entera es 2 y hay 7 cuya parte entera es 3, y hay 3 cuya parte entera es 4. En general, se puede considerar la expresión

$$3 + 5 + 7 + 9 + \dots + f + k = n, \tag{30}$$

donde  $f$  es un número impar que representa la cantidad de raíces que tendrán la misma parte entera, mientras que  $k$  es el valor que le falta a dicha suma para obtener los  $n$  términos. El valor

de  $f$  se puede encontrar como  $f = 2(w - 1) + 1$ , por lo que la igualdad 30 se escribe como  $3 + 5 + 7 + \dots + (2(w - 1) + 1) + k = n$ . Ya que la suma de números impares consecutivos es un número cuadrado entonces  $[w - 1 + 1]^2 - 1 + k = n$ . De donde se deduce que

$$k = n + 1 - w^2 = n + 1 - \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2. \quad (31)$$

Se considera de nuevo el caso en que  $n = 18$  ( $w = 4$  y  $k = 3$ ) se puede establecer que la sucesión  $R_n$  está acotada de la siguiente manera

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \leq 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{17} + \sqrt{18} \leq 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 3. \quad (32)$$

Sean  $a_n$  y  $b_n$  dos sucesiones tales que  $a_n < R_n < b_n$ , con base en las multiplicaciones que se presentaron en (32) es posible hallar expresiones para estas sucesiones, por ejemplo

$$\begin{aligned} a_n &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (w - 1)f + wk, \\ a_n &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (w - 1)[2(w - 1) + 1] + wk, \\ a_n &= 2 \sum_{i=1}^{w-1} i^2 + \sum_{i=1}^{w-1} i + wk, \\ a_n &= \frac{1}{6}[w(w - 1)(4w + 1)] + wk. \end{aligned} \quad (33)$$

Regresando a la desigualdad presentada en (32), es posible hallar una expresión para la sucesión  $b_n$  donde

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + \dots + wf + (w + 1)k, \\ b_n &= 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + \dots + w[2(w - 1) + 1] + (w + 1)k, \\ b_n &= 2 \sum_{i=1}^{w-1} i(i + 1) + \sum_{i=2}^w i + (w + 1)k, \\ b_n &= \frac{1}{6}[w(w + 1)(4w - 1)] + kw + (k - 1). \end{aligned} \quad (34)$$

En las expresiones 33 y 34 se hallaron cotas para la suma  $R_n = 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$ . Sin embargo, a medida que  $n$  crece, la diferencia entre estas dos sucesiones aumenta también, se calcula  $b_n - a_n$  para tener

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left[ \frac{1}{6}[w(w + 1)(4w - 1)] + kw + (k - 1) \right] - \left[ \frac{1}{6}[w(w - 1)(4w + 1)] + wk \right], \\ &= \frac{w}{6}[4w^2 - w + 4w - 1 - 4w^2 - w + 4w + 1] + k - 1 = w^2 + k - 1 = n, \end{aligned} \quad (35)$$

es decir, mientras  $n$  crece, la diferencia entre ambas sucesiones aumenta. En la Tabla 6, se presenta esta situación, donde se halla también el término  $\frac{a_n + b_n}{2}$  y su parte entera para mostrar que es una mejor aproximación para  $\lfloor R_n \rfloor$  que  $\lfloor a_n \rfloor$  o  $\lfloor b_n \rfloor$  en forma independiente.

Tabla 6: Sucesiones  $a_n$  y  $b_n$  para  $n = 1, 2, \dots, 11$

$n$	$w$	$k$	$a_n$	$b_n$	$b_n - a_n$	$R_n$	$\lfloor R_n \rfloor$	$\frac{a_n+b_n}{2}$	$\frac{a_n+b_n}{2}$
1	1	1	1	2	1	1	1	1.5	1
2	1	2	2	4	2	2.4142	2	3	3
3	1	3	3	6	3	4.14626	4	4.5	4
4	2	1	5	9	4	7.8783	7	7	7
5	2	2	7	12	5	10.1143	10	9.5	9
6	2	3	9	15	6	12.56387	12	12	12
7	2	4	11	18	7	15.20962	15	14.5	14
8	2	5	13	21	8	18.03805	18	17	17
9	3	1	16	25	9	21.03805	21	20.5	20
10	3	2	19	29	10	24.2003	24	24	24
11	3	3	22	33	11	27.51695	27	27.5	27

Si  $n = 45$ , entonces  $R_{45} \approx 204.2398545$  y es por ello que  $\lfloor R_{45} \rfloor = 204$ . A través de las sucesiones  $a_n$  y  $b_n$  tenemos que  $w = \lfloor \sqrt{45} \rfloor = 6$  y  $k = 45 + 1 - 6^2 = 10$ , con estos valores de  $w$  y  $k$  la sucesión  $a_n$  en (33) es equivalente a  $a_{45} = 185$  y  $b_n$  en (34) es  $b_{45} = 230$ , donde  $b_{45} - a_{45} = 230 - 185 = 45$  que es una gran diferencia entre ambas sucesiones; el valor promedio es  $\frac{a_{45}+b_{45}}{2} = 207.5$  y es por ello que  $\lfloor \frac{a_{45}+b_{45}}{2} \rfloor = 207$ , que es una mejor aproximación para  $\lfloor R_{45} \rfloor = 204$ .

### 3.6. Suma de las raíces de los recíprocos de los naturales consecutivos

Considere la sucesión  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  y sea  $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$  la sucesión de sumas parciales de  $a_n$ , donde la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  es divergente por el criterio de la  $p$ -serie. A continuación se hallarán cotas para  $S_n$  y  $\lfloor S_n \rfloor$ .

En [8], Korovkin presenta una cota para  $S_n$ , para ello demuestra que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se satisface la desigualdad

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}. \tag{36}$$

Desigualdad que acota el término  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  de la sucesión de sumas parciales en el intervalo  $[n, n+1]$  para la expresión de la izquierda y  $[n-1, n]$  es el intervalo para el lado derecho. En los dos casos se está trabajando con intervalos de una unidad de longitud. A partir de (36) se tienen cotas para  $S_n$  de la forma

$$2\sqrt{n} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1, \tag{37}$$

de allí que  $\lfloor 2\sqrt{n} - 2 \rfloor \leq \lfloor S_n \rfloor \leq \lfloor 2\sqrt{n} - 1 \rfloor$ . En la desigualdad 37, nótese que  $S_n$  está acotada entre dos sucesiones  $a_n$  y  $b_n$  tales que  $b_n - a_n = 1$ , es decir, en el intervalo  $[a_n, b_n]$  debe existir por lo menos un entero; en el caso en que  $a_n \in \mathbb{N}$  entonces  $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor a_n \rfloor$ , si  $a_n \notin \mathbb{N}$  entonces  $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor b_n \rfloor$ . Por ejemplo, si  $n = 8$  entonces  $a_8 = 3.656\dots$  y  $b_8 = 4.656\dots$ , mientras que  $S_8 = 4.371\dots$ , se cumple así que  $\lfloor S_8 \rfloor = \lfloor b_8 \rfloor = 4$  ya que  $a_8 \notin \mathbb{N}$ . Si  $n = 25$  entonces  $a_{25} = 8$  y  $b_{25} = 9$ , en tanto  $S_{25} = 8.6393\dots$ , de allí que  $\lfloor S_{25} \rfloor = \lfloor a_{25} \rfloor = 8$ , donde  $a_{25} \in \mathbb{N}$ . Se deja como ejercicio al lector demostrar que  $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor a_n \rfloor$  para todo  $n = 4, 9, 16, 25, \dots, k^2 + 2k + 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Se procura ahora encontrar una mejor cota para la parte entera de la sucesión  $S_n$ . Para ello se propone un intervalo de la forma  $[n, n + b]$  con  $0 < b \leq 1$  que minimice la diferencia entre  $S_n$  y  $a_n$ , donde  $a_n \leq S_n$ . De igual manera se pretende minimizar la diferencia entre  $S_n$  y  $b_n$  para los cuales  $S_n \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se hace el análisis sobre la primera situación, para ello se hará  $a'_n = \sqrt{n+b} - \sqrt{n} = \frac{b}{\sqrt{n+b} + \sqrt{n}}$  y se define la función

$$f(n, b) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{b} a'_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+b} + \sqrt{n}}. \tag{38}$$

Como  $\sqrt{n+b} > \sqrt{n}$  entonces  $\frac{2}{\sqrt{n+b} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ; de allí que

$$\frac{2}{b} [\sqrt{n+b} - \sqrt{n}] \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{b} [\sqrt{n} - \sqrt{n-b}]. \tag{39}$$

Expresión que puede ser escrita como  $\frac{2}{b} a'_n \leq S_n \leq \frac{2}{b} b'_n$  donde  $b'_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-b}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Y cuyas sumas conduce a  $\frac{2}{b} \sum_{i=1}^n a'_i \leq S_n \leq \frac{2}{b} \sum_{i=1}^n b'_i$ . En el caso en que  $b = 1$  se obtiene la desigualdad de Korovkin presentada en (37) y las sumas parciales se transforman en telescópicas. A medida que  $b \rightarrow 0$  la función  $f(n, b)$  definida en (38) se minimiza y por ende es posible encontrar una mejor aproximación para  $S_n$  y  $\lfloor S_n \rfloor$ . En la Tabla 7, se presentan las imágenes de  $f(n, b)$  para valores particulares de  $b$ , a medida que  $b \approx 0$  entonces  $f(n, b)$  se minimiza.

Tabla 7: Valores de  $f(n, b)$  si  $b \rightarrow 0$

$n \in \mathbb{N}$	$b = 1$	$b = \frac{1}{10}$	$b = \frac{1}{100}$
1	$f(1, 1) \approx 0.1715$	$f\left(1, \frac{1}{10}\right) \approx 0.02$	$f\left(1, \frac{1}{100}\right) \approx 0.00248$
2	$f(2, 1) \approx 0.071$	$f\left(2, \frac{1}{10}\right) \approx 0.0086$	$f\left(2, \frac{1}{100}\right) \approx 0.00088$
3	$f(3, 1) \approx 0.041$	$f\left(3, \frac{1}{10}\right) \approx 0.00047$	$f\left(3, \frac{1}{100}\right) \approx 0.00048$

A modo de ejemplo, se considera el caso en que  $b = \frac{1}{2}$ , la desigualdad (39) se escribe como

$$4 \left[ \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n} \right] < \frac{1}{\sqrt{n}} < 4 \left[ \sqrt{n} - \sqrt{n - \frac{1}{2}} \right].$$

Se toman valores de  $n$  y se suman las desigualdades encontradas

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad 4 \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{1} \right] \leq 1 \leq 4 \left[ \sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right], \\ n = 2 & \quad 4 \left[ \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{2} \right] \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 4 \left[ \sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right], \\ n = 3 & \quad 4 \left[ \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{3} \right] \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leq 4 \left[ \sqrt{3} - \sqrt{\frac{5}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Se continúa este proceso hasta el  $n$ -ésimo término. Se suman logrando la desigualdad

$$\begin{aligned} 4 \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{2i+1}{2}} - \sqrt{i} \right) \right] \leq S_n \leq 4 \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{i} - \sqrt{\frac{2i-1}{2}} \right) \right], \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{2i+1} - \sqrt{2i} \right) \right] \leq S_n \leq \frac{4}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{2i} - \sqrt{2i-1} \right) \right]. \end{aligned} \tag{40}$$

Nótese que cada sumatoria tiene  $2n$  términos donde se está sumando la diferencia entre las raíces de un número impar y uno par consecutivos o al contrario. Al expandir la suma del lado izquierdo en (40) y reorganizar los términos se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i}) &= \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{7} - \sqrt{6} + \dots + \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}, \\ &= \left[ 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \dots - \sqrt{2n} + \sqrt{2n+1} \right] - 1, \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i+1} \sqrt{i} - 1. \end{aligned}$$

La expresión 40 se escribe como

$$2\sqrt{2} \left( \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i+1} \sqrt{i} - 1 \right) \leq S_n \leq 2\sqrt{2} \left( \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \sqrt{i} \right), \quad (41)$$

$$\left\lfloor 2\sqrt{2} \left( \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i+1} \sqrt{i} - 1 \right) \right\rfloor \leq \lfloor S_n \rfloor \leq \left\lfloor 2\sqrt{2} \left( \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \sqrt{i} \right) \right\rfloor. \quad (42)$$

En el caso en que  $n = 25$  se tiene que  $S_n = 8.6393\dots$  y  $\lfloor S_n \rfloor = 8$ . La suma del lado izquierdo en (41) equivale a 8.3956 que es más aproximada y su parte entera es la misma que la de  $S_n$ .

## 4. Conclusiones

Se puede concluir que la función parte entera está presente en muchos contextos propios de las matemáticas y en situaciones cotidianas donde se suelen hacer aproximaciones al entero más próximo. A lo largo de la presentación de este escrito, se pudo evidenciar la importancia de la interpretación geométrica de algunas de las propiedades que fueron estudiadas. En esta misma línea, hacer el estudio como función de dos variables o hacer la reducción al intervalo  $[0, 1]$ , fue muy enriquecedor. El campo de aplicación de la función parte entera es muy diverso, desde los números complejos hasta la suma de partes enteras, desde las teselaciones hasta los puntos red. La estructura presentada busca fomentar estudios similares sobre la búsqueda de propiedades y relaciones matemáticas mediante la inferencia funcional para números reales u otros conceptos matemáticos. Para futuros trabajos se tiene la posibilidad de explorar otros campos de aplicación de la función parte entera.

## Referencias

- [1] Albis Gonzáles O., *Análogos en  $F_q[X]$  de conjeturas famosas de la teoría de los números*, Rev. Acad. Colomb. Cienc. pag 489-504. ISSN 0370-3908. 1990.
- [2] Blanco L. *Probabilidad*, Universidad Nacional, pag. 1-451, ISBN 978-958-719-576-7. 2010.
- [3] Dickson L.E. *History of the Theory of Numbers*, Carnegie Institution of Washington, Volumen 1, pag. 263, num.1. 1919.
- [4] Eisele P. and Hadeler K-P. *Game of cards, dynamical systems, and a characterization of the floor and ceiling functions*, The american mathematical monthly, Vol.97, pag. 466-477, num.6. 1990, Published online 2018.

- [5] Eremin, G. *Legendre's formula and  $p$ -adic analysis*, arXiv preprint arXiv:1907.11902, Preprint, online 2019.
- [6] Isgur A., Kuznetsov V. and Tanny S. *Nested recursions with ceiling function solutions*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol.18, N° 6 pag. 1015-1026, 2012.
- [7] Kim J., Zhang, G., Stillinger F. and Torquato S. *Inversion problems for Fourier transforms of particle distributions*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. N.11, pag. 1-21, 2018.
- [8] Korovkin P.P. *Lecciones populares de matemáticas: Desigualdades*, Editorial Mir (Moscú), edición traducida al español, pag 1-76. 1976.
- [9] Lennerstad, H. and Lundberg L. *Generalizations of the floor and ceiling functions using the Stern-Brocot tree*, Research report. N.02, pag. 1-25, 2006.
- [10] Hiren Maharaj and Gretchen L. M. *On the floor and the ceiling of a divisor*, Journal Finite Fields and Their Applications, Vol.12, Number 1. pag. 38-55, 2006. Issn: 1071-5797.
- [11] Nyblom, M.A *Some curious sequences involving floor and ceiling functions*, The American mathematical monthly, Vol.109, pag. 559-564, 2002.
- [12] Nyblom, M.A *A summation formula for sequences involving floor and ceiling functions*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics, pag. 1595-1602, 2006.
- [13] Shah D., Sahni M. and Sahni R. *Novel Results on Series of Floor and Ceiling Functions*, arXiv:1910.03469, pag. 1-16, 2020.
- [14] Tellez Acosta G. *Métodos Matemáticos*, Universidad de los Andes, departamento de Física, ISBN 958-695-130-8, pag. 1-185, 2004.
- [15] Weinstein I.A *Family of prime-representing constants: use of the ceiling function*, arXiv:2101.00094, pag. 1-6, 2020.

#### Sobre los autores:

*Nombre:* Juan Carlos Arango Parra  
*Correo electrónico:* jarang53@eafit.edu.co  
*Institución:* Universidad EAFIT  
*Orcid:* orcid.org/0000-0002-8862-7478

*Nombre:* Yeisson Alexis Acevedo Agudelo  
*Correo electrónico:* yaceved2@eafit.edu.co  
*Institución:* Universidad EAFIT  
*Orcid:* orcid.org/0000-0002-1640-9084

# Experiencias Docentes

## Una práctica para fomentar el trabajo en equipo secuencial en materias matemáticas

## A practice to enhance sequential team work in mathematical topics

Javier Rodrigo Hitos

Susana Merchán Rubira

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 077-083, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Abr'21; Aceptación: 7 ene'22

1 de abril de 2022

### Resumen

Este artículo presenta la experiencia de la realización de una práctica con ordenador en la que los estudiantes de la clase se dividieron en grupos y cada grupo de estudiantes, de segundo curso de ingeniería informática, necesitaba el resultado del grupo anterior para hacer su parte. La práctica fomentaba, por tanto, el trabajo secuencial en equipo, que es el que los alumnos se van a encontrar en el futuro cuando trabajen en empresas de ingeniería, lo que pone en valor a la experiencia didáctica.

La práctica, encuadrada en la asignatura de Matemática Discreta, consistía en el cifrado y descifrado de un mensaje utilizando el algoritmo RSA y un software matemático del grupo Wolfram, como es el Mathematica. Este algoritmo se estudió en las clases de teoría dentro del tema dedicado a la teoría de números, como un ejemplo de “aplicación a la vida real” de conceptos clásicos que se estudian en este tema, como los números primos, la aritmética modular o el teorema de Euler. Por tanto, además de su importancia pedagógica, la práctica proporcionó a los alumnos los medios para implementar esta aplicación.

**Palabras Clave:** Trabajo en equipo, prácticas con ordenador, Matemática Discreta, algoritmos.

### Abstract

This paper presents the work performed by the authors with the objective of carrying out a practical experience with the students of the second course of Computer Engineering degree in the computer room. In this experience, firstly, the students are divided into groups. Due to the construction of the exercise, each group of students needed the results of the previous group to do its part of the work. In this way, the practical session improves the ability of the students to work by teams in a sequenced way. Since team working is one of the main abilities that Engineering Companies value in their workers, this didactic experience could be an interesting opportunity to enhance this skill in future engineers.



The practice is framed in the field of Discrete Mathematics. It consists in encoding and decoding a message by applying the RSA algorithm by means of Mathematica (the math software of the Wolfram team). The algorithm was developed in the theoretical sessions within the topic dedicated to the Number Theory as an example of the real life application of classical concepts that are studied in this field, such as the prime numbers, the modular arithmetic and the Euler theorem. Therefore, besides its didactical importance, the practice also provides resources for the students to implement this application.

**Keywords:** Team working, practice with computers, Discrete Mathematics, algorithms.

## 1. Introducción

La realización de prácticas con ordenador es útil en las asignaturas con contenido matemático, ya que sirven para ilustrar con ejemplos algunos de los contenidos que se explican en la clase teórica. El ordenador permite, además, la realización de problemas con números altos, lo que a veces se ajusta más a casos de la vida real. Se fomenta además el desarrollo de algunas competencias, como pueden ser el trabajo en grupo, la capacidad de comunicación, el uso del lenguaje matemático o científico y la participación en clase.

La práctica que se comenta en este artículo tuvo la particularidad de que los grupos de trabajo buscaban un objetivo común, para el que cada uno tenía que realizar la parte que le correspondía, no pudiendo cada grupo realizar su cometido hasta que no tuviera el resultado del grupo anterior, teniendo que comunicarse entre sí para completar el ejercicio. Esto hizo que el trabajo en equipo no se limitara al realizado en los distintos grupos constituidos, ya que cada grupo debía interactuar con los demás, en lo que resultó una simulación de la forma de trabajar en las empresas, en las que se realizan proyectos donde diversos subgrupos hacen partes del trabajo (tareas) que luego se ponen en común. Esto resulta útil para los estudiantes, porque les adelanta el modo de trabajar que pueden tener en su vida profesional y porque les prepara también a nivel personal para enfrentarse a situaciones en las que hay que trabajar en común por el bien de la comunidad.

## 2. La práctica puesta en contexto

La práctica que se comenta en la introducción se realizó el curso 2008-2009 en la asignatura Matemática Discreta, perteneciente al segundo curso de la titulación superior de Ingeniería Informática impartida en la Universidad Pontificia Comillas.

El objetivo de la práctica era llevar a cabo un algoritmo de codificación que se estudiaba en las clases teóricas como una aplicación de la teoría de números, la parte más clásica de la Matemática Discreta. De esta forma, los estudiantes conocían una aplicación actual de conceptos, en principio muy teóricos, y ajenos a toda aplicación práctica.

En concreto, las definiciones y resultados de la teoría de números que se explicaban en el tema y se utilizan en el algoritmo son (ver [1], [2] y [3]):

-Número primo: número divisible sólo por él mismo y por la unidad (por ejemplo, 3 es primo, 4 no es primo, 5 es primo...)

-Números primos relativos: números que no tienen ningún factor primo común (por ejemplo, 3 y 8 son primos relativos, 6 y 10 no son primos relativos)

-Números congruentes módulo  $n$ : dos números cuya diferencia es múltiplo de  $n$  (por ejemplo 2 y 7 son congruentes módulo 5 y se escribe  $2 \equiv 7 (5)$ , 3 y 7 no son congruentes módulo 5)

- Inverso de  $a$  módulo  $n$ : un número  $b$  entre 1 y  $n$  tal que  $a b$  es congruente con 1 módulo  $n$  (es decir, un número  $b$  mayor o igual que 1 y menor que  $n$  tal que al dividir  $a b$  entre  $n$  dé resto 1. Por ejemplo, 3 es el inverso de 2 módulo 5)

- Función  $\varphi$  de Euler: función que a cada  $n$  le asigna el número de números que hay menores que  $n$  y primos relativos con  $n$  (por ejemplo,  $\varphi(4) = 2$ )

- Teorema:  $a$  tiene inverso módulo  $n$  si y sólo si  $a$  y  $\varphi(n)$  son primos relativos

- Teorema de Euler: si elevamos un número  $a$ , primo relativo con  $n$ , a  $\varphi(n)$ , queda un número congruente con 1 módulo  $n$  (por ejemplo, 3 es primo relativo con 4 y  $3^{\varphi(4)} = 3^2 = 9$  es congruente con 1 módulo 4).

El algoritmo que se implementó en la práctica y que se comenta en la siguiente sección es un algoritmo de cifrado y descifrado conocido como algoritmo RSA (ver [4]).

### 3. El algoritmo RSA

Este algoritmo surgió por la necesidad de cifrar mensajes de una forma más segura que la que se hacía hasta ese momento, ya que la irrupción de los ordenadores y la necesidad de enviar desde ellos números privados, como números de tarjetas de crédito, pins,... hacía que fuera importante el crear un sistema de cifrado mediante una clave pública en el que sólo el interesado, con una clave privada, pudiera descifrar el mensaje.

Debe su nombre a las iniciales de los autores del algoritmo: Rivest, Shamir y Adleman, investigadores del MIT (Instituto Tecnológico de Massachussets). Antes de describirlo, necesitamos definir de forma rigurosa los conceptos de clave pública y clave privada mencionados anteriormente:

Definición. Clave pública

Una clave pública es un par  $(e, n)$  donde  $n = p q$  para dos números primos determinados,  $e > 1$  es cualquier número primo relativo con  $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$

Definición. Clave privada

Una clave privada es un par  $(d, n)$  donde  $n$  es como en la definición anterior,  $d$  es el inverso de  $e$  módulo  $\varphi(n)$  (existe porque  $e, \varphi(n)$  son primos relativos).

El algoritmo tiene dos partes, generación de claves y cifrado y descifrado del mensaje (un número  $m$ ). Sus pasos son:

-Generación de claves

Paso 1: Tomamos dos primos mayores que  $m$ ,  $p$  y  $q$ , y definimos  $n = p q$

Paso 2: Hallamos  $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$

Paso 3: Hallamos un número  $e > 1$  primo relativo con  $\varphi(n)$

Paso 4: Hallamos el inverso de  $e$  módulo  $\varphi(n)$  (le llamamos  $d$ )

Output: La clave pública es  $(e, n)$  y la privada  $(d, n)$ , para los  $e, d, n$  hallados.

- Cifrado y descifrado

Paso 1 (para cifrar, a partir de la clave pública): elevamos  $m$  (el número que queremos cifrar) a  $e$  y tomamos módulo  $n$  (para que no quede muy grande)

Paso 2 (para descifrar, a partir de la clave privada): elevamos el número cifrado a  $d$  y tomamos módulo  $n$  (obtenemos así  $m$ )

Demostramos que el procedimiento para encontrar  $m$  es correcto utilizando el teorema de Euler:

Tenemos que  $(m^e)^d = m^{ed}$ . Como  $d$  es el inverso de  $e$  módulo  $\varphi(n)$ , tenemos que  $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ , por lo que  $ed = k\varphi(n) + 1$  para cierto natural  $k$ . Entonces:

$m^{ed} = m^{k\varphi(n)+1} = (m^{\varphi(n)})^k m$ . Por otro lado, como  $m$  y  $n$  son primos relativos, por el teorema de Euler tenemos que  $m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ , por lo que  $m^{ed} = (m^{\varphi(n)})^k m \equiv m \pmod{n}$  y así al elevar el número cifrado a  $d$  y tomar módulo  $n$ , efectivamente da  $m$ .

### Ejemplo

Supongamos que queremos cifrar  $m=2$ . Generamos primero las claves:

Paso 1: Tomamos, por ejemplo  $p=5$  y  $q=11$ , y definimos  $n = 5 \times 11 = 55$

Paso 2: Tenemos que  $\varphi(n) = 4 \times 10 = 40$

Paso 3: Tomamos, por ejemplo,  $e = 7$  (primo relativo con 40).

Paso 4: Hallamos el inverso de  $e$  módulo 40:  $d=23$

Entonces, la clave pública es  $(7, 55)$  y la privada  $(23, 55)$

Cifrado: elevamos 2 a  $e = 7$  y da 128, que módulo  $n=55$  es 18: éste es el número en clave

Descifrado: elevamos el número cifrado: 18 a  $d=23$  y tomamos módulo  $n=55$ . Efectivamente da 2.

### Observación

En el ejemplo es fácil descifrar porque  $n$  es el producto de dos primos pequeños, luego es fácil hallar  $\varphi(n)$ , fundamental para descifrar porque te da la clave privada. En cambio si  $p$  y  $q$  son grandes, es difícil factorizar  $n$  para poder hallar  $\varphi(n)$ . Es por esto que son muy valiosos los primos grandes.

## 4. Desarrollo de la práctica

La práctica se llevó a cabo en una sesión de clase de 50 minutos, en un aula de ordenadores. Para la misma se utilizó el software Mathematica 5.0, de Wolfram, del que se hizo una breve introducción al principio de la práctica.

Se hicieron cuatro grupos de tres o cuatro alumnos cada uno: el primer grupo creó  $n$  y halló  $\varphi(n)$ , el segundo creó la clave pública y la privada, el tercero cifró y el cuarto descifró.

Al primer y tercer grupo se les dio el número a cifrar ( $m$ ). El primer grupo tuvo que hacer las siguientes tareas:

1) Definir el número  $n$ . Para ello, encontró dos primos  $p$  y  $q$  mayores que  $m$  utilizando dos veces el comando NextPrime y los multiplicó

2) Hallar  $\varphi(n)$ . Para ello, multiplicó los números  $p-1$  y  $q-1$

Un representante del grupo dio la información de los números  $n$  y  $\varphi(n)$  al segundo grupo y la de  $p$  y  $q$  al profesor (para que éste pudiera comprobar los resultados). El segundo grupo tuvo que realizar lo siguiente:

3) Hallar un número primo relativo con  $\varphi(n)$ . Para ello, utilizó el comando FactorInteger y buscó un primo que no estuviera en la factorización en primos de  $\varphi(n)$ . Se definió este número como  $e$ .

4) Hallar el inverso de  $e$  módulo  $\varphi(n)$ . Para ello, utilizó el comando PowerMod. Se definió este número como  $d$ .

Un representante del grupo publicó la clave  $(e, n)$  en la pizarra y pasó la clave privada  $(d, n)$  al grupo cuatro. El grupo tres se encargó de:

5) Hallar  $m^e$  y pasarlo a módulo  $n$ . Para ello, utilizó el comando Mod.

Un representante del grupo puso el número hallado (número cifrado) en la pizarra. El grupo cuatro tuvo que hacer lo siguiente:

6) Elevar el número cifrado a  $d$  y tomar módulo  $n$ .

Un representante del grupo dijo el número obtenido, que efectivamente era  $m$ , como comprobaron los grupos primero y tercero y el profesor.

### Observación

El número que se dio al grupo uno fue  $m=1532$ , para el que el grupo eligió  $p=1543$ ,  $q=1549$ , con los que obtuvo  $n=2390107$ ,  $\varphi(n) = 2387016$ . El segundo grupo consiguió entonces los valores  $e=5$ ,  $d=1909693$ , por lo que el número cifrado escrito en la pizarra por el tercer grupo fue 897447

## 5. Conclusiones y líneas de mejora futura

Las sesiones prácticas con ordenador realizadas en aulas de informática constituyen siempre una experiencia docente positiva, especialmente indicada en titulaciones con alto contenido tecnológico como la Ingeniería Informática.

La puesta en escena de la práctica sujeta a estudio tuvo como aspectos notables el hecho de que se realizara en grupos y de manera secuencial, ya que resultó ser una simulación de la forma de trabajar en los proyectos de las empresas de ingeniería, donde cada grupo de trabajo depende de la calidad de los resultados que recibe del grupo anterior y debe enviar sus resultados correctos al grupo siguiente, en busca de un objetivo final común.

En los comentarios realizados por los alumnos sobre el desarrollo de la práctica en una tutoría llevada a cabo por el profesor de la asignatura, estos manifestaron su satisfacción con la experiencia, ya que les ayudó a tener una comprensión más profunda de los conceptos explicados en las sesiones teóricas y les dio una visión más práctica de la teoría de números, el tema más árido de la asignatura para la mayoría de los estudiantes. Trazaron sin embargo unas líneas de mejora a tener en cuenta en el futuro y que se comentan a continuación.

Como principal línea de mejora, destacar que la carga de trabajo no fue del todo homogénea, no teniendo tanta actividad los grupos tres y cuatro como los dos primeros grupos. Además, un efecto negativo del trabajo secuencial fue la pasividad de los grupos cuando no les tocaba hacer su parte. A pesar de que se les animó a que fueran partícipes de todo el proceso, los grupos se relajaban antes de hacer su parte y se desentendían del resto del proceso una vez realizado su trabajo.

Para paliar esas deficiencias en el futuro, se propone llevar a cabo otro tipo de actividades con contenido matemático realizadas en grupos que trabajen persiguiendo un objetivo común, en las que cada grupo dependa en parte del trabajo del anterior pero a su vez tenga asignadas unas tareas propias que pueda realizar independientemente de los demás grupos.

## Referencias

- [1] CILLERUELO, Javier, CÓRDOBA, Antonio. *La teoría de los números*, Mondadori, España, 1991.
- [2] HARDY, Godfrey Harold, WRIGHT, Edward Maitland. *An introduction to the theory of numbers*, Oxford Mathematics, UK, 2009.
- [3] ROSEN, K. H. *Discrete Mathematics*, Mc Graw- Hill, USA, 1999.
- [4] RIVEST, R., SHAMIR, A., ADLEMAN, L. *A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems*, pp. 120–126, Communications of the ACM, Vol. 21 (2), USA, 1978.

### Sobre el/los autor/es:

Nombre: Javier Rodrigo

Correo Electrónico: jrodrigo@comillas.edu

Institución: Universidad Pontificia

Comillas.

*Nombre:* Susana Merchán Rubira

*Correo Electrónico:* [susana.merchan1@upm.es](mailto:susana.merchan1@upm.es)

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid.

# Historias de Matemáticas

## Ritmos, arte y geometría

### Rhythms, art and geometry

Jesús Alonso Trigueros

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 085-137, ISSN 2174-0410  
Recepción: 12 Sep'22; Aceptación: 31 Mar'22

1 de abril de 2022

#### Resumen

La música y el arte constituyen dos de las formas de comunicación más íntimas y a la vez más universales del ser humano. A través de ellas se pueden descubrir realidades espirituales que ningún otro lenguaje es capaz de expresar en toda su magnitud.

El ritmo es el elemento motor de la música. Históricamente, constituyó, con todo tipo de instrumentos rudimentarios como medio, la primera expresión musical organizada del hombre primitivo. Musicalmente hablando, el ritmo es la expresión de la duración de los sonidos. Por supuesto, así como no todos los sonidos tienen la misma intensidad, tampoco todos los sonidos se prolongan durante un mismo tiempo. Además, el ritmo es el elemento musical clave que se utiliza para distinguir todos los estilos o géneros musicales. El uso de la secuencia rítmica como base de la composición se puede aplicar también a cualquier otra manifestación del arte. Es precisamente esa secuencia rítmica quien proporciona una determinada personalidad a la obra de arte. Los silencios también son ritmos, igual que sucede en el lenguaje hablado. Es necesario recurrir a pausas o silencios que ayuden a la mejor comprensión del texto o de cualquier manifestación artística.

En el arte es posible encontrar relaciones que establecen medidas de unidad, de forma similar al compás musical. Así, de la misma manera que el compás divide una composición en partes de igual duración, estableciendo un orden periódico y regular, en la pintura o en la escultura se pueden establecer proporciones y secuencias de acuerdo a determinados patrones que evolucionan y, a veces, se repiten. Estos patrones tienen una caracterización geométrica a veces evidente y otras de difícil apreciación.

En este artículo se hace un recorrido por distintas manifestaciones del arte, ya sea pintura, escultura, fotografía, moda, arquitectura, ingeniería, artes decorativas y otras, recogiendo sus relaciones con los ritmos musicales y sus características geométricas.

**Palabras Clave:** Ritmo, Arte, Geometría, Poliedro, Razón Áurea, Diseño, Proporción, Belleza, Música, Guitarra, Ramirez, Caruncho, Nok, Akhuansi, Fibonacci, Números, danza, moda.

### Abstract

Music and art constitute two of the most intimate and at the same time most universal forms of communication of the human being. Through them you can discover spiritual realities that no other language is able to express in all its magnitude.

Rhythm is the driving force behind music. Historically, it constituted, with all kinds of rudimentary instruments as a medium, the first organized musical expression of primitive man. Musically speaking, rhythm is the expression of the duration of sounds. Of course, just as not all sounds have the same height, neither do all sounds last for the same time. In addition, rhythm is the key musical element that is used to distinguish all musical styles or genres.

The use of rhythmic sequence as the basis of composition can also be applied to any other manifestation of art. It is precisely this rhythmic sequence that provides a certain personality to the work of art. Silences are also rhythms, just as they are in spoken language. It is necessary to resort to pauses or silences that help to better understand the text or any artistic manifestation.

In art it is possible to find relationships that establish measures of unity, similar to the musical compass. Thus, in the same way that the compass divides a composition into parts of equal duration, establishing a periodic and regular order, in painting or sculpture proportions and sequences can be established according to certain patterns that evolve and, sometimes, are repeated. These patterns have a geometric characterization sometimes evident and others difficult to appreciate.

This article takes a tour of different manifestations of art, whether painting, sculpture, photography, fashion, architecture, engineering, decorative arts and others, collecting their relationships with musical rhythms and their geometric characteristics.

**Keywords:** Rhythm, Art, Geometry, Polyhedron, Golden Ratio, Design, Proportion, Beauty, Music, Guitar, Ramirez, Caruncho, Nok, Akhuansi, Fibonacci, Numbers, dance, fashion.

## 1. La onda musical y el análisis de la belleza

### 1.1 El sonido

El sonido constituye un fenómeno tan habitual en nuestra vida cotidiana que acostumbra a pasar casi siempre inadvertido. Tanto que, a veces, ni tan siquiera se distingue la diferencia entre sonido y ruido.

El sonido, representa un fenómeno eminentemente físico. Su relación con otros sonidos es lo que le confiere su sentido musical; es decir, sólo cuando el sonido forma parte de una estructura que implique múltiples conexiones con otros sonidos podrán darse las condiciones para que exista la música.



El sonido se origina cuando un cuerpo entra en vibración. Por tanto, todo cuerpo elástico, puede originar sonido. Pero sólo cuando la vibración que produce el cuerpo sonoro sea regular y periódica se puede hablar de sonido. Si esta vibración no es regular, se habla entonces de ruido.

Cuando la vibración del cuerpo sonoro se propaga en el aire, se origina un movimiento ondulatorio y es en ese momento cuando se siente la sensación sonora en el oído.

La altura de un sonido depende de la velocidad de vibración y se denomina frecuencia. Un sonido será más agudo cuanto más alta sea su frecuencia y más grave cuanto más baja sea ésta.

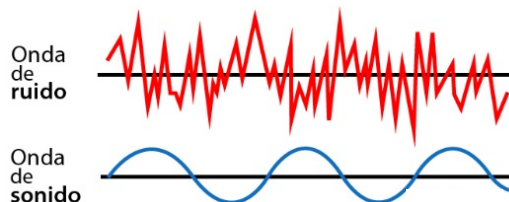


Figura 1. Gráfica del ruido y del sonido. Fuente: Auditorium, cinco siglos de música inmortal. 2002.

## 1.2 La representación de la belleza

Una aportación importante a esta idea es la del artista William Hogarth en su libro *Análisis de la belleza*, publicado en 1753. Se trata de un estudio de carácter empírico y demostrativo, con láminas grabadas a las que se alude continuamente en el texto. Hogarth defiende la importancia de la observación empírica frente a las actitudes que él había percibido con desagrado en los tratados de arte: la del filósofo, que habla de generalidades estéticas; la del erudito, que se refiere a hechos y anécdotas exteriores al arte; y la del académico, que trata del valor de las reglas y promueve la copia de los maestros antiguos.

El autor entiende que la verdadera razón de la belleza sólo puede hallarse investigando en la naturaleza y la encuentra en la curvatura natural del cuerpo humano, definiendo la línea que llama serpentina como la base de la hermosura. Hogarth busca ejemplos en la naturaleza, pero también en el arte y en los objetos cotidianos, lo que le permite valorar la pintura, la escultura y cualquier otro diseño atendiendo a su grado de adecuación al predominio de la curva serpentina. El autor considera, asimismo, que este principio gobierna también la danza y el teatro, artes regidas por el movimiento.

Para William Hogarth, a través del análisis de la línea curva de seres u objetos podemos determinar su grado de belleza o fealdad.

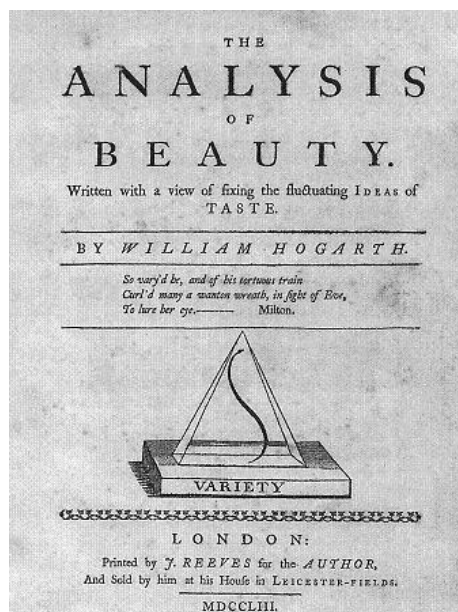


Figura 2. Portada del libro *Análisis de la belleza* de William Hogarth. 1753.



Figura 3. Apolo sauróctonos (matador de saurios). Praxiteles. Museo del Louvre, copia romana en mármol del siglo I-II, según original griego.



Figura 4. Venus de Milo. Museo del Louvre. Creada en algún momento entre los años 130 a.C y 100 a.C. Se desconoce su autor, pero se ha sugerido que pudiera ser obra de Alejandro de Antioquía.



Figura 5. Diana cazadora, Anne Hyatt Huntington. 1943. Jardines de la Facultad de Filosofía de la UCM. Foto: J. Alonso.

Hay muchos artistas que utilizaron la línea serpentina en sus obras, como Miguel Ángel, y también los clasicistas boloñeses del siglo XVII: Carracci y Guido Reni. Pero, sobre todo, está presente en la escultura antigua, así se puede observar en el Apolo de Belvedere, en el Laoconte, en el Hércules Farnesio, en la Venus de Milo, o en el Apolo Sauroctonos y en otras muchas obras de la antigüedad clásica.

No parece descabellado asociar la onda musical del sonido con la serpentina. Bastaría girar la figura 1 noventa grados y alargar la amplitud de la onda de sonido para convertirla en una serpentina. Tal vez esa sea la razón por la que para Hogarth, aunque la serpentina es de difícil descripción, éste la considera una forma sublime que se manifiesta en el cuerpo humano. Un objeto puede ser más bello y gracioso cuanto más curvado y retorcido esté. Si la línea serpentina además posee curvas espaciales que ocupan parte de su trazado, sugerirá un juego para la imaginación y la vista. Esto puede aplicarse a la forma humana, porque la mirada se anima a perseguir las líneas serpentinadas.

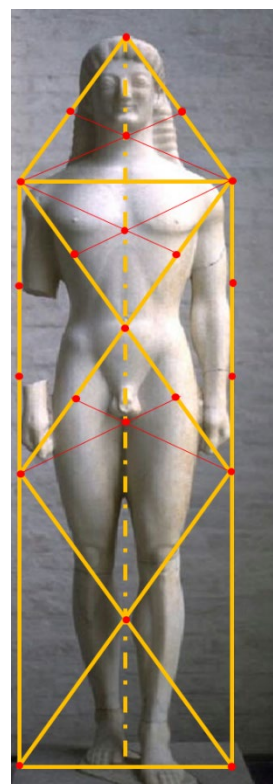


Figura 6. Apolo de Teneaa, 557-550 a.C. Museo de Munich. Geometría de elaboración propia.

Hay que tener en cuenta que las superficies de los objetos se estructuran en torno a líneas íntimamente conectadas. El constante uso de las líneas en el ámbito artístico ha provocado que creamos que éstas delimitan realmente a los objetos.

En contraste con todo ello, hay ejemplos del arte antiguo que podrían cuestionar el uso de la línea serpentina como fundamento de belleza. Así, por ejemplo, en la figura 6, se puede apreciar la hermosura que tiene la Imagen del Kuros de Tenea, expuesto en Munich (Alemania). También llamado Apolo de Tenea, se trata de una escultura que data del año 575 - 550 a.C. y que fue esculpida por algún artista de los talleres de Corinto, ciudad de la Antigua Grecia. En ella se pueden apreciar las proporciones de la figura, siguiendo lo que se podría llamar un ritmo geométrico que responde a una secuencia de triángulos que responde a un patrón que agrupa sucesivos polígonos triangulares desde la planta de los pies hasta el punto más alto de la escultura en la propia cabeza.



Figura 7. Alegoría de la Escultura. Gustav Klimt. 1989.  
Trazados geométricos de elaboración propia.

Por tanto, no se puede, asegurar que haya una relación directa entre esa sensación de movimiento que ofrecen las figuras serpentinadas y las que no lo son. Tal vez, es más real el concepto de belleza de finales del siglo dieciocho, en el que se empieza a asistir a un proceso de subjetivación del concepto de belleza o, lo que es lo mismo, la belleza ya no es algo objetivo, sino que, por el contrario, la noción de belleza está en observador que lo mira.

Es representativo de este hecho la pintura denominada alegoría de la escultura, de Gustav Klimt (ver figura 7), donde el artista expresa en un mismo cuadro la belleza en la sensación de ritmo y movimiento que produce la intuición de la serpentina a la vez que muestra la inmensa belleza de la monumentalidad hierática de esculturas del mundo clásico que invitan a momentos de silencio. Así se puede observar en la obra una mujer desnuda girada, como si se tratara de una estatua, elegantemente adornada con un collar, un brazalete y una diadema, todo en oro. En su mano izquierda sostiene la escultura en bronce de la Victoria. Tras ella se pueden observar varias estatuas, a modo de columna, apreciándose el famoso espinario, la Atenea Partenos de Fidias y la cabeza de la Hera Ludovisi. Un sarcófago cierra la composición por la

parte superior. La admiración de los grandes artistas contemporáneos por el mundo clásico se pone claramente de manifiesto en esta obra.

El espinario es una escultura de bronce realizada originalmente en bronce en el siglo I a.C., pero de la que conocemos copias muy numerosas en bronce y mármol que están en numerosos museos como el de Roma, Londres, Florencia o el Museo del Prado y representa a un joven atleta sacándose una espina de un pie que apoya sobre una pierna, doblando el torso y la pierna para observar. La fama de la obra dio lugar a que la leyenda le considere como un homenaje a un joven corredor encargado de trasladar un mensaje que solo se detiene a descansar a quitarse la espina después de terminar su misión. La luz crea zonas de brillo, pero también sombras en los vacíos existentes entre los brazos y las piernas. El espinario es una escultura de composición abierta que anima al espectador a rodear la obra y contemplar sus numerosos puntos de vista.

En su composición existen varios elementos destacables que afectan a su geometría: al apoyar una pierna sobre la otra crea un espacio vacío y un ángulo recto que abre la obra hacia fuera; los brazos también se despegan del cuerpo, creándose también vacíos y también crean ángulos rectos que abren la obra hacia el exterior, hacia los lados; la pierna de apoyo, el brazo y el hombro forman un esquema en zigzag; mantiene el equilibrio pues la diagonal del torso se equilibra con las líneas vertical y horizontal de las piernas.

En la obra de Klimt también aparece la Atenea Partenos, diosa griega de la sabiduría, la guerra y la artesanía. Se trata de una gran escultura de oro y marfil de la diosa griega, realizada por Fidias y sus ayudantes en el 447 a.C, y que se encontraba en el Partenón de Atenas. Según Plinio, medía unos 11.5 metros de altura (26 codos). A lo largo del tiempo ha habido muchas réplicas y obras inspiradas en la escultura, tanto en la antigüedad como en la actualidad. Lácares retiró las láminas de oro en el año 296 a.C. para pagar a sus tropas, y los reemplazó de bronce por lo que fueron probablemente dorados a partir de entonces.

En la figura 7 se puede ver también la cabeza de la diosa Hera Ludovisi, del siglo I, actualmente en el Palacio Altemps, Museo Nacional de Roma.

Por último, la composición escultórica la completa una representación de la diosa griega de la victoria, Niké, en la mano de la figura femenina central de la composición.

## **2. Ritmos y geometría en el arte**

### **2.1. Conceptos geométricos**

#### **2.1.1 Número áureo**



El número áureo es un número irracional, representado por la letra griega  $\phi$  en honor al escultor griego Fidias.

Se trata de un número algebraico irracional que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la Antigüedad, no como una expresión aritmética, sino como relación o proporción entre dos segmentos de una recta, es decir, una construcción geométrica. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza: en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol, etc. Una de sus propiedades aritméticas más curiosas es que su cuadrado ( $\Phi^2 = 2,61803398874988\dots$ ) y su inverso ( $1/\Phi = 0,61803398874988\dots$ ) tienen las mismas infinitas cifras decimales.

Asimismo, se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea. A lo largo de la historia, se ha atribuido su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y otras artes.

Vitruvio en el S. I escribe "En un rectángulo de lados  $x$  y  $1$ , el todo es al lado mayor como el lado mayor es al menor", de ahí se puede deducir el valor del número áureo:

Donde la raíz negativa no se considera.

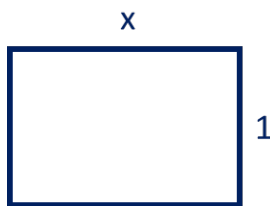


Figura 8. Rectángulo de lados  $1$  y  $x$ .  
Elaboración propia.

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \longrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398874\dots = \phi$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -$$

Estudios han demostrado que la percepción de la belleza radica en la proporción áurea. Aquello que matemáticamente más se aproxime al número  $\phi$ , se percibirá como más bello y perfecto.

En los violines, la ubicación de las efes o eses (los "oídos" u orificios en la tapa) se relaciona con el número áureo. También aparece en las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Durero y Leonardo da Vinci, entre otros.

En las estructuras formales de las sonatas de Wolfgang Amadeus Mozart, en la Quinta Sinfonía de Beethoven, en obras de Franz Schubert y Claude Debussy. Muy probablemente estos compositores compusieron estas relaciones de manera inconsciente, basándose en equilibrios de masas sonoras.

### 2.1.2 Segmento áureo

Se llama parte áurea o segmento áureo de un segmento dado  $a$ , a otro segmento  $x$  tal que es media proporcional de  $a$  y  $(a-x)$ . Así, se cumple que:

$$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x} \qquad x = 0,62 \cdot a$$

Gráficamente:

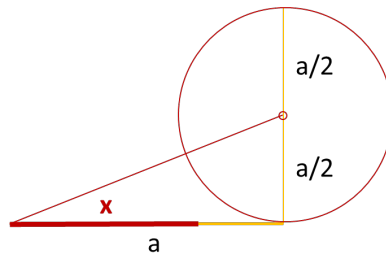


Figura 9. Construcción para obtener el segmento áureo. Elaboración propia.

### 2.1.3 Rectángulo áureo

Para hacer el rectángulo áureo se dibuja un cuadrado. Sobre este cuadrado se marca el punto medio de uno de los lados. A continuación, trazando un arco de circunferencia cuyo radio sea desde este punto medio, hasta el vértice superior tratando de encontrar la prolongación del lado inferior:

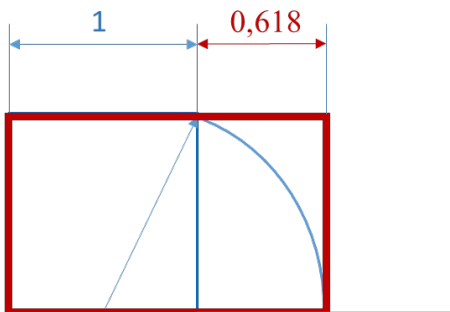


Figura 10. Obtención del rectángulo áureo a partir del cuadrado. Elaboración propia.

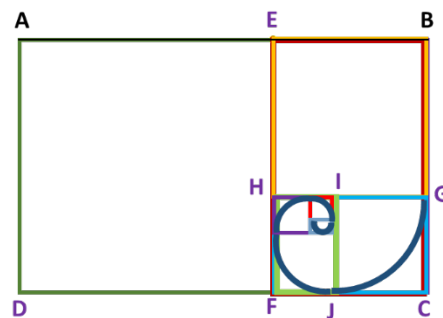


Figura 11. Obtención de la espiral de Durer. Elaboración propia.

Si sobre este rectángulo áureo, se traza otro cuadrado, cuyo lado sea la longitud del lado mayor del rectángulo, se obtiene un segundo rectángulo áureo. Estos rectángulos tienen una propiedad interesante: al unir mediante arcos de circunferencias los vértices consecutivos de los cuadrados, se obtiene una curva especial que se llama espiral de Durer o espiral de Fibonacci (Véase la figura 11).

Esta espiral está presente en múltiples manifestaciones de la naturaleza vegetal y animal (véase la figura 12), incluso en las proporciones del cuerpo humano.



Figura 12. Espiral de Durero en la naturaleza.



Figura 13. Espiral de Durero sobre la fachada del Partenón. Fuente: Elaboración propia.

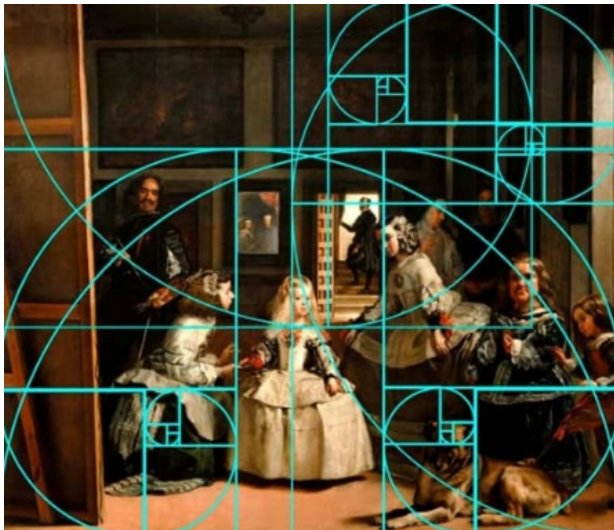


Figura 14. Espirales de Durero en el cuadro de Las Meninas de Velázquez.



Figura 15. Cesare de Toni. Curvismo dello Spazio. Colección particular.

La espiral de Durero está presente en multitud de manifestaciones artísticas, es el caso del Partenon griego (véase la figura 13), en el cuadro de las meninas de Velázquez (véase la figura 14) o en multitud de esculturas. Así, por ejemplo, en la obra escultórica “Curvismo dello Spazio” (véase la figura 15), el artista Cesare de Toni hace una serie compositiva con referencia a la geometría euclidiana, con especial atención a la proporción áurea y a las teorías numéricas de la repetición de símbolos, adoptando el método de secuencia de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...). Sucesión cuyo cociente entre un valor y el anterior se aproxima al número áureo. Un razonamiento matemático que se materializa en la percepción visual a través de un lenguaje artístico personal: a través de la secuencia de color y no color, la línea curva propone una idea de movimiento que va más allá del espacio-tiempo. La escultura está formada por 13 formas curvilíneas pintadas a mano en madera contrachapada ensambladas con varios soportes metálicos, descansando sobre un soporte de vidrio con base circular con un dispositivo giratorio manual en el interior.

## 2.2. Geometría en el arte y manifestaciones artísticas

### 2.2.1 La obra de arte

Definir lo que es una pieza de arte no es tarea sencilla, porque no es artista quien traza, con habilidad, unos compases de música, proyecta un puente o crea, de una mole de piedra, una estatua. Sino quien, repitiendo muchas veces tal proeza, configura para siempre lo desordenado, de manera que, como fruto de su esfuerzo, un organismo formal se impone a la contemplación humana y la nutre con sustancias esenciales. La forma, crear la forma conscientemente: ahí está la función definitoria del artista. Emociones, sentimientos, impulsos, darán materia a la obra de arte. Proyectar, en el sentido de sacar fuera, de alumbrar una figura perdurable: ahí está la función del arte. No en la intención; no en la vida; no en el impulso dinámico de la corriente. No es lo que se mueve; sino lo que permanece y dura. Como escribió Eugenio D'Ors: "¿Qué es, en suma, una obra de arte? Una obra de arte es, en estricta definición, una corriente, obturada por una figura".

### 2.2.2 Manifestaciones artísticas contemporáneas

Hay muchos artistas que manifiestan en su arte ese juego numérico deducido de la sección áurea, dando ritmo a la representación. Son muy ilustrativas las palabras de Anthony Ashley Cooper, Conde de Shaftesbury, cuando escribió que "existe un poder en los números, armonía, proporción y belleza de todo tipo que cautiva naturalmente al corazón, y eleva la imaginación hacia una opinión de algo majestuoso y divino".

En ese sentido es paradigmático el caso de Jo Niemeyer, artista y diseñador "concrete" (el "movimiento concrete" fue fundado por Theo van Doesburg en 1924). El trabajo de Niemeyer se basa en la observación de la naturaleza a través del uso de las matemáticas y, especialmente, la sección áurea. Su principal interés se dirige a la percepción del espacio, el tiempo, las distancias y las proporciones y forma la síntesis entre arte y naturaleza que implica al final un diálogo entre el hombre y la naturaleza. Sus obras se pueden encontrar en colecciones y museos públicos y privados, incluidos el Louisiana Museum Humlebæk, Pinakothek der Moderne München, Bauhaus Archiv Berlin, Stedelijk Museum Amsterdam y el Museo de Arte Moderno de Nueva York. A modo de ejemplo, se puede observar la figura 16, en la que el artista, utilizando construcciones geométricas, consigue, a partir de un cuadrado, hacer una composición final simple, con un desarrollo intermedio de mayor complejidad.

La obra muestra una representación geométrica que invita al movimiento rítmico de un cuadrado que evoluciona a otro que termina convirtiéndose en un triángulo equilátero. Al mirar el cuadro buscando aspectos geométricos más allá de la simple transformación, se pueden encontrar relaciones que van produciendo la secuencia evolutiva a partir de la obtención de los segmentos áureos de los cuadrados y los puntos medios de ellos (véase la figura 16). Es un ejemplo claro de que cuando una persona cambia la forma de mirar una obra de arte, esa pieza cambia; cuando se mira la obra y se encuentra en ella belleza, poder y fuerza, el observador siente que algo se mueve en su espíritu, apareciendo una comunicación espiritual entre el artista y la persona que admira su obra.



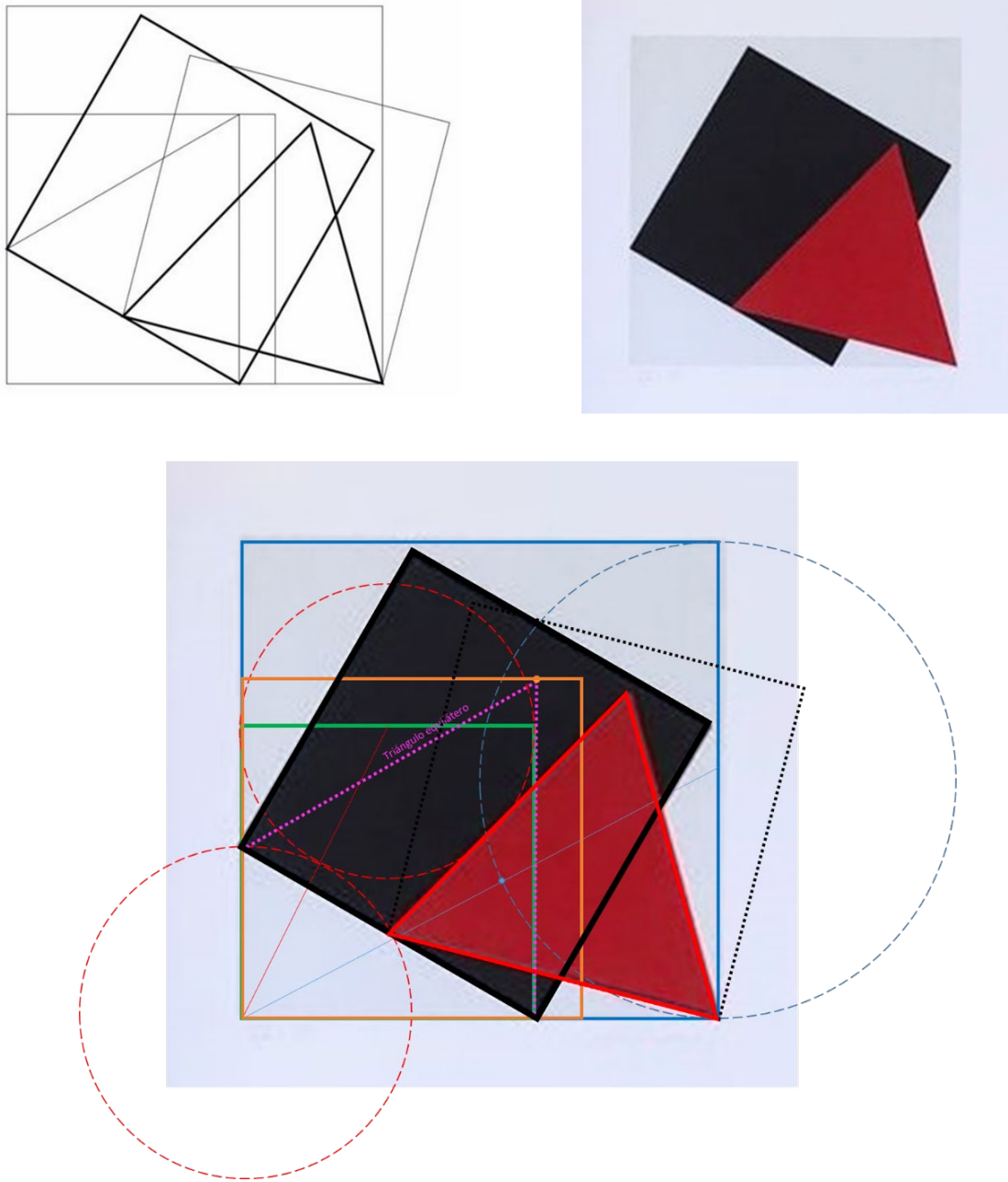


Figura 16. Jo Niemeyer. Serigrafía. Construcción 512. Colección particular. Proceso constructivo de elaboración propia.

Otra figura destacable en el ámbito de la geometría, el arte, el ritmo y las matemáticas es Jacobus Verhoeff. Se trata de un matemático y artista visual holandés que, después de estudiar matemáticas en la Universidad Municipal de Ámsterdam, trabajó en el Centro Matemático y la Universidad Tecnológica de Delft. Se doctoró en 1969 con una tesis sobre corrección de errores en códigos decimales. Más tarde abandonó la investigación y la docencia para dedicarse a la escultura. Es autor de esculturas que siguen patrones geométricos de acuerdo a leyes que siguen algunos códigos de programación (véase la figura 17).



Figura 17. Jacobus Verhoeff. Distintas posiciones de figuras geométricas complejas Colección particular. Elaboración propia del dibujo de distintas geometrías en la imagen inferior derecha.

También es muy notable la aportación de obras de autores como las del pintor y escultor holandés Johannes Jacobus Schoonhoven (1914 - 1994). Una de sus más bellas creaciones es la titulada De Cirkel (1967). En ella se puede apreciar a la perfección la importancia de las sombras, a medida que el ritmo de la sucesión de formas se acentúa por los efectos de la luz al incidir sobre él (véase la figura 18).



Figura 18. Obras de Johannes Jacobus Schoonhoven. A la derecha la pieza titulada "De Cirkel" (1967), actualmente en el Tate Museum de Londres.

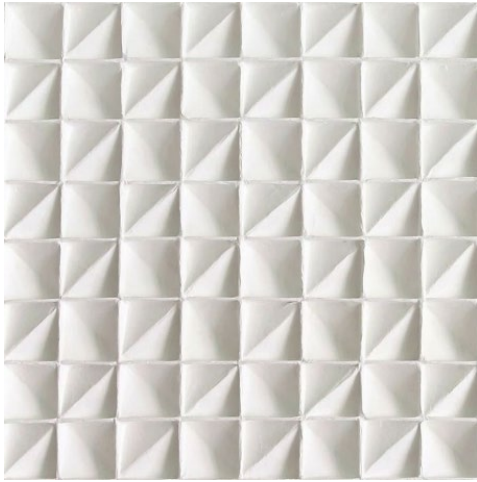


Figura 19. A.J. Moerman. *Relieve geométrico*. 2019. Colección particular.

Siguiendo la estela de Schoonhoven, es notable la obra de A.J. Moerman. Sus relieves 3D abstractos de color blanco con un patrón repetitivo y mucha textura, recuerdan a los diseños del estilo de la Bauhaus y del grupo Zero de los años sesenta. En la figura 19 se puede apreciar un cuadro geométrico en 3D con 198 superficies blancas. Es una obra de arte minimalista que invita al recogimiento interior. La luz incidente proporciona profundidad y un patrón de sombra que atrae porque cambia según la hora del día.

En la figura 20, se puede apreciar un relieve en forma de diamante donde A.J. Moerman sugiere dentro del cuadro figuras geométricas alusivas a poliedros, estrellas y paralelogramos. Así, en azul marino se aprecia un cubo visto con una diagonal perpendicular al papel; en verde se puede ver un tetraedro con una cara apoyada en el papel; en marrón dos caras contiguas de un dodecaedro vistas en perspectiva; en morado dos caras contiguas de un icosaedro; en rojo un octaedro con una arista apoyada en el papel y en azul claro las dos triángulos equiláteros girados  $180^\circ$  correspondientes a las secciones de un cubo con una diagonal perpendicular al plano del papel, al cortarlo por un plano a la distancia de los vértices que resulta de dividir por tres dicha diagonal y de forma que dichos planos sean perpendiculares a ella.

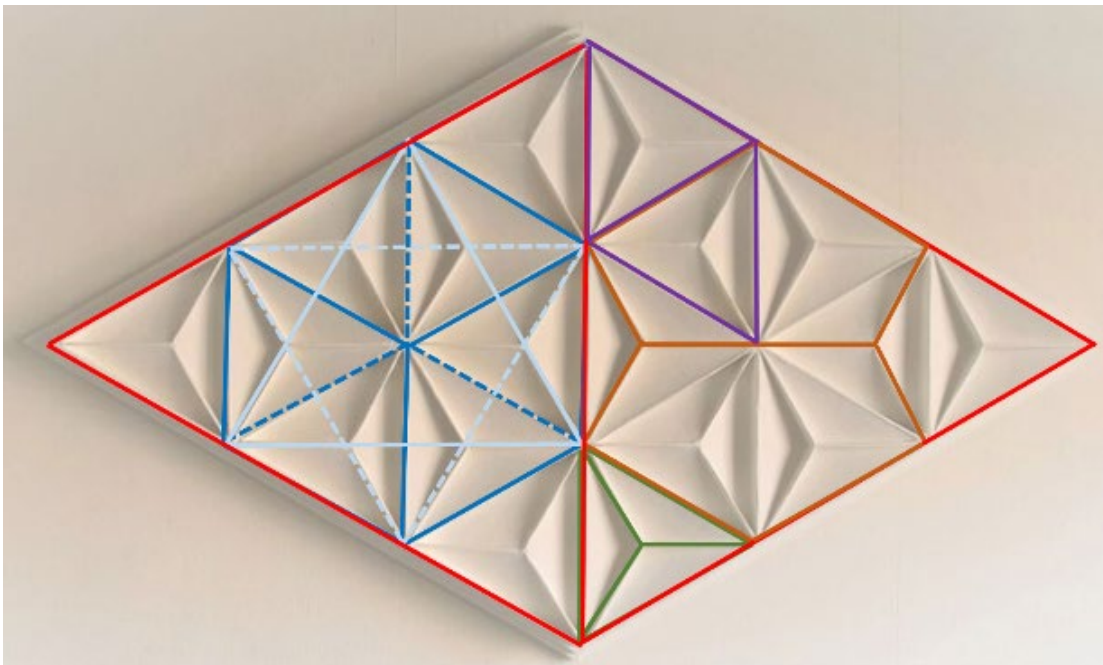


Figura 20. A.J. Moerman. *Relieve geométrico*. 2013. Colección particular. Se han resaltado en colores distintas formas poliédricas sugeridas en la obra. Elaboración propia.

Otras manifestaciones artísticas interesantes se pueden encontrar en obras de autores como Lisanne Lammers. Las imágenes geométricas que muestra en sus obras (véase la figura 21) están realizadas en porcelana enrollada muy fina, creando composiciones formadas por patrones repetitivos que conforman un conjunto de piezas rítmico que se conectan formando una composición arquitectónica dotada de un atractivo dinamismo para el espectador.

Hay que destacar también las obras de porcelana cocida del artista holandés Hans Meeuwsen. Se trata de rítmicas obras de arte donde la geometría tiene un papel preponderante. Son obras muy frágiles, cuyo grosor de la pared es de aproximadamente un milímetro, lo que hace de ellas delicadas piezas en las que el constructivismo puede llevar al artista a geometrías rotatorias en unos casos y estructuras reticuladas en otros, con la presencia de hermosos patrones poliédricos que se repiten secuencialmente como si de una composición musical se tratara (véase la figura 22).

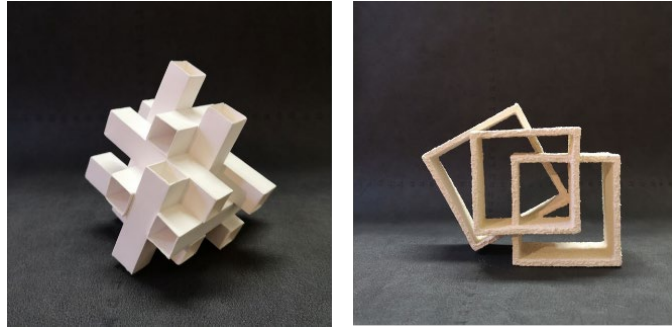


Figura 21. Lisanne Lammers. Esculturas geométricas.. 2019. Colección particular.

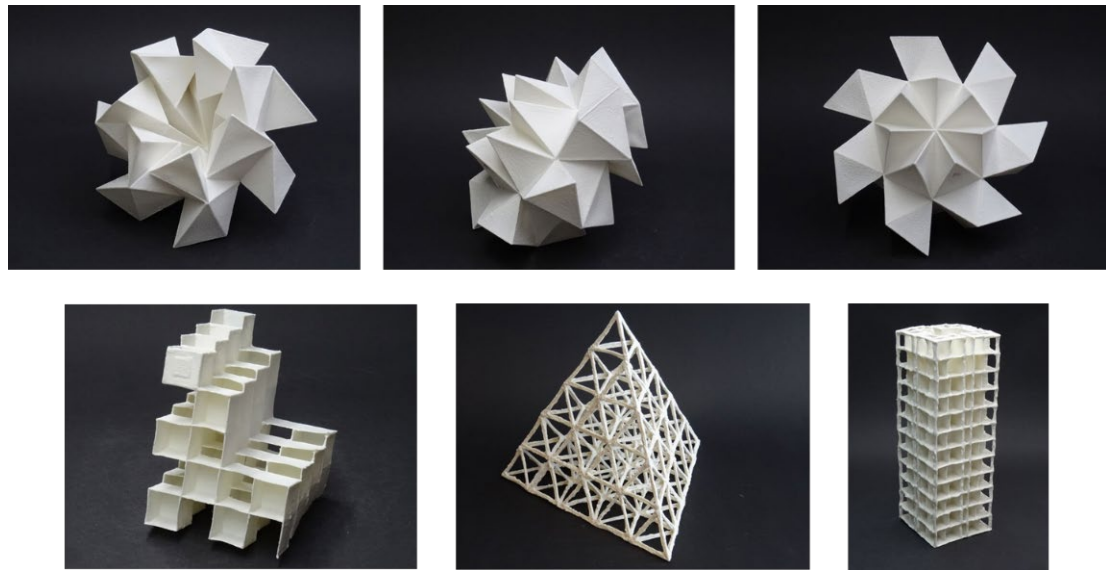


Figura 22. Obras de Hans Meeuwsen. 1919. Porcelana, cocida a oxidación a 1240 grados centígrados. Colección particular.

Las esculturas reticuladas de Meeuwsen recuerdan a las grandes estructuras de edificaciones modernas, tal es el caso de la Biosfera de Montreal, que el gobierno de Estados Unidos encargó a Richard Buckminster Fuller, un diseñador y arquitecto estadounidense, para representar a su país en la Exposición Universal Montreal 67 (véase la figura 23), situado en la Isla de Santa Helena. Se trata de una obra icónica de la arquitectura, que alberga un museo sobre



el medio ambiente. Geométricamente, la cúpula es un icosaedro con 20 caras, cada una formada por la intercalación de pentágonos en una rejilla hexagonal. A su vez, las caras se dividen en triángulos equiláteros.



Figura 23. Distintas vistas del pabellón que representó a Estados Unidos en la Exposición Universal de Montreal 67, situado en la Isla de Santa Helena. Richard Buckminster Fuller.

Es cierto que el interés por la tecnología y la ciencia ha sido siempre la fuerza impulsora de cualquier trabajo; ocurre también en el arte, se trata de visualizar lo que tiene capacidad de atraer. Por eso hay artistas que se sienten fascinados cuando ven máquinas, herramientas e instalaciones. Aunque el punto de partida de la tecnología es la facilidad, el artista se desprende de la idea de utilidad práctica y social para poder trabajar libremente, emprender una aventura y retratar su fascinación desde un enfoque artístico. Es el caso del artista Jos Scholtes, con sus obras cinéticas, como por ejemplo la denominada RockSteady (véase la figura 24). Se trata de una obra de arte en movimiento impulsada por un pequeño motor de transmisión y un circuito de intervalos. Esto permite ajustar con precisión el intervalo de acción y pausa, así como la velocidad de movimiento de la estructura.

Estas estructuras cinéticas están dotadas de una importante carga geométrica; además, el movimiento de la escultura la dota de una singularidad especialmente atractiva para el espectador.

Se Puede ver la imagen de la escultura funcionando en la dirección de youtube: [https://www.youtube.com/watch?v=dKkyAzCX5SM&list=PLNBZIH1HJ00Lo584mvX1fliA\\_r-33zM60&index=1](https://www.youtube.com/watch?v=dKkyAzCX5SM&list=PLNBZIH1HJ00Lo584mvX1fliA_r-33zM60&index=1)

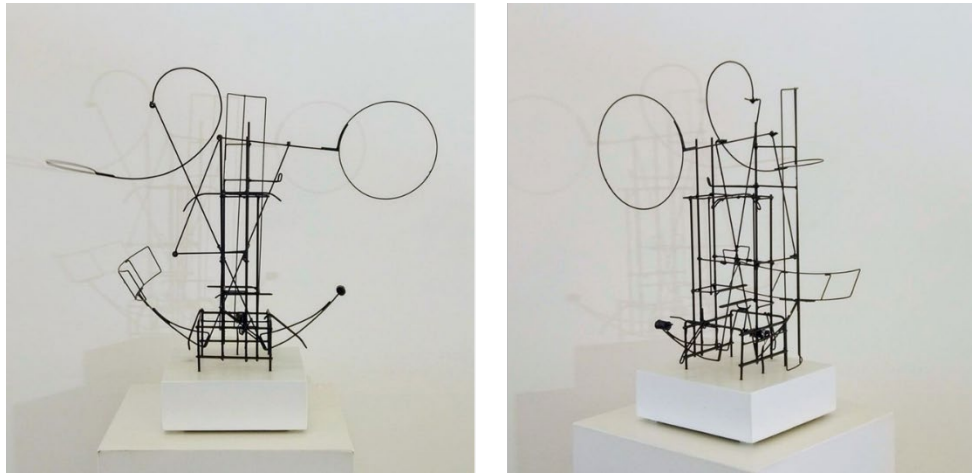


Figura 24. Jos Scholtes - Rock Steady. 2020. 50×30×20 cm. Colección particular. Obra cinética.

En contraste con el movimiento rítmico, ya sea estático o cinético que se han repasado en este epígrafe, hay artistas que se detienen en recoger espacios de silencio y minimalismo, representando elementos simples y especialmente “euclidianos”, es el caso del pintor y escultor Bernard Aubertin (1934 – 2015), artista que formó parte de la corriente “Grupo Zero” en Düsseldorf. En una de sus esculturas representa un clavo de 23 cm de altura, fijado sobre una base a la que se le aplicó una caja de metacrilato (véase la figura 25).

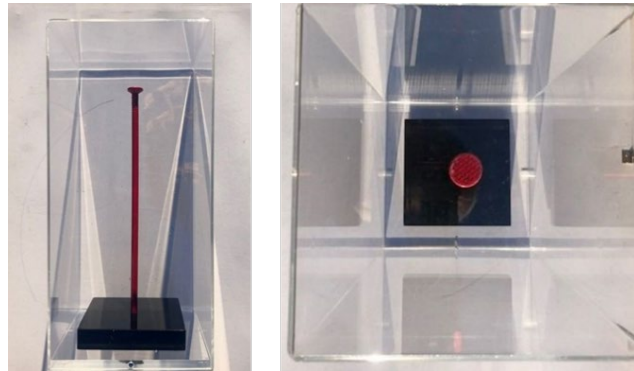


Figura 25. Bernard Aubertin. “Clous Géants”. Escultura en hierro coloreado. Colección particular.

Aubertin hace otras creaciones utilizando series de clavos que forman una “sinfonía” euclidiana, creando matrices de filas y columnas; o bien estableciendo retículas que responden a una sintetización del espacio (véase la figura 26).

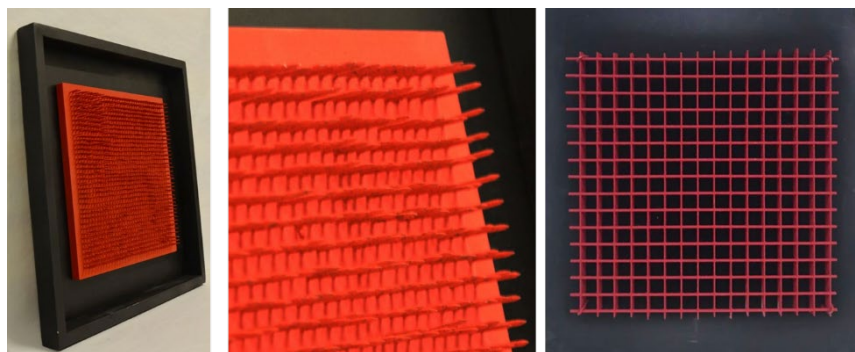


Figura 26. Bernard Aubertin. “Cuadro Clous” a la izquierda y un detalle en el centro. Año 1969. A la derecha “Monorosso”, 1982.



### 2.2.3 Geometrías artísticas del pasado y su relación con el presente

Son muchas las manifestaciones artísticas del pasado. Se podría empezar por comentar la geometría presente en el arte egipcio, pero eso llevaría a extender demasiado el presente artículo. Sólo como muestra, en la figura 27 se puede ver la geometría de las pirámides de Egipto en esa secuencia rítmica inundada de silencios en la inmensidad del desierto. Construidas como criptas reales para los faraones con bloques de piedra revestidos de caliza, eran a la vista, grandes construcciones de color blanco.



Figura 27. Pirámides de Egipto. Año 3000 a.C.

Por ser menos conocido y muy representativo del arte y las geometrías del mundo primitivo de África se exponen a continuación de forma somera algunas de las más primitivas culturas africanas, mostrando, en algunos casos, relaciones muy directas con las representaciones artísticas más modernas.

Por ejemplo, es muy destacable el arte del pueblo mbuti del bosque Ituri en la República Democrática del Congo. Sus habitantes utilizan la abstracción geométrica para decorar telas hechas con corteza de árbol que les sirve como vestimentas rituales. En sus representaciones expresan la vida, el silencio, el movimiento y las formas que encuentran en su entorno cotidiano.

Los mbuti han vivido en la Selva de Ituri durante muchos años, e incluso se estima que podrían ser los habitantes más tempranos de África. La principal referencia a ellos se encuentra en un documento egipcio que hace referencia hacia su territorio, de alrededor del año 2500 a.C., en el que se alude a los Mbuti como la “población general de los árboles” y se les presenta como individuos que cantan y se mueven.



Figura 28. Paños de corteza pintados por los mbuti. Colección particular.

Para los mbuti, el bosque es sagrado. Ellos se sienten hijos del bosque y es éste la fuente de su existencia por ello los mbuti le hablan y le cantan al bosque con devoción y alegría. Cantan canciones sin letras, simplemente cantadas para despertar al bosque y alegrarlo con la belleza del sonido.

Los hombres preparan el paño de corteza con la capa interior de la corteza de unas seis especies diferentes de árboles que machacan con un mazo de marfil o madera. Después son las mujeres quien preparan los tintes y pinturas utilizando raíces, frutos y hojas que recogen en el bosque. La pintura se aplica con ramas, hilos o con los dedos (véase las figuras 28 y 29).



Figura 29. Paños de corteza pintados por los mbutis. Colección particular.

Las pinturas en los paños conceptualizan el mundo de los mbutis; son expresiones abstractas de los estados y las características de los bosques. Las artistas transforman la geometría fractal de los árboles, las hojas plegadas, las modulaciones sutiles de sonidos de insectos, etc. en un lenguaje visual único. Las artistas combinan motivos animales con formas geométricas que dan una impresión de movimiento, sonido y relieve dentro del paisaje forestal.

Actualmente hay claras reminiscencias a estas formas de representación en pintores contemporáneos. Es el caso del pintor catalán Joaquim Chancho. Su pintura está muy relacionada con los movimientos internacionales de abstracción geométrica y minimalismo. Su obra es a la vez rica, pura, rítmica e intensa. El rigor de la línea recta y de la geometría, así



Figura 30. Grabados. 2006. Joaquim Chancho

como la riqueza de las texturas que emplea evocan el arte de los mbuti (véase la figura 30). Cabe destacar que la obra de Chancho forma parte de importantes colecciones nacionales e internacionales, entre las que destaca las del Stedelijk Museum de Amsterdam, el Museo de Arte Contemporáneo de Barcelona, Fundación Juan March de Madrid, Centro Atlántico de Arte Contemporáneo de Las Palmas y la Fundación La Caixa de Barcelona.

Otra manifestación artística del África primitiva y cuyas figuras sorprenden por su geometría es la cultura de Nok, que apareció en Nigeria aproximadamente en el año 500 a.C y



se desvaneció al final del primer milenio de nuestra era, sin que se haya encontrado una explicación razonable, quizá por alguna epidemia o por alguna hambruna. Las investigaciones acerca de la estructura social de la cultura de Nok la considera extremadamente avanzada, a pesar de su situación relativamente alejada de otras grandes culturas, y que el resto de África Occidental estaba, en esas fechas, asimilando el Neolítico.

Las piezas de arte que se han preservado a través del tiempo, casi todas incompletas, son terracotas de una elegancia espectacular, descubriendo un alto grado tecnológico y artístico, tanto en el modelado de la arcilla como en la cocción de la cerámica. Los temas son generalmente figurativos y representan lo que parecen ser líderes, antepasados, estelas funerarias o amuletos (véase la figura 31). Este exquisito legado es el que ha hecho famoso a esta misteriosa estirpe de artistas, conocidos en todo el mundo por las figuritas tanto masculinas, como femeninas estilizadas con posturas muy variadas, portando numerosas joyas y con la cabeza desproporcionadamente grande, cuyos peinados están meticulosamente detallados.

Las figuras suelen aparecer rotas, ya que proceden de estratos aluviales formados y destruidos por la erosión de arroyadas esporádicas. Las terracotas suelen estar sepultadas, erosionadas, rodadas y rotas.

Es de destacar la geometría de los ojos y su entorno. Así, el modelado de los ojos sigue un arco en el párpado superior, superpuesto a un triángulo invertido cuyo vértice es el párpado inferior y en cuyo centro se inscribe un círculo. Esa geometría puede desarrollarse partiendo del centro de la pupila y del radio del iris, tal como puede apreciarse en la figura 32.

En muchas de las terracotas Nok también se da la

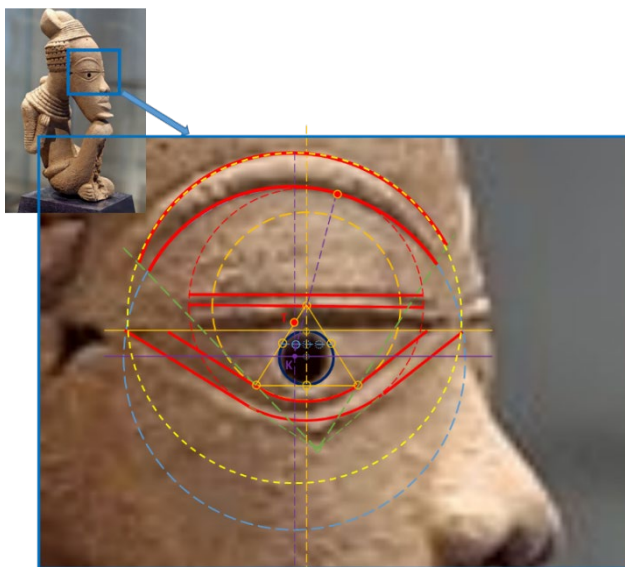


Figura 32. El Pensador (Cultura Nok). Geometría de elaboración propia.



Figura 31. El Pensador (Cultura Nok). Año 298 a.C. Actualmente se encuentra expuesta en la Sala Renacimiento del Palacio de Santa Cruz de Valladolid, dentro de las colecciones de la Fundación Alberto Jiménez-Arellano Alonso.

circunstancia curiosa de existir proporcionalidades como las ya comentadas en epígrafes anteriores, por ejemplo, hay una relación entre la magnitud del cuerpo de la figura y la de su cabeza, de forma que la cabeza tiene como longitud el segmento áureo de la longitud total de la escultura. Lo más curioso es que existen muchas dudas de que en la época en la que existió la cultura Nok y en ese recóndito lugar de África alguien conociera algo acerca de las proporciones áureas; más bien cabe pensar que las mujeres artistas creadoras de estas hermosas piezas encontrarán belleza en esas

proporciones simplemente por el efecto estético intrínseco que producían. Véase las figuras 33 y 34.

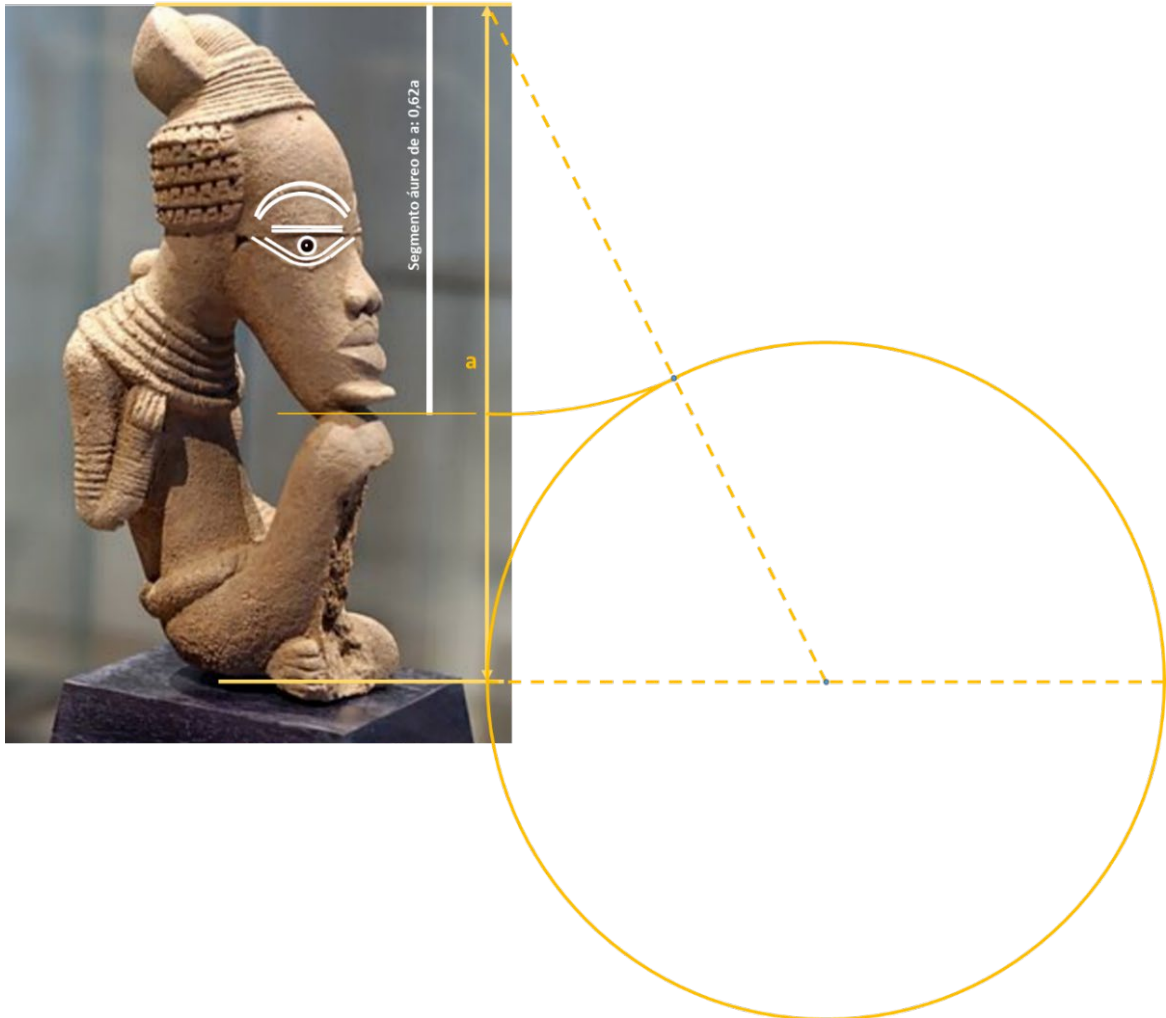


Figura 33. El Pensador Nok con las construcciones geométricas asociadas a la relación entre la altura total de la escultura y la longitud de la cabeza. Elaboración propia.

Siguiendo en el continente africano hay que destacar también las esculturas misteriosas cercanas al río Cross. Este es un importante río costero del África occidental, que discurre por Camerún y Nigeria. Corre en su mayor parte por el sudoeste de Nigeria, donde atraviesa y da nombre al homónimo Estado de Cross River, en la frontera con Camerún. En esa zona se producen los Akwanshi (véase la figura 35), se trata de Monolitos esculpidos en la región de Ikom (Cross River) en Nigeria.

Los monolitos están esculpidos en roca basáltica. Se considera que son monumentos funerarios de reyes con atributos divinos. Su tamaño varía entre los 30 cm y los 2 metros de alto y tienen rasgos humanos: ojos, nariz, boca, barba y marcas tribales. La mayor parte de las esculturas tienen un ombligo prominente. Se dan en lo que hoy son las regiones de los municipios de Ogoja, Ikom y Oburra.

Los monolitos han sido tradicionalmente ignorados, aunque recientemente se han incluido en la WMF (World Monuments Fund's) – lista de sitios en peligro de extinción - y se quiere incluir en la lista de sitios que son patrimonio mundial por la UNESCO.

Hay estudios arqueológicos que estiman para ellos una edad de 4.500 años, lo que indicaría una antigüedad como las pirámides de Egipto, incluso hay quien sostiene que estos monolitos tienen 450.000 años. La WMF dice que las piedras datan de 2.000 años antes de Cristo, pero eso no está claro.

Los monolitos Ikom con sus inscripciones geométricas podrían ser la respuesta del Oeste de África al Stonehenge británico.

Historiadores más modernos dicen que las más antiguas de las 300 piedras erigidas en el pueblo de Alok fueron talladas probablemente a partir del siglo XVI.

Es relevante comprobar cómo éstas figuras primitivas han podido servir de inspiración para los artistas contemporáneos. Son muchos los ejemplos, como es el caso de los cuadros realizados por los

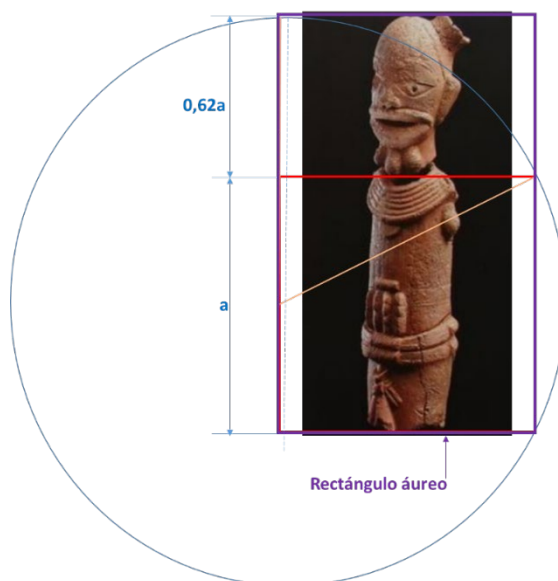


Figura 34. Terracota Nok con las construcciones geométricas asociadas a la relación entre la altura del cuerpo de la escultura inscrito en un cuadrado y la longitud de la cabeza que completa el rectángulo áureo. Elaboración



Figura 35. Akwansi, donde pueden apreciarse la simetría y las inscripciones geométricas a lo largo del cuerpo y cabeza. Colección particular.



creadores del Orfismo, Robert y Sonia Delaunay, o Léger, Kupka y Picabia. En ellos se puede apreciar la reminiscencia Akwanshi al fijarnos en los círculos concéntricos (véase las figuras 36 y 37).

El Orfismo es una especie de cubismo que va hacia la abstracción total, donde los colores y la luz toman forma y movimiento como si fueran música. Es la representación del ritmo que llevan dentro todas las cosas, la esencia de la vida.

El nombre es propuesto en 1913 por el poeta Apollinaire, un teórico además de las cuestiones estéticas. Define a esta nueva corriente como “el arte de pintar conjuntos nuevos con elementos no tomados de la realidad visual, sino totalmente creados por el artista y dotados por él de una poderosa realidad.

Es arte puro”. Apollinaire lo llama “orfismo” haciendo referencia a Orfeo, el personaje mitológico que toca la lira de manera tan conmovedora que logra verdaderas hazañas. Representa la conjunción de la música y la poesía (justamente, la palabra “lirismo”, que usamos como sinónimo de poesía, viene de la palabra “lira”).

El orfismo, además de un antecedente de la pintura abstracta, es precursor también del arte

óptico. El uso de los colores en contrastes simultáneos (el simultaneísmo) hace que se generen vibraciones ópticas y así se produzca un efecto de movimiento.

Robert Delaunay (el representante más importante del orfismo junto a su esposa Sonia), explica que la idea del orfismo es “una pintura que no tiene técnicamente más que color, contrastes de color, pero que se desarrollan en el tiempo y se perciben simultáneamente, de un solo golpe”.

Hay otros autores modernos, como Sgrasse, que también utilizan reminiscencias de los Akwanshi.



Figura 36. Dos vistas de un Akwansi, donde pueden apreciarse la simetría y las inscripciones geométricas a lo largo del cuerpo y cabeza. Colección particular.



Figura 37. Akwansi, donde se han resaltado los círculos concéntricos que inspiran el cuadro abstracto de Sonia Delaunay (arriba a la derecha) y el de Sgrasse (abajo a la derecha) pueden apreciarse la simetría y las inscripciones geométricas a lo largo del cuerpo y cabeza. Colección particular.

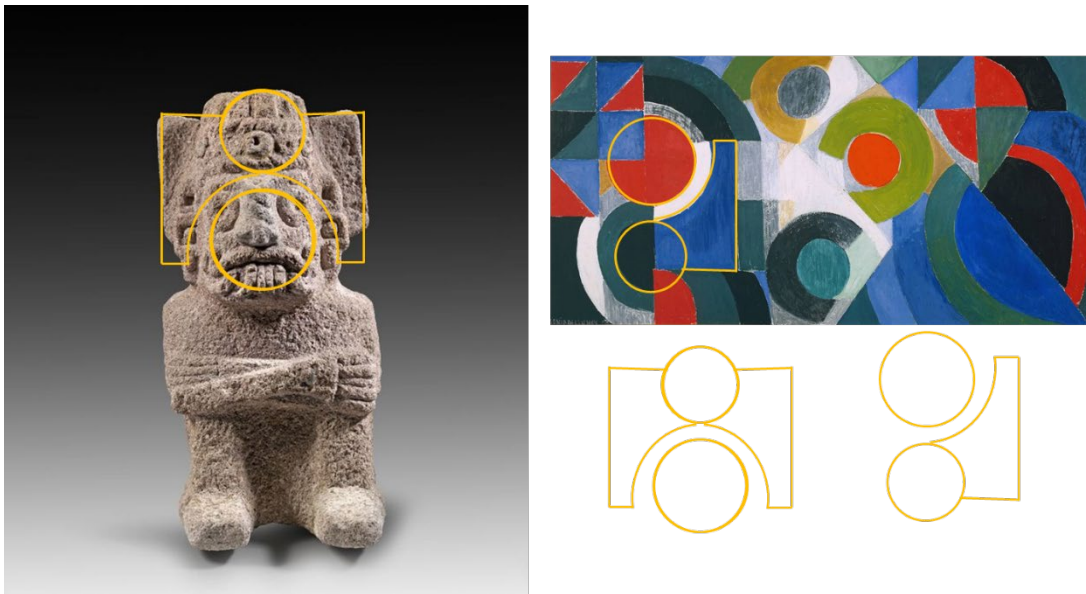


Figura 38. Arriba a la derecha tríptico de Sonia Delaunay. Obra de 1963 expuesta en el Tate Museum de Londres. Se han remarcado los dos círculos, junto con el polígono mixtilíneo adyacente para hacer la composición que se adapta a la cabeza de la Figura antropomorfa de 950-1200 d.C. correspondiente a la Cultura Mixteca.

En Mesoamérica también podemos encontrar reminiscencias primitivas para las obras típicas del morfismo. Así, se pueden observar las composiciones del arte Mixteca, que tuvo sus primeras manifestaciones en el periodo preclásico medio mesoamericano (siglo XII a.C – siglo XX a.C.) y concluyó con la conquista española en las primeras décadas del siglo XVI. El territorio histórico de este pueblo es la zona conocida como La Mixteca, una región montañosa que se encuentra entre los actuales estados mejicanos de Puebla, Oaxaca y Guerrero. En la figura 38 se puede observar como los dos círculos junto con el polígono mixtilíneo se puede transformar mediante un giro de 180 grados y una copia simétrica en una composición que encaja perfectamente con la cabeza de la figura antropomorfa de la cultura mixteca.

Sin salir de Mesoamérica, hay que destacar la geometría en el arte de Chupícuaro. Esta zona arqueológica prehispánica se localizó en la rivera del río Lerma, en una zona entre las ciudades actuales de Acámbaro y Tarandacuao, en el estado de Guanajuato, México. En los años de 1946 y 1949, debido a la construcción de una presa, se realizaron exploraciones y descubrimientos de objetos de cerámica y tumbas. Actualmente el lugar se encuentra debajo de las aguas de la Presa Solís, aunque existen zonas a los alrededores que siguen siendo exploradas.

De acuerdo con varios autores, se estima que este asentamiento tuvo lugar entre 500 a. C. a 300 d. C. Esta cultura tiene mucha importancia por la influencia que ejerció y que tuvo en la zona. Es

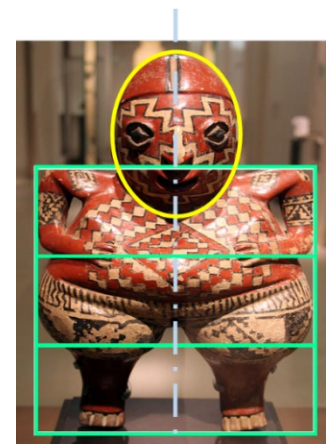


Figura 39. Figura femenina de terracota de Chupícuaro. Siglos VII-II a.C. Museo del Louvre. Geometría de elaboración propia.

posible que se extendió hasta el sur de Estados Unidos, 500 años a.C. Existen teorías de que los primeros habitantes de Guanajuato pertenecieron a esta cultura.

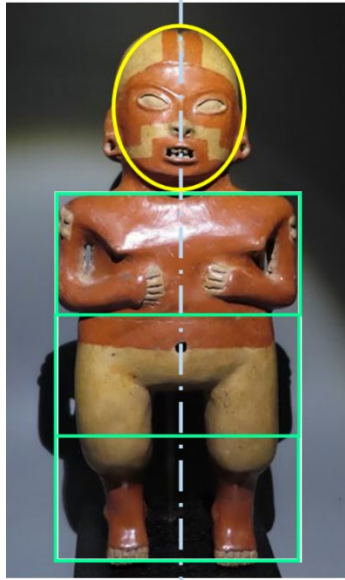


Figura 40. Figura femenina de pie en Terracota. Arte de Chupícuaro, Guanajuato, México. 400 a. C. - 100 d. C. Colección particular, Barcelona. Geometría de elaboración propia.

Esta cultura destacó por ser un gran centro alfarero, probablemente uno de los mejores de Mesoamérica, que produjo cerámicas de fino acabado y múltiples formas y colores, predominando las decoraciones con motivos geométricos. Los motivos eran deidades, maternidad, lactancia, personas y sus ornamentos, animales y plantas. Del estudio de los estilos de las cerámicas, se infiere el tipo de vestimenta que vestían, la pintura corporal y facial que aplicaban, así como diversos adornos como collares, orejeras, narigueras o pendientes.

Las figuras tienen ricos colores con angulosas formas geométricas.

Una postura amplia, con énfasis en los muslos, los pies con los dedos delineados, las manos pegadas al pecho debajo del pecho, a veces bultos de escarificación en la parte superior de los brazos, el rostro con una expresión a veces tranquila y a veces bastante feroz.

horizontal. Los miembros inferiores están ligeramente definidos. (Véase las figuras 39 y 40).

Además de los detalles geométricos que se pueden apreciar en la decoración que cubre las cerámicas, en muchos casos por completo, hay una característica proporcionalidad que se repite de forma generalizada y es un encuadre rectangular entre hombros y pies, divisible en tres partes iguales para encajar torso; caderas y muslos; y piernas. La cabeza tiene forma de óvalo y el cuerpo tiene un eje de simetría vertical en todos los casos.

Se pueden encontrar secuencias rítmicas y geometrías en la obra artística de algunos contemporáneos. Es el caso de las esculturas del artista chileno afincado en Italia Agustín Alberto Olavarría. En la obra representada en la figura 41 se puede apreciar el rectángulo modular del cuerpo y la parte ovalada de la cabeza que recuerda a las cerámicas figurativas de Chupícuaro.

La tradición de las figurillas de Chupícuaro se caracteriza por su fino modelado y especialmente por sus enigmáticos rostros en los que se estilizan los ojos, presentes como grandes rendijas que le dan un aspecto oriental. Suelen ser figuras femeninas como la gran mayoría de esta tipología, y tienen los brazos colocados debajo del pecho. El cabello se recoge adornado con una banda



Figura 41. Agustín Alberto Olavarría. Figura geométrica de pie en madera. 2008. 28/150. Colección particular.



### 2.2.4 De nuevo con los ritmos, arte y geometría de la pintura contemporánea

También hay ritmo, geometría, matemáticas, incluso se podría decir también que hay poesía en los cuadros de los surrealistas: Max Ernst, Man Ray, René Magritte, Joan Miró, Salvador Dalí, etc. (véase la figura 42).

Sin entrar en el análisis de estos genios de la pintura, merece la pena hacer una parada en la figura de otro artista, el español Luis Caruncho (1929-2016). De sus diferentes estilos artísticos, pero con el cubismo como eje central, dio buena cuenta la exposición del Centro Cultural Conde Duque que llevó por título "Caruncho, postcubismo y atracción geométrica".

Fue su amigo el poeta y crítico de arte José Hierro quien bautizó la obra de Caruncho como "geometría poética".

A través de la muestra del Conde Duque, de las 50 obras, se pudo apreciar la evolución de una que figura en la estela de Malevich y Mondrian, pero también de Pablo Palazuelo y Rafael Canogar, de Ben Nicholson y la Bauhaus, según Fernández-Cid. "No le interesan tanto las imágenes como el pulso que hay tras ellas, lo que plantean".

Hay una obra de Caruncho de extraordinaria fuerza y grandeza, se trata del cuadro denominado Azul sobre azul (véase la figura 43), título del que surgieron múltiples variaciones, pero todas con igual fulgor. Tampoco debe obviarse la intromisión del papel de periódico y del cartón, ni la escultura Metamorfosis nº 8, de acero cortén autooxidado (véase la figura 44).

Rafael Canogar dijo de él: "Fue un trabajador inagotable, como lo fue su inspiración. Tenía algo de artista secreto, con innata facilidad para crear, para concebir sus obras, para diseñar, pero siempre desde un distanciamiento". Caruncho decía de sí mismo: "hay pintores constructivistas más rigurosos que yo, que son decididamente más fríos; yo soy menos riguroso, pero en mis obras palpita más la vida, son más cálidas".

En la figura 44 se ve dibujados sobre la escultura una serie de polígonos con lados comunes y de forma que siguen una serie numérica 3, 4, 5, 6, 7, 8.

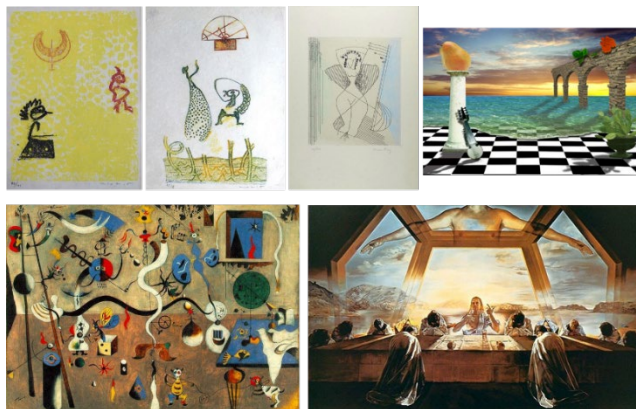


Figura 42. Cuadros de Max Ernst (los dos de arriba a la izquierda), Man Ray, Magritte, Miró y Dalí, donde se pueden observar multitud de detalles geométricos.

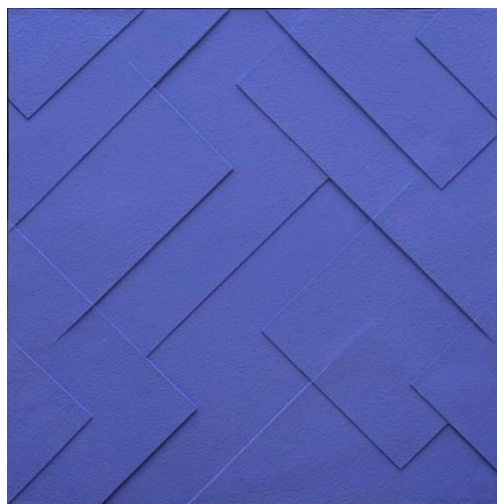


Figura 43. Azul sobre azul. Luis Caruncho. Colección particular.

La serie numérica comentada suma el número 33, que es precisamente el anterior al 34. Es precisamente el número 34 el denominado número mágico de Durero por aparecer en el grabado que el autor llamó Melancolía I (véase la figura 45). Se trata de un grabado del pintor del Renacimiento alemán Alberto Durero. Es considerada la imagen más misteriosa diseñada por Durero y se caracteriza, como muchas de sus obras, por su iconografía compleja y su simbolismo.



Figura 44. Escultura Metamorfosis nº 8, de acero cortén autooxidado. Luis Caruncho. Sobre la escultura se han dibujado polígonos regulares que siguen la secuencia 3, 4, 5, 6, 7, 8. Elaboración propia. Colección particular.





Figura 45. Grabado *Melencolía I*, del pintor del Renacimiento alemán Alberto Durero. 1514.

Esta composición alegórica, considerada una de las estampas más famosas de los antiguos maestros, ha sido objeto de más interpretaciones modernas que casi cualquier otra imagen en arte. José Pijoan afirmó “no hay otra imagen humana tan saturada de pensamiento”, refiriéndose a la obra.

Se trata de una de las denominadas estampas maestras de Durero. Las estampas fueron realizadas entre 1513 y 1514 y son la culminación de su trabajo como grabador. Se ha interpretado como autorretrato en clave simbólica, que presentan la imagen que Durero tiene

de sí mismo como artista de carácter melancólico. A su vez, el grabado simbolizaría la esfera intelectual, dominada por el planeta Saturno, según la tradición astrológica ligado al sentimiento de la melancolía, constituyendo una conexión entre el mundo racional de las ciencias y el imaginativo de las artes.

Se ha sospechado que Melancolía I habría sido concebido bajo el sentimiento de duelo por la pérdida de su madre. Incluso se ha dicho que los números del cuadrado mágico que aparece en la parte superior derecha de la obra contendrían una referencia secreta a la fecha del fallecimiento.

En cuanto al contenido de la imagen y su simbolismo se puede comentar lo siguiente: la imagen central y más importante es una figura alada pensativa, que puede ser considerada un ángel, sentada en el suelo y con el rostro ensombrecido. Esta dama apoya su cabeza – coronada de hierbas y con el cabello despeinado – en su puño izquierdo, mientras que con la otra mano sostiene un compás. Del cinturón cuelgan un conjunto de llaves revueltas.

A su lado se encuentra un putto (mediador entre la esfera terrenal y celestial), apoyado en una piedra de molino, que escribe o dibuja sobre una tablilla.

En la parte inferior se encuentra un perro famélico, animal que se encuentra también en otros grabados de Dürero, durmiendo a los pies del personaje principal. Aunque tradicionalmente el perro simboliza la lealtad, aquí un perro puede representar la melancolía o la locura.

En el suelo, hay varios útiles de carpintería (martillo, cepillo, clavos y sierra) y arquitectura (un tintero y una pluma) que se encuentran desordenados.

En el grabado hay muchos elementos relacionados con la geometría, la aritmética y la medida del tiempo. Sobre el muro hay una esfera de madera torneada, un poliedro truncado de cristal formado por pentágonos irregulares y triángulos (en que se puede apreciar un rostro humano difuminado), una regla, un reloj de arena, una balanza y un cuadrado mágico de 4x4. También hay una campanilla y una escalera de siete peldaños, que asciende hasta una torre o edificio que no se vislumbra su final.

En el fondo se puede ver un poblado. Hay un contraste entre la sombra que proyecta la Luna sobre los objetos y el brillo de un cometa, que se encuentra encerrado en un arco iris (se ha considerado como símbolo de la reconciliación y de la alianza entre Dios y los hombres).

Al fondo hay un murciélago sosteniendo una cartela con el texto “Melencolia I”, el título del grabado.

El grabado ha tenido mucha repercusión en distintas manifestaciones artísticas posteriores. Así, por ejemplo, Gottfried Keller, inspirado por la obra de Dürero, escribió el poema Melancholy. En su estrofa última, el poeta sugiere la forma de un ángel como la encarnación artística de la fantasía.

Inicialmente el filósofo Jean-Paul Sartre tenía la intención de titular su novela La náusea como Melancolía I, haciendo referencia a este grabado.

Thomas Mann sentía especial atracción por uno de los numerosos símbolos que aparecen en el grabado de Dürero: el cuadrado mágico. En la novela Doktor Faustus el protagonista, Adrián Leverkühn, cuelga dicho cuadrado sobre un piano alquilado.

El ensayo de Günter Grass titulado *Del diario de un caracol* termina con el discurso sobre el grabado de Durero en la exposición que titula “La inmovilidad en el progreso”, en la que se dice: “Sólo quien conoce y cumple la inmovilidad en el progreso, quien ha cedido una vez, varias veces, quien ha estado en el caparazón vacío del caracol y ha frecuentado el lado oscuro de la utopía, es capaz de medir el progreso”.

En su obra *Sor Juana Inés de la Cruz o las trampas de la fe*, el escritor mexicano y Premio Nobel de Literatura (1990), Octavio Paz, establece una relación entre el poema de sor Juana, *Primero sueño*, y el grabado de Durero, *Melancolía I*. Para Paz, el poema y el grabado refieren al mismo acto: al de conocer, pues su tema es el mismo: la contemplación de la naturaleza y la desazón del espíritu. El escritor mexicano propone que ambas obras son confesiones intelectuales de sus autores. Tanto *Primero sueño* como *Melancolía I* refieren al mismo número porque es sólo la primera fase de una imagen intelectual que, por abrirse hacia lo inacabado, dibujan la misma figura: la interrogación.

La banda alemana de metal sinfónico Haggard incluyó el grabado en la portada de uno de sus álbumes en 1997. El disco está basado en la vida y obra de Michel de Nôtre-Dame en la época de la peste negra.

En la novela de ficción *El símbolo perdido* (2009), Dan Brown analiza los posibles enigmas que encierra la estampa, en especial su cuadrado mágico, que les servirá para descifrar la leyenda de la pirámide Masónica.

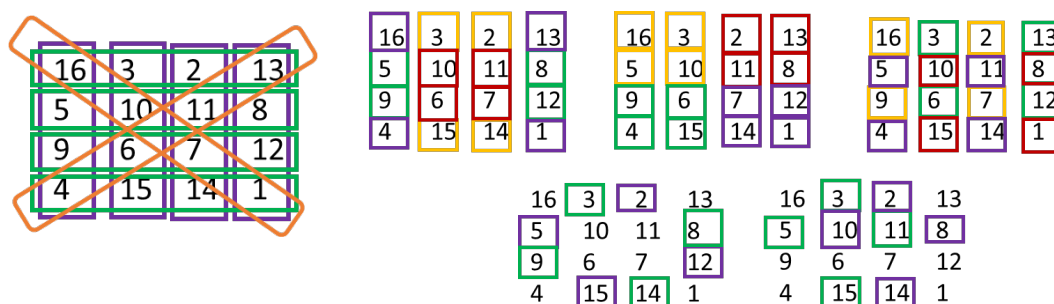


Figura 46. Disposiciones para la obtención del número mágico 34 como suma en las filas, columnas, diagonales principales, y en las cuatro submatrices de orden 2.

El llamado cuadrado mágico que aparece en el grabado está considerado el primero de las artes europeas. Es un cuadrado de orden cuatro en el que siempre se obtiene la constante mágica 34 en las filas, columnas, diagonales principales, y en las cuatro submatrices de orden 2 en las que puede dividirse el cuadrado, sumando los números de las esquinas, los cuatro números centrales, los dos números centrales de las filas (o columnas) primera y última, etc. (Véase la figura 46). Curiosamente las dos cifras centrales de la última fila, 1514, son el año de ejecución de la obra.

### 2.2.5 Arte y geometría en la arquitectura

Mucho se ha escrito de los rasgos dominantes del arte y la arquitectura islámica, la importancia de la composición espacial y la decoración geométrica tanto de la mezquita de Córdoba como de la Alhambra de Granada.



Figura 47. Detalle decorativo de las teselas de cerámica en forma de pajarita utilizada en los baños de Comares en la Alhambra de Granada.

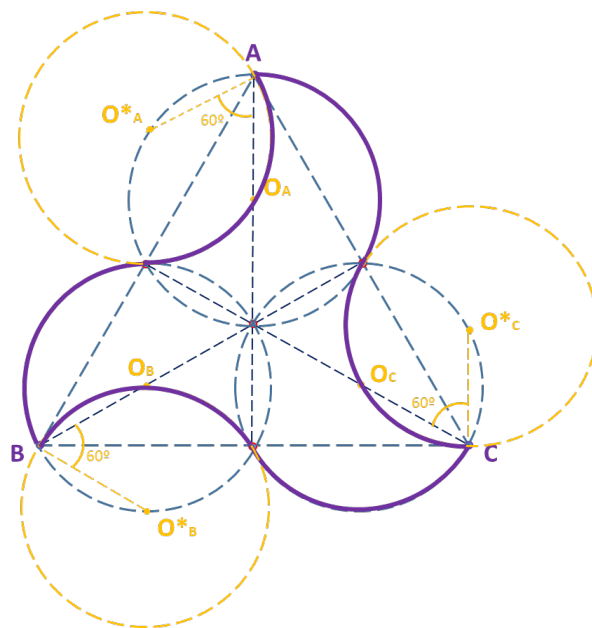


Figura 48. Detalle del proceso geométrico para la obtención de la pajarita.

El culto islámico dio lugar a dos tipos de construcciones de carácter religioso: la mezquita, el recinto donde la comunidad se reúne para la oración, y la Madraza o escuela coránica. En la arquitectura civil, destacan los palacios y las ciudades, planificadas de acuerdo a la necesidad de canalizar el agua y proteger al pueblo contra el calor.

Una de las manifestaciones artísticas que alcanzó mayor esplendor dentro del arte islámico fue la cerámica, en la cual se puede observar un grado de creatividad e innovación comparable a las artes plásticas de otras culturas.

En este artículo no se entrará en el análisis estético y geométrico de las impresionantes edificaciones que son la mezquita de Córdoba y la Alhambra de Granada, pero si, en algunos detalles, por ejemplo, en el proceso geométrico para la obtención de la denominada “pajarita nazarí” (véase la figura 47), como muestra de sus avanzados conocimientos en el arte geométrico.

La geometría de la pajarita que constituye cada una de las teselas del mosaico es muy interesante, ya que no es un proceso trivial. Se parte de un triángulo equilátero ABC como patrón base; se dibujan las tres circunferencias que tienen por diámetro el segmento definido por el centro del triángulo y cada uno de sus vértices. Estas circunferencias determinan los arcos convexos de la pajarita. Después, al rotar cada una de estas circunferencias 60°, con centro de



rotación para cada circunferencia el vértice por el que pasan, y en sentido de rotación horario, esas circunferencias rotadas determinarían los arcos cóncavos de la pajarita (véase la figura 48).

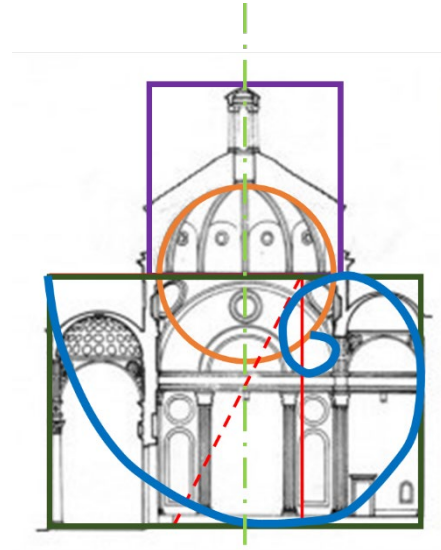


Figura 49. A la izquierda la fachada de la Capilla Pazzi en Florencia. 1429. Obra de Filippo Brunelleschi. A la derecha encuadres geométricos de la obra. Elaboración propia.

Con el fin de dar alguna otra pincelada sobre el arte y la geometría en manifestaciones arquitectónicas, se muestran a continuación dos ejemplos representativos: por un lado la capilla Pazzi en Florencia, obra de Filippo Brunelleschi (véase la figura 49); y por otro lado, La Basílica de San Zenón (en italiano, Basilica di San Zeno, también conocida como San Zeno Maggiore) (véase la figura 50) es el edificio religioso más conocido de Verona, en la Italia septentrional. Su fama descansa en parte en su arquitectura, y en parte en que según la tradición su cripta fue el lugar donde se casaron Romeo y Julieta. Está bajo la advocación del santo Zenón de Verona.

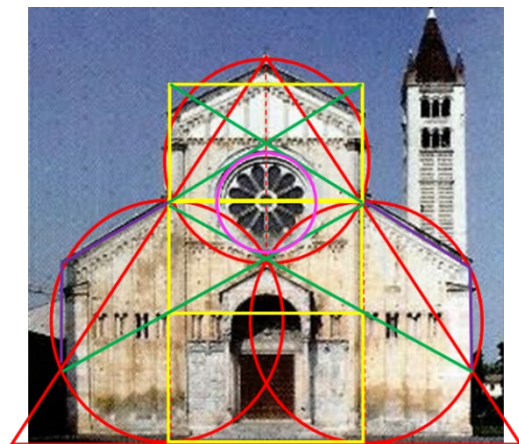


Figura 50. A la izquierda la fachada de la Basílica de San Zenón en Verona. A la derecha construcciones geométricas que la enmarcan. Elaboración propia.

Si se hace un corte paralelo a la fachada conteniendo a su eje de simetría se puede observar varios elementos geométricos, tales como un rectángulo áureo (en color verde); un cuadrado (en color morado); un círculo (en color naranja). El cuerpo total de dicha sección está inscrito en

el cuadrado y rectángulo áureo, las dos figuras están unidas por un círculo donde está inscrita la cúpula. Además, las proporciones siguen la sucesión de Fibonacci, pudiendo inscribir en la sección la espiral de Durero. En ésta obra se puede visualizar el interés de Brunelleschi en el empleo de los módulos matemáticos y en las distintas fórmulas geométricas que se usaron para crear las plantas y las elevaciones que cumplen el objetivo del artista de que todo tenga armonía. Para la creación de la Capilla Pazzi, Filippo Brunelleschi recurre a estas figuras perfectas para expresar el significado de esta capilla, por ejemplo, usa los cuadrados (para reflejar al hombre) y los círculos (para reflejar lo divino).

En la interesante geometría que enmarca la fachada de la Basílica de San Zenón sorprenden los tres rectángulos de color amarillo en la figura que evocan a la misma división que se observa en las cerámicas de la cultura de Chupicúaro como las reproducidas en las figuras 39 y 40 del presente artículo.

### 3. Ritmos, arte y geometría en la fotografía

La fotografía es otra forma visual de mostrar la realidad, en éste caso desde los ojos del fotógrafo, que nos permite encontrar ritmos, silencios y armonías manejando formas, figuras, geometrías y otros elementos de la composición, eligiendo el punto de vista adecuado según el efecto que quiera conseguir. En la figura 51, por ejemplo, la fotógrafa Dasha Pears, muestra una imagen tomada en Zúrich, Suiza, en 2018.

Dasha Pears es una galardonada fotógrafa rusa de bellas artes conceptuales que actualmente reside en Helsinki, Finlandia. Las obras de Dasha se han exhibido en Rusia, Francia, Polonia, Austria, Italia, España y Finlandia. Las fotografías de Dasha se pueden encontrar en portadas de libros publicados en Europa, Estados Unidos y América del Sur.

Se muestran a continuación algunas fotografías del fotógrafo Wiepke Folkerts (véase las figuras 52, 53, 54, 55 y 56). Para él, en un mundo donde el tiempo y la tranquilidad son una rareza, deja que sus imágenes fotográficas fusionen inquietud y dinámica en una unidad, reduciéndolas a un ritmo que los humanos pueden captar.



Figura 51. Dasha Pears . fotografía titulada Geometrias. Impresión de prueba de artista (AP) de 85 + 1AP en papel Fuji Crystal Silk Archive.

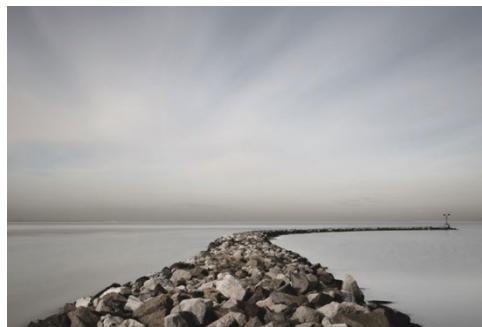


Figura 52. Wiepke Folkerts – Fotografía titulada Breakwater. Tamaño 30 x 45 cm. Colección particular.



Figura 53. Wiekpe Folkerts – Fotografía titulada No Boat. 30 x 30 cm. Colección particular. Elaboración propia de la línea de horizonte y las alineaciones.

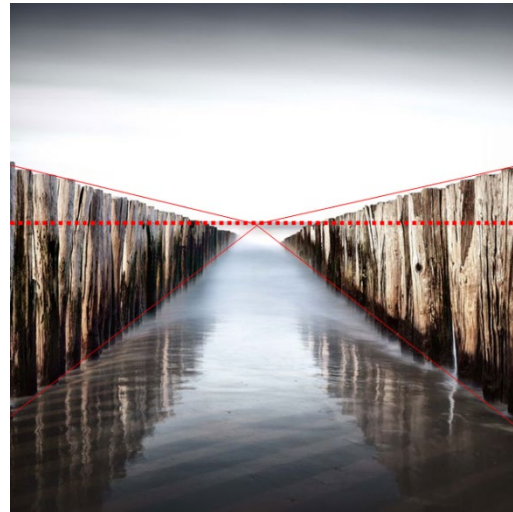


Figura 54. Wiekpe Folkerts – Fotografía titulada Two Rows. 40 x 40 cm. Año 2017. Colección particular. Elaboración propia de la línea de horizonte y las alineaciones.



Figura 55. Wiekpe Folkerts – Fotografía titulada Bridge #1s. 26 x 46 cm. Año 2017. Colección particular. Elaboración propia de la línea de horizonte y las alineaciones.

Para ello utiliza largos tiempos de exposición. El vacío, el silencio y la armonía atemporal de imágenes costeras quedan plasmados en una imagen. En ese vacío hay elementos u objetos hechos por el hombre que han surgido de la función que les ha tocado cumplir y por lo tanto adquieren una singularidad y una belleza que no aburre, sino que puede llegar a fascinar. En algunas de ellas se ha marcado las alineaciones rectas (en línea roja de trazo continuo)



correspondientes a las paralelas que se encuentran en los puntos de fuga, así como la línea de horizonte, que pasa por dichos puntos y es paralela al suelo (en línea roja de trazo discontinuo).



Figura 56. Wiepke Folkerts –Dos imágenes de la serie "Stills": La Route; Silence

El mismo autor se recrea en espacios infinitos. En sus fotografías de caminos, se puede observar que un paisaje se desarrolla y cambia con el tiempo. El fotógrafo captura un momento al fotografiarlo, una instantánea como un fotograma de una película. Una imagen sin pasado, una imagen sin futuro, solo presente. Un paisaje está en movimiento, pero el fotógrafo quieto, crea un momento de paz y quietud. Su serie 'Stills' trata sobre esa calma y quietud con imágenes que contienen poco o ningún estímulo, para permitir una experiencia más profunda. Son partes del paisaje con su propia intimidad y carácter. Es un reflejo de la forma en que el fotógrafo experimenta el paisaje, pero también ofrece al espectador una interpretación única y la oportunidad de pensar en las cosas esenciales de la vida. La fotografía parte de observar la realidad, las fotos no son una representación exacta de ella, es la interpretación del fotógrafo, su perspectiva y por lo tanto reflejan una parte de él.

Su inspiración proviene de otros fotógrafos relevantes, como son Michael Kenna, Michael Levin y Josef Hoflehner.

En la imagen de la derecha de la figura 56 se observan los árboles del borde derecho del camino en su configuración geométrica fractal y al fondo otros cinco árboles dispuestos en sentido transversal a la vía como si de notas musicales se tratara en un pentagrama musical.

Aunque no se trate de una fotografía, algunos artistas juegan en sus obras con la visión del que mira como si de una fotografía se tratara, estableciendo distintos puntos de vista para el espectador, creando sensación de movimiento y dando un cierto ritmo a la obra. Eso se puede apreciar en la imagen de la figura 57. En ella el autor crea un espacio visual con dos puntos de vista diferentes, estableciendo por lo tanto dos líneas de horizonte distintas, lo que crea una sensación que modifica el espacio de silencio de la obra. Este trabajo geométrico está hecho de cerámica. Es un juego de líneas apretadas en el relieve que, además crea un hermoso efecto de sombra ligera.



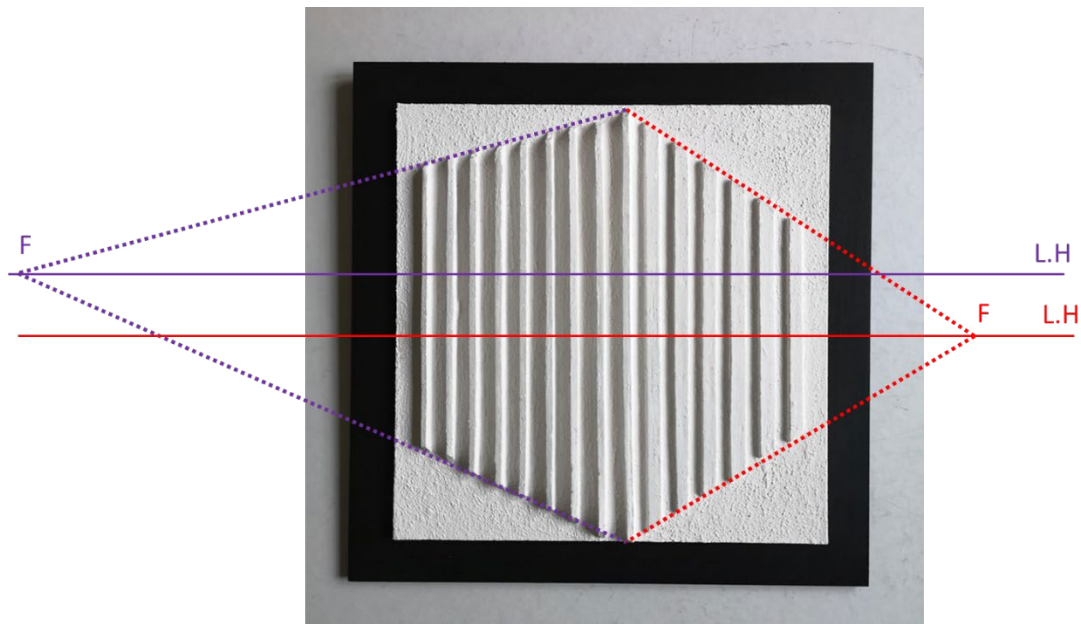


Figura 57. Lisanne Lammers. Relieve blanco "Rayas" n° 3. Escultura mural de cerámica. Las dimensiones son 35 x 35 x 2 cm. Colección particular. En azul se han dibujado las alineaciones correspondientes a un punto de fuga y su línea de horizonte. En rojo las correspondientes a otro punto de fuga y su línea de horizonte. Elaboración propia.



Figura 58. Carla Suter Sardo. Fotografía titulada Geometría perfecta. Dimensiones: 70 x 70 cm. Colección particular. Se ha dibujado sobre ella el contorno de las nubes, la montaña, la silueta del cuerpo y la silueta del vestido. Elaboración propia.

Hay fotografías que invitan al espectador a ver geometrías en las figuras y elementos que la constituyen. Así, en la fotografía de la figura 58, se ha dibujado el contorno de varios elementos de la imagen, todos ellos constituyendo una secuencia de formas semejantes que

dotan a la obra de ritmos en medio del silencio del entorno desértico en el que se enclava el personaje.

Esta misma técnica de jugar con las formas que enmarcan las figuras de la imagen ya las utilizó en su momento en sus cuadros ese extraordinario artista que fue Cézanne (1839 – 1906).

Desde el Renacimiento, casi todos los cuadros habían obedecido a una convención –el punto de fuga de la perspectiva-. Se trataba de un sistema geométrico para representar la ilusión de realidad, basado en el hecho de que las cosas parecen volverse más pequeñas cuanto más se alejan de nuestro ojo. Una vez conocidas las reglas para representar una perspectiva escénica, las cosas pueden dibujarse en una superficie plana de un papel como si estuvieran en el espacio, en sus dimensiones y posiciones correctas. Para los artistas del siglo XV, la perspectiva era la piedra filosofal del arte; jamás se había inventado una herramienta más poderosa para la composición de la experiencia visual en términos de ilusión; en realidad, la perspectiva en el siglo XV era a veces vista no solamente como una rama de las matemáticas sino como un proceso casi mágico que producía asombro (véase las figuras 59 y 60).

Sin embargo, hay convenciones en la perspectiva. Eso presupone un cierto modo de ver las cosas, y esa mirada no siempre concuerda con el modo en que realmente las vemos. Esencialmente, la perspectiva es una forma de abstracción. Simplifica la relación entre el ojo, el cerebro y el objeto. Es una panorámica ideal, imaginada como si fuera vista por un tuerto, una persona inmóvil que está claramente independizada de lo que ve. Eso convierte al espectador en alguien en quien converge el mundo entero, el observador inmóvil. La

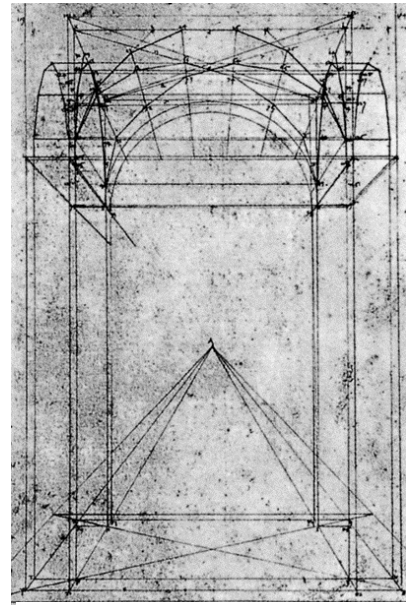


Figura 59. Estudio de perspectiva por Piero della Francesca, 1470.

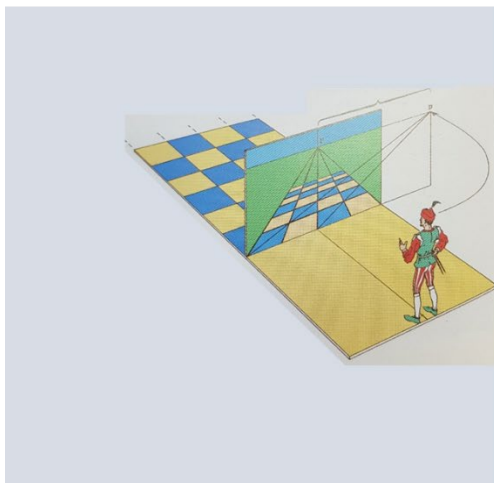


Figura 60. A la izquierda fundamento de la perspectiva cónica en un dibujo, donde se muestra el punto de vista del observador que mira el suelo embaldosado, el punto de fuga, la línea de horizonte y la figura ajedrezada que finalmente ve el observador en el plano del cuadro (el lienzo del dibujo). Fuente: Philippe Comar, *La perspective en jeu*. A la derecha, óleo sobre lienzo, hacia 1860/80, que representa el interior de un café morisco con fumadores en cachimba de una colección particular.

perspectiva reúne los hechos visuales y los estabiliza, lo cual los convierte en un campo unificado. Evidentemente, el ojo es diferente de ese campo, así como el cerebro está separado del mundo que ese órgano contempla.

A pesar de su aparente precisión, la perspectiva es una generalización con respecto a la experiencia. Esquematiza nuestra percepción, pero realmente no representa el modo en que vemos. Miramos un objeto: nuestro ojo nunca está quieto. Parpadea, involuntariamente inquieto, moviéndose de un lado a otro. Tampoco nuestra cabeza está quieta en relación con el objeto; cada momento trae consigo un fraccionario cambio en su posición, lo cual deviene en una minúscula diferencia de aspecto. Cuanto más se mueve uno, mayores son los cambios y las diferencias. Si se lo pido, mi cerebro puede aislar una perspectiva dada, congelada en el tiempo; pero su experiencia del mundo que está más allá de la retina se parece más a un mosaico que a una perspectiva estructurada, un mosaico de múltiples relaciones, ninguna de las cuales (por lo que a la visión se refiere) está enteramente establecida. Cualquier visión es una suma de diferentes atisbos. Y, por tanto, la realidad incluye los esfuerzos del pintor para percibirlos. Ambos, espectador y visión, forman parte de la misma esfera. En pocas palabras, la realidad es una interacción.

La idea de que el espectador influye en la visión se da por sentada actualmente en la mayoría de los campos de investigación científica. El ojo y su objeto habitan el mismo plano, el mismo campo, y uno influye en el otro recíprocamente. A finales del siglo XIX, en general, esa idea no era aceptada como cierta. Sin embargo, hacia 1900, mientras esa idea se desarrollaba en su forma científica en la obra de F.H. Bradley, Alfred North Whitehead y Albert Einstein, también un artista, científicamente analfabeto, desconocedor de la obra de aquellos científicos, viviendo lejos del mundanal ruido, en su retiro del sur de Francia, en Aix-en-Provence, estaba trabajando para explorar esa concepción, dándole una forma estética, y finalmente basando en ella su obra. Se llamaba Paul Cézanne.

Es por eso que todavía hoy sea considerado como el padre de la pintura moderna. “Todos hemos salido de Cézanne”, declaró un día Georges Braque, junto a Fernand Léger y Jacques Villon, dando a entender con tales palabras lo que el gran maestro decía de sí mismo: “yo seguiré siendo el principio del camino que he descubierto”.

En los años de Cézanne en París, algunos estudiosos de su vida afirman que el fantasma azulado de la Sainte Victoire flotaba al borde de su pensamiento y caminaba con él en el horizonte de todos sus paisajes. Pero el fantasma de la Sainte-Victoire no gravita sólo sobre sus paisajes. El pintor André Masson observaba sobre los bodegones de Cézanne: “Mirad estas naturalezas muertas, siguen el consejo de la Sainte-Victoire: son geológicas”. (véase las figuras 61 y 62).





Figura 61. Cézanne. A la izquierda, lechera y manzanas. 1879-1880. Museo de Arte Moderno de Nueva York. A la derecha, La Sainte Victoire, vista desde los Infernets, c.1895. Museo del Hermitage. Se ha dibujado en color rojo, en ambos cuadros, las siluetas del paño blanco y de las montañas en esa obsesión de Cézanne por su paisaje. Elaboración propia.



Figura 62. Cézanne. A la izquierda, Naturaleza muerta con tetera. 1902-1906. Museo Nacional de Gales. A la derecha, el monte Cengle. c. 1904-1906. Foundation E.G. Bührle. Se ha dibujado en color amarillo, en ambos cuadros, las siluetas del paño en el bodegón y en el paisaje exterior. Elaboración propia.

#### 4. Ritmos, arte y geometría en el diseño de moda

En el diseño de moda también es fácil encontrar elementos geométricos, a veces de forma explícita, y otras veces de forma implícita en las proporciones que sugiere el diseño. Se muestra a continuación, en la figura 63, tres dibujos en los que se pueden apreciar dichas relaciones geométricas.

En la primera imagen de la figura se observa el triple encuadre triangular considerando los hombros, el apoyo del bastón y la posición de los pies.

En la segunda imagen, Erté ofrece un diseño en el que la modelo se inscribe desde los pies a su cintura en un cuadrado (en rojo) de forma que la visual de la mirada de dicha modelo se dirige a un vértice del rectángulo áureo (en violeta), asociado al cuadrado anterior. Asimismo,

la disposición corporal de la modelo se adapta a la serpentina de la que se habló en el epígrafe 1.2.

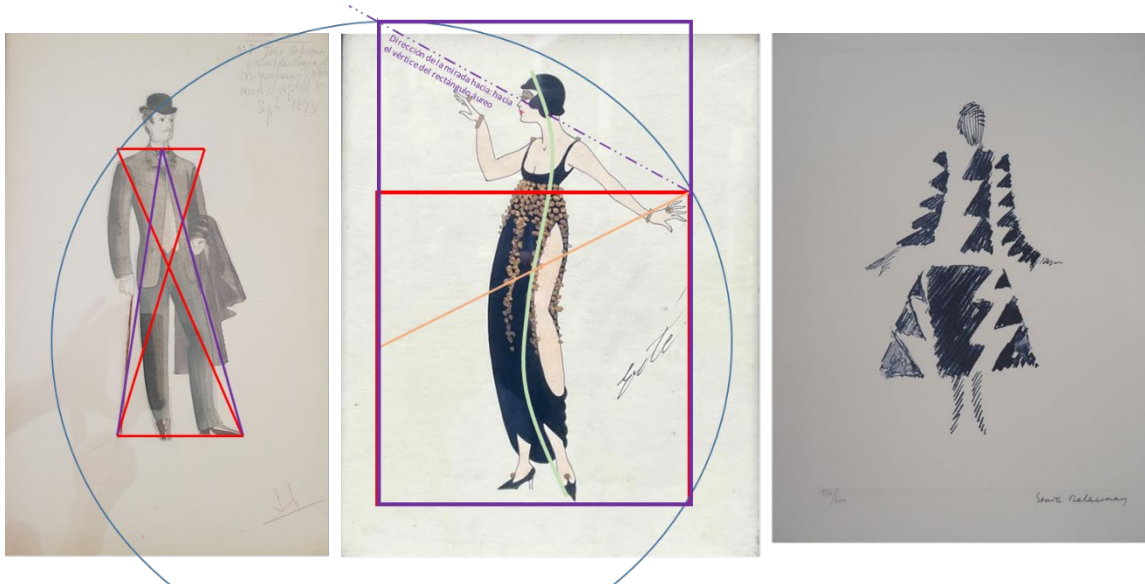


Figura 63. A la izquierda diseño de Antonio Rius (año 1893); en el medio, diseño de Romain de Tirtoff, conocido como Erté (1920). A la derecha, diseño de Sonia Delaunay (1985). Las construcciones geométricas son de elaboración propia.

En la tercera imagen de la figura, se observa la maestría de la diseñadora, incorporando detalles geométricos al modelo de forma totalmente explícita. Así, crea un vestido a partir de veintidós triángulos que siguen una secuencia rítmica.

Otros autores han utilizado obras de arte de la pintura como inspiración para sus diseños. Es el caso del diseñador español Cristóbal Balenciaga Eizaguirre (1895 – 1972), conocido simplemente como Balenciaga, que es considerado uno de los creadores más importantes de la alta costura. Contemporáneo de Coco Chanel y Christian Dior es el modista de alta costura español más importante de la historia junto a Manuel Pertegaz.

En las figuras 64 y 65 se muestra la inspiración pictórica en cuadros de los grandes maestros de la pintura española que tiene Balenciaga en algunos de sus diseños. En la figura 64, se puede observar como la serie ondulada que decora el vestido de la Infanta Margarita inspira el diseño de la decoración en la botonadura de la chaqueta de la modelo que exhibe el diseño de Balenciaga. Mientras que en la figura 65 se puede apreciar la influencia de los pliegues de la figura de San Juan en el cuadro de El Greco para el diseño del vestido que exhibe la modelo.



Figura 64. A la izquierda la Infanta Margarita de niña, obra del pintor Diego Velázquez. A la derecha diseño de Balenciaga. Fuente: Hamish Bowles, John E. Buchanan - Balenciaga and Spain: Spanish Master – 2011.

Balenciaga fue un creador incansable. De una profunda y perdurable influencia en la cultura, la historia y el arte de España. Creó una obra innovadora que transformó la forma de

vestir de las mujeres e inició un camino nuevo para las generaciones de los nuevos diseñadores que han encontrado en su trabajo un referente de primer nivel.



Figura 65. A la izquierda, el cuadro de La Crucifixion de El Greco A la derecha diseño de Balenciaga. Fuente: Hamish Bowles, John E. Buchanan - Balenciaga and Spain: Spanish Master – 2011.



Figura 66. Bocetos de Balenciaga. Fuente: Hamish Bowles, John E. Buchanan - Balenciaga and Spain: Spanish Master – 2011.

En la figura 66 se pueden ver algunos de sus diseños, junto con algunos de sus bocetos. En sus creaciones hay ritmo, hay armonía, hay geometría y hay arte.



## 5. Ritmos, arte y geometría en la danza

La danza se compone de diversos elementos interrelacionados que son interpretados por el público como un lenguaje expresivo. Su utilización no es siempre uniforme, y en un baile puede predominar uno sobre otro. En la danza hay movimiento al cambiar de posición los cuerpos a lo largo del espacio determinado para el baile. También hay ritmo debido a la secuencia temporal entre los pasos específicos a seguir, para que el baile ocurra de manera sincronizada con la música o con su propio tempo. Por otro lado, la danza está dotada de estilo o inclinación estética, personal, social o de moda en la ejecución del baile. En ese estilo hay configuraciones geométricas (véase la figura 67) muy relacionadas con la expresión corporal, ya que hay una escenificación del cuerpo, utilizando el cuerpo como vehículo de ciertos sentidos o significados, a través de posiciones concretas.

En la figura 67 se puede observar la configuración geométrica que se establece entre los tres bailarines al posicionarse en una forma determinada. Aparecen formas triangulares (en amarillo), que forman un conjunto estrellado, una circunferencia (en violeta) y un trapecio (en verde). Dicha geometría crea espacios de silencio y a la vez establece una comunicación artística con el espectador con un lenguaje espiritual.

En las figuras 68 y 69 se muestra una visión de la configuración geométrica que ofrece el bailarín en sus posiciones durante la ejecución de su arte. En el primer caso, se muestra al bailarín Vaslav Nijinsky, que fue un bailarín de ballet y coreógrafo ruso nacido en Polonia. Sus contemporáneos que lo vieron bailar quedaron impresionados por su transformabilidad, su virtuosismo, su gracia y su técnica de salto. Desde la perspectiva actual, sus saltos no se consideran enormes en su escala espacial, sino impresionantes por la impresión de su detención temporal. Para el espectador, el esfuerzo requerido para ello no era visible. La impresión de saltos ingravidos se vio reforzada por su capacidad para realizar aterrizajes silenciosos y suaves. Hasta el día de hoy, el nombre Nijinsky es sinónimo de arte de danza perfecto. En la figura 68 se puede observar el

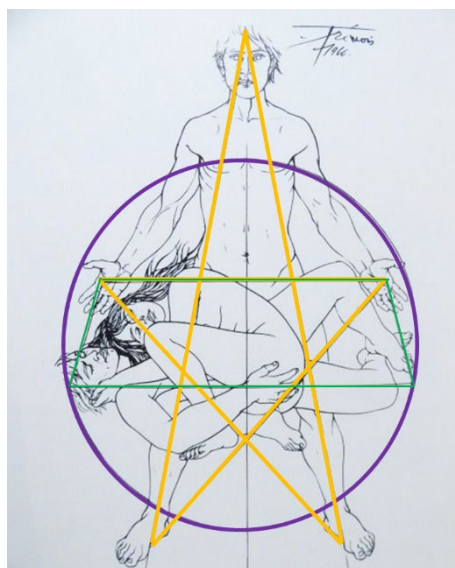


Figura 67. Del libro titulado Janine Charrat : *Antigone de la danse*. Editions d' Art H. Piazza (1970). Construcción geométrica de elaboración

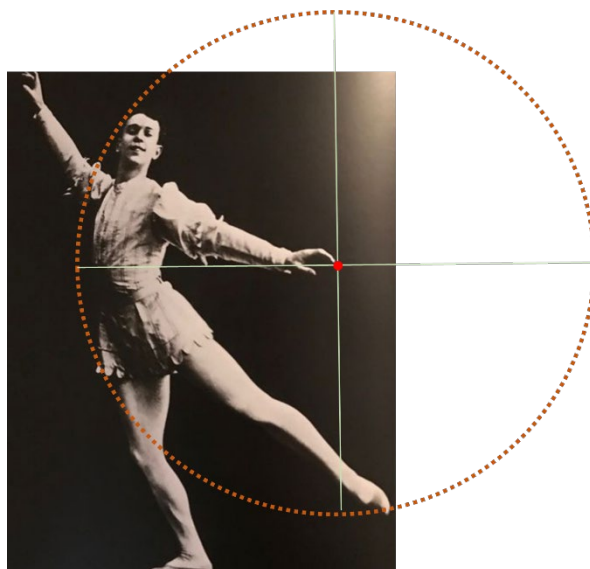


Figura 68. Vaslav Nijinsky actuando. Fuente: *Ballet-Fotobook de Lincoln Kirstein con Ensayos de Jaques Riviere y Edwin Denby*. (1981). La geometría es de elaboración propia.

arco perfecto sobre la que se asienta la cabeza y el pie, estando el centro de la circunferencia que lo contiene en el dedo de la mano.

Más actual es el bailarín Roberto Bolle, quien se convirtió en una estrella en lo más alto de la fama internacional y en un icono popular que llevó el ballet fuera de los teatros, al Coliseo, a los Juegos Olímpicos, al patio de la iglesia de la Catedral de Milán, provocando el frenesí de miles de fans. En la figura 69 se le muestra en una actuación en uno de sus saltos. La posición del punto más alto de su cabeza y las puntas de los pies definen un triángulo; mientras que los dedos de ambas manos definen una recta que se apoya en los lados de un triángulo que resulta ser el anterior girado 220 grados alrededor del punto más alto de la cabeza y trasladado después al largo de su altura, hasta colocarlo en dicho punto.

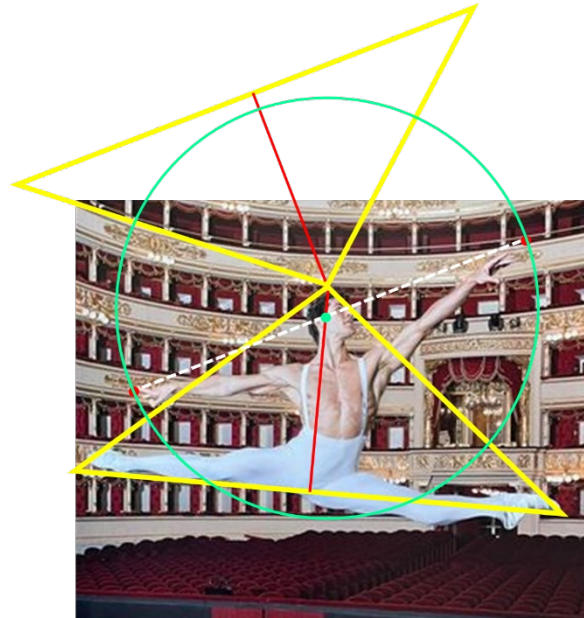


Figura 69. Roberto bolle actuando. Fuente: Roberto Bolle alla Scala, libro de Valeria Crippa. La geometría es de elaboración propia.

## 6. Ritmos, arte y geometría en los instrumentos musicales. El caso de la guitarra Ramírez

Es bastante general en los instrumentos musicales la presencia de geometrías características y sofisticados diseños artísticos, la rítmica que produce el instrumento como motor de su música es muy característico de cada uno de ellos. Como ejemplo destacado de esta idea, se ha elegido hablar de la guitarra Ramirez.

Aunque todos los países reivindican su intervención en la invención de la guitarra, aspectos tales como la forma, la estructura y la afinación, derivan directamente de la guitarra tal como los españoles la diseñaban.

Es a mediados del siglo XIX cuando la historia de la guitarra moderna alcanza un gran apogeo gracias al español Francisco Tárrega, creador de la escuela moderna y autor del cambio en el uso del posicionamiento de las manos y la manera de pulsar las cuerdas. También, hacia 1850 empezó el trabajo de Antonio de Torres con el apoyo de Julián Arcas, con sus aportaciones a los soportes estructurales de la guitarra, incluyendo siete varas extendidas bajo la tapa armónica, el aumento del tamaño de la caja de resonancia y el ancho del mástil. Estas innovaciones influyeron en la mejora del volumen del sonido y la respuesta en los bajos.

Es un poco después cuando aparecen otros excepcionales guitarreros. Es el caso de la familia Ramirez, que empezó su andadura con la figura de José Ramírez, quien proporcionó en su tiempo los modelos más cotizados por los grandes concertistas de guitarra a nivel mundial.



En la saga Ramírez hay que mencionar al maestro luter José Ramírez Martínez (1922 – 1995), conocido como José Ramírez III, quien creó un modelo basado en proporciones áureas y números mágicos dotados de una simbología especial configurando una geometría diferenciadora que la dotaba de una sonoridad única. El modelo parte de la longitud mayor del cuerpo de la guitarra y del radio de las circunferencias de las concavidades en su cintura, lo que permite definir un contorno basado en tangencias entre circunferencias, rectas y arcos.

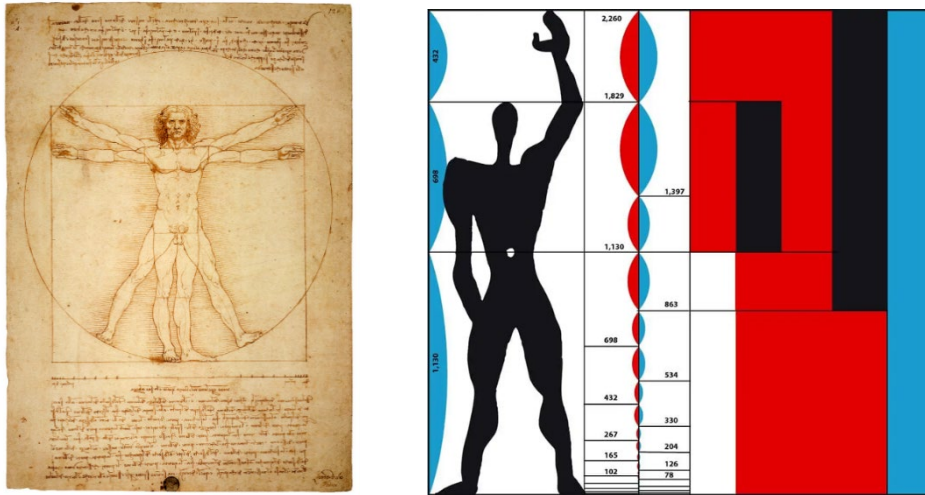


Figura 70. El hombre de Vitrubio según Leonardo da Vinci y el Modulor de Le Corbusier.

La proporción áurea en la guitarra Ramírez III está en toda su fase de diseño; y no sólo eso, sino que utiliza algunas series numéricas armónicas. El maestro Ramírez III sabía que con la razón áurea y la magia de algunos números aplicados a las medidas de su guitarra conseguía una mayor percepción de la belleza, no sólo en la forma, sino también en la frecuencia de vibración de sus cuerdas y en la transmisión de los sonidos.

José Ramírez III sigue la estela de los grandes artistas de la antigüedad y, sin duda, también es conocedor de uno de los grandes genios del arte moderno, el pintor y arquitecto Charles-Édouard Jeanneret-Gris –más conocido como Le Corbusier– que en 1948 lanzó una de sus publicaciones más famosas titulada *El modulor*, seguido por *El modulor 2* (1953). En estos textos, Le Corbusier dio a conocer su aporte a la investigación que tanto Vitrubio como Da Vinci y Leon Battista Alberti habían comenzado en un esfuerzo por encontrar la relación matemática de las medidas del hombre con la naturaleza. De cierta manera es una búsqueda antropométrica de un sistema de medidas del cuerpo humano en que cada magnitud se relaciona con la anterior por el número áureo, todo con la finalidad de que sirviese como medida base en las partes de la arquitectura.

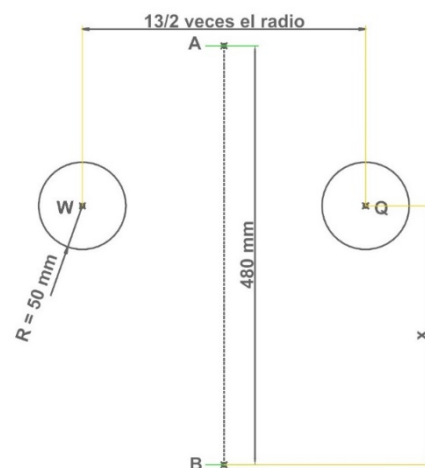


Figura 71. Dibujo del cuerpo de la guitarra Ramírez III, a partir del radio de las circunferencias correspondientes a la concavidad de su cintura. Fuente: elaboración propia.

Para Le Corbusier las medidas parten desde la medida del hombre con la mano levantada (226 cm) y de su mitad, la altura del ombligo (113 cm). Desde la primera medida multiplicando sucesivamente y dividiendo de igual manera por el número áureo (1,618) se obtiene la llamada serie azul, y de la segunda del mismo modo la roja. Siendo cada una sucesión de Fibonacci y permitiendo miles de combinaciones armónicas. (véase la figura 70).

**Serie azul, en metros:** ..., 9,57; 5,92; 3,66; **2,26**; 1,40; 0,86; 0,53; 0,33; 0,20; ...

**Serie roja, en metros:** ..., 4,79; 2,96; 1,83; **1,13**; 0,70; 0,43; 0,26; 0,16; 0,10; ...

En la guitarra Ramírez III la longitud mayor del cuerpo de la guitarra es de 480 mm (4,8 dm)– obsérvese la relación con el primer número de la serie roja de Le Corbusier - Por otro lado, el cociente entre la longitud mayor del cuerpo de la guitarra ( $AB = 480$  mm) y el radio de las circunferencias de concavidad en su cintura (50 mm) es 9,6 – redondeo del número del primer término de la serie azul de más arriba -.

Siguiendo un esquema parecido al de Vitrubio, Da Vinci y más tarde Leon Battista Alberti o Le Corbusier, José Ramírez III crea el cuerpo de su guitarra tan sólo con dos datos: la magnitud mayor y el radio de las circunferencias correspondientes a la concavidad de su cintura (véase la figura 71). Todo lo demás es consecuencia de razones áureas, proporciones y relaciones numéricas (véase la figura 72). Así, se cumple que:

La longitud mayor del cuerpo de la guitarra es  $AB = 480$  mm y coincide con su eje de simetría.

Las dos circunferencias,  $C_1$  y  $C_2$ , correspondientes a las concavidades, tienen un radio de 50 mm y sus centros distan entre sí 6,5 ( $13/2$ ) veces su radio; además, dichos centros están situados a una distancia  $x$  del punto más bajo de la guitarra que se sabe es media proporcional entre “ $AB$ ” y “ $(AB - x)$ ”. El maestro Ramírez III quiso dejar constancia del número 13 en su guitarra, pero sin mostrarlo explícitamente para indicar que la guitarra es un camino, una evolución hacia un estado de mayor comprensión o de crecimiento personal.

La construcción gráfica para obtener el segmento áureo del diámetro de la circunferencia de concavidad permite obtener tres puntos  $J$ ,  $K$  y  $L$  de referencia: los dos primeros por intersección de la recta que une el extremo  $V$  del diámetro con el centro de la circunferencia de igual diámetro tangente en el otro extremo, y el tercero como extremo del segmento áureo. Los puntos  $J$  y  $K$  cortan perpendicularmente al eje de simetría de la guitarra en dos puntos  $J'$  y  $K'$  que equidistan del centro  $O$  de la boca de la guitarra.

La circunferencia  $C_3$  de centro  $V$  y radio  $VJ$  define en su punto más alto la línea de centros correspondiente a las circunferencias superiores del cuerpo de la guitarra y que, además, resultan ser de radio precisamente  $VJ$ . El maestro Ramírez III estableció que las circunferencias  $C_4$  y  $C_5$  pasaran cada una de ellas por el centro de la otra.

La distancia entre el punto  $L$  y su simétrico respecto del eje de simetría de la guitarra, define la anchura máxima del cuerpo de la guitarra, la cual determina un segmento que se puede dividir en tres partes, siendo los extremos del intervalo central los centros de las circunferencias  $C_6$  y  $C_7$  que conforman las circunferencias inferiores del cuerpo de la guitarra. El centro de la circunferencia  $C_6$  se encuentra en la recta  $WR$ , siendo  $R$  el punto de intersección de la circunferencia  $C_1$  y la de centro  $V$  y mismo radio.

Definidas las circunferencias  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$ ,  $C_6$  y  $C_8$  el contorno del cuerpo de la guitarra es tangente a ellas de tal forma que el tramo de tangencia superior lo es a  $C_3$  y  $C_4$

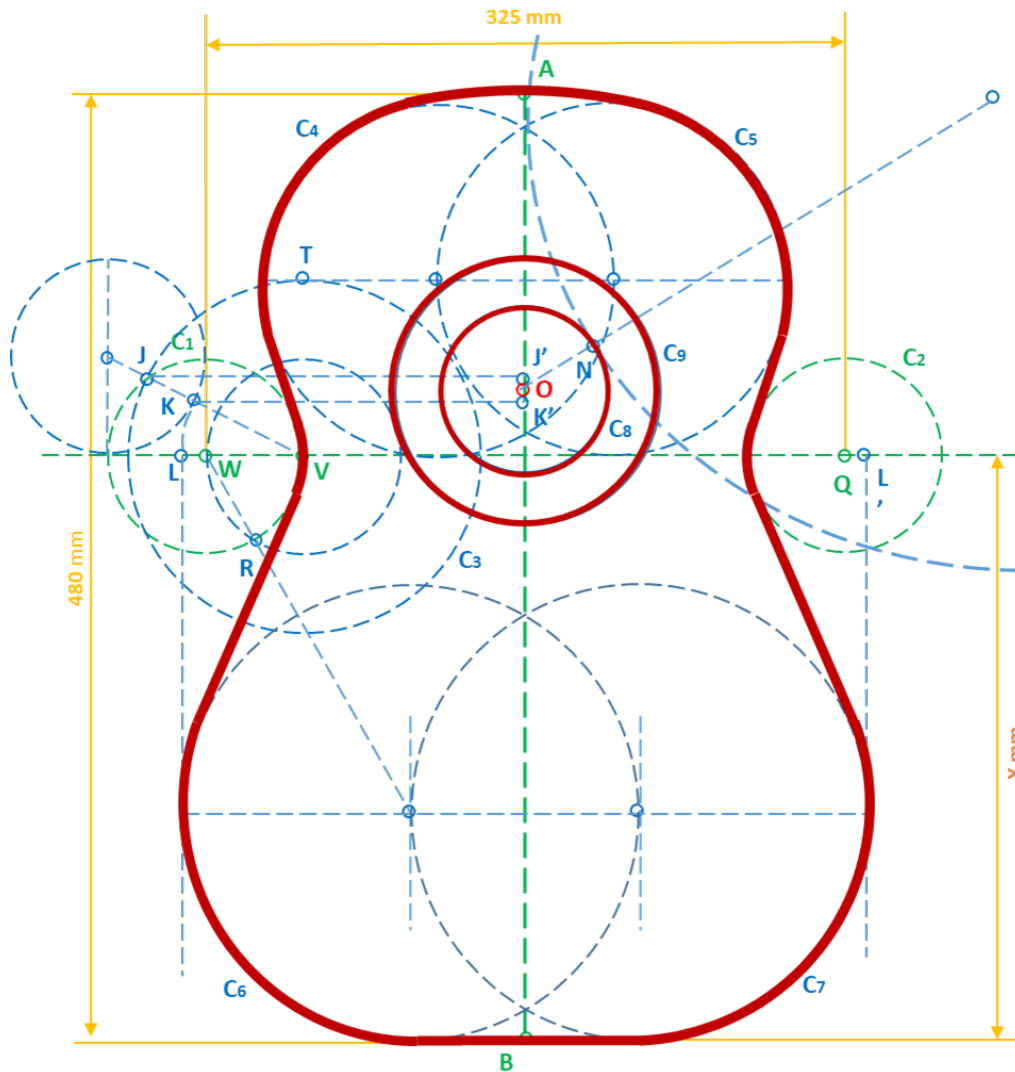


Figura 72. Dibujo de la guitarra Ramirez III a partir de razones áureas, proporciones y relaciones numéricas. Fuente: elaboración propia.

pasando por el punto A y el tramo de tangencia inferior lo es a C6 y C7 pasando por el punto B. El contorno se completa con segmentos tangentes a C1 y C4 y a C1 y C6, así como con sus simétricos respecto al eje AB.

Para dibujar la circunferencia C8 correspondiente al hueco de la boca de la guitarra se determina el punto N que resulta de hallar la intersección de la circunferencia de diámetro AB tangente al punto más alto de la guitarra con la recta que une el punto O con el centro de dicha circunferencia. La circunferencia C8 es la de centro O y radio ON.

La boca de la guitarra sirve de límite para la zona de mosaico y marquetería, que se extiende hasta el contorno de la circunferencia C9 concéntrica con la anterior y tangente a la de centro V y mismo radio que C1.

La distancia entre el punto L y su simétrico respecto del eje de simetría de la guitarra define la anchura máxima del cuerpo de la guitarra, la cual determina un segmento que se puede dividir en tres partes, siendo los extremos del intervalo central los centros de las circunferencias C5 y C6 que conforman las circunferencias inferiores del cuerpo de la guitarra. ¡Otra vez el 3!. El maestro Ramírez III pensaba en términos de energía, frecuencia y vibración.

Las proporciones y las relaciones numéricas que establece José Ramírez III representa un esfuerzo por devolverle la armonía a la guitarra clásica con respecto al cuerpo humano, al orden estético y a la belleza.

Como escribió Anthony Ashley Cooper, Conde de Shaftesbury: “existe un poder en los números, armonía, proporción y belleza de todo tipo que cautiva naturalmente al corazón, y eleva la imaginación hacia una opinión de algo majestuoso y divino”.

José Ramírez III pone sobre la mesa una lección importante: la importancia del idealismo y la confianza, la creencia de que siempre hay territorio para explorar y la sensación de que el guitarrero puede encontrar las metáforas necesarias para un cambio radical en lo que parecía inalterable. El maestro pensó que era necesario seguir redibujando las lecciones de los antecesores para descubrir qué es lo que se adapta a nuestro contexto, para poder encontrar lo que falla y seguir descubriendo todo lo que nos rebasa cuando algo nuevo surge.

Cuando uno se enfrenta a la personalidad de José Ramírez III, se da cuenta de que estamos ante un genio, porque todo gran genio reúne, estudia y crea a partir de los problemas y planteamientos de su época. Él sabía que la belleza no es una cualidad estática o material; es el diseño que produce la mente; es el movimiento y energía de su creador - el artista-.

Como escribió Baillie en el siglo XVIII: “la imaginación no tiene límites de su propia inmensidad, y la mente corre hacia el infinito creando continuamente a partir del patrón”.

Tal vez la obsesión que tuvieron los artistas de vanguardia por representar la guitarra en sus lienzos fue gracias a José Ramírez III. Así, en el cubismo la guitarra fue protagonista de primer nivel. El cubismo es color, complejidad, pasión y sobre todo innovación. Este movimiento artístico de vanguardia nació con el siglo XX y, a pesar de tener su origen en Francia, el cubismo tiene dos representantes españoles de gran poderío: Pablo Picasso y Juan Gris.

La presencia de los instrumentos musicales es numerosa y significativa en todas las fases del cubismo. La presencia de la música en la pintura del cubismo sintético de Pablo Picasso hasta 1914. En esa ruptura con todo lo anterior en el arte, en la búsqueda de un nuevo espacio pictórico y una exploración sin límites de un nuevo lenguaje pictórico, está siempre presente la música: en los volúmenes, objetos, letras y signos. Enlazar diversas disciplinas ayuda a tener una visión más profunda, amplia y creativa.

La música, por tanto, aparece en las obras cubistas en forma de partituras, bailarines y si esas obras son creadas por españoles, ensalzan un instrumento por encima de todos: la guitarra. (Véase a modo de ejemplo las figuras 73, 74, 75 y 76).

La presencia de la guitarra en la obra de Picasso ha motivado exposiciones, como la del MoMa de Nueva York en 2011, llamada Guitarras 1912-1914, en la que se podían observar guitarras fabricadas en tres dimensiones con la estética propia del artista.

Por su parte, Juan Gris, cuya obra se caracterizó por introducir papeles en sus cuadros – papier collé- destacó la figura de este instrumento en numerosas pinturas.

La mayoría de los historiadores del arte dan crédito a la serie *Guitar* como la transición definitiva del cubismo analítico al sintético. Después de un examen de todos los collages y construcciones, se puede observar que la serie *Guitar* (que incluye también algunos violines) cristalizó la marca de cubismo de Picasso. La serie establece un repertorio de signos que se mantuvo activo en el vocabulario visual del artista a través de los bocetos obras cubo-surrealistas de los años veinte.



Figura 73. Cuadro de guitarras y violines por Pablo Picasso.



Figura 74. Cuadro de guitarra por George Braque.

No se sabe exactamente cuándo comenzó la serie *Guitar*. Los collages incluyen fragmentos de periódicos de noviembre y diciembre de 1912. Fotografías en blanco y negro del estudio de Picasso en el Boulevard Raspail, publicadas en *Les Soirées de Paris*, n. 18 (noviembre de 1913), muestra la guitarra de cartulina de color crema rodeada de numerosos collages y dibujos de guitarras o violines colocados uno al lado del otro en una pared.



Figura 75. Cuadro de guitarra por Juan Gris.



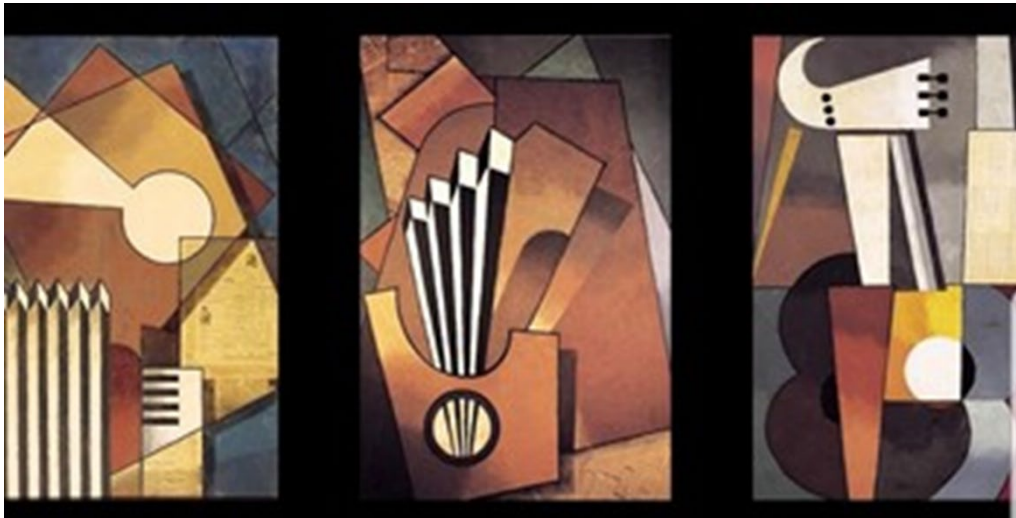


Figura 76. Luis Caruncho. Mural creado para las Galerías María Pita de A Coruña en 1962. Manifiesta esa intención unificadora de vanguardia y la sintonía con Malevitch, Mondrian o Nicholson. Se expuso en la Galería Monzón de Madrid

## 6. Ritmos, arte y geometría en los puentes romanos

En este epígrafe se quiere plasmar la importancia de la geometría en el diseño estructural de los puentes de fábrica que construyeron los excepcionales ingenieros del Imperio Romano. Puentes que hablan desde el silencio de sus pilares y sus arcos.

En España hay dos puentes especialmente singulares por su grandiosidad: el Puente de Alcántara en Extremadura y el puente sobre el río Bibei en Galicia.



Figura 77. Vista frontal del puente romano de Alcántara. Construido entre el 95 y el 105 d.C

El puente de Alcántara (véase las figuras 77 y 78), es el puente romano más alto del mundo, del que en el s.XII el geógrafo musulmán Al-Idrisi dijo que era una de las maravillas del mundo. Construido hace casi dos milenios, todavía perdura con muy pocas actuaciones de mantenimiento. “Durará mientras dure el mundo”, es lo que hizo grabar su constructor Cayo Julio Lacer “Pontem perpetui mansurum in saecula mundi”.

El puente mide 197 metros y está apoyado sobre cinco pilares de diferentes alturas adaptados a la orografía del terreno. La anchura de sus dos arcos centrales sigue impresionando hoy día: unos 48 metros. Solamente dos de estos soportes están anclados en el río, por lo que,

durante el estiaje quedan protegidos de la corriente el resto de apoyos. Esta es una de las razones que explica su óptima conservación.

En el centro del puente, sobre el pilar central, se eleva un Arco del Triunfo de unos 13 metros de altura. Aunque ha sido modificado en varias ocasiones a lo largo de la historia, conserva algunas inscripciones, una dedicatoria al emperador Trajano y varias lápidas conmemorativas de diferentes reconstrucciones del puente.

La ingeniería romana muestra en el Puente de Alcántara su gran capacidad para construir infraestructuras perennes. El puente se asienta sobre unos sólidos pilares cubiertos por sillares almohadillados dispuestos a soga y tizón (se alternan por su lado más largo (soga) y otros por el más corto (tizón), una técnica después utilizada por los árabes), con unas dimensiones de 60 × 120 cm. El resultado es una obra armónica y precisa.



Figura 78. Vista en perspectiva del puente romano de Alcántara. Construido entre el 95 y el 105 d.C

El otro puente monumental romano es el puente del Bibei (véase la figura 79 y 80). Se trata de un puente en arco de medio punto por el que la carretera OU-636 cruza el río Bibei. Está situado en el municipio gallego de Puebla de Trives.

El puente se compone de tres arcos cuyas luces son de 6.09 m (orilla Oeste), 18.51 m (central) y 8.77 m (orilla Este) respectivamente. La luz del arco central viene determinada por la profundidad del río a la altura del pilar Este, ya que habría sido necesaria cimentación a mayor profundidad en caso de menor luz. Es un puente ancho, de 6.5 m, mientras que la longitud total



es de 75 m. La altura del puente desde el lecho al arco central es de 22.5 m, suficiente para desaguar las crecidas del río, que transcurre encajonado en el lugar. Los pilares exhiben la estructura de fábrica “opus quadratum” de sillería granítica almohadillada. Las sillerías están talladas y apiladas sin juntas ni cuñas, con lo que se consigue una resistencia parecida a la de la propia piedra. Las pilas tienen tajamares triangulares aguas arriba rematados por unos sombreretes que se añadieron en 1861 con motivo de unas reformas. A ambos lados del río se levantaron sendos muros de contención de 9 metros de longitud (orilla Oeste) y 17 metros (orilla Este).



Figura 79. Vista frontal del puente romano del Bibeí. Construido entre el 114 y el 119 d.C.

El puente fue construido para el paso de la Vía Nova o vía XVIII del itinerario de Antonino, cuyo trazado se finalizó sobre el año 80 d.C. Probablemente el puente fue levantado durante tiempos de Trajano (114-119 d.C.), dada su semejanza con el de Alcántara y diversas inscripciones dedicadas al emperador halladas en la zona. Al ser la fecha de construcción posterior al de la Vía Nova, se cree que el puente actual se levantó sobre uno anterior del que nada ha quedado. Para su construcción, se eligió un lugar donde el río Bibeí transcurre encajonado, siendo el lecho bastante uniforme con una profundidad de 3 metros. En este punto la roca aflora a la superficie, lo que permitió una buena cimentación.



Figura 80. Vista en perspectiva del puente romano del Bibeí. Construido entre el 114 y el 119 d.C.

Desde tiempos romanos, nunca ha perdido su función de obra útil, siendo este hecho clave en su conservación.



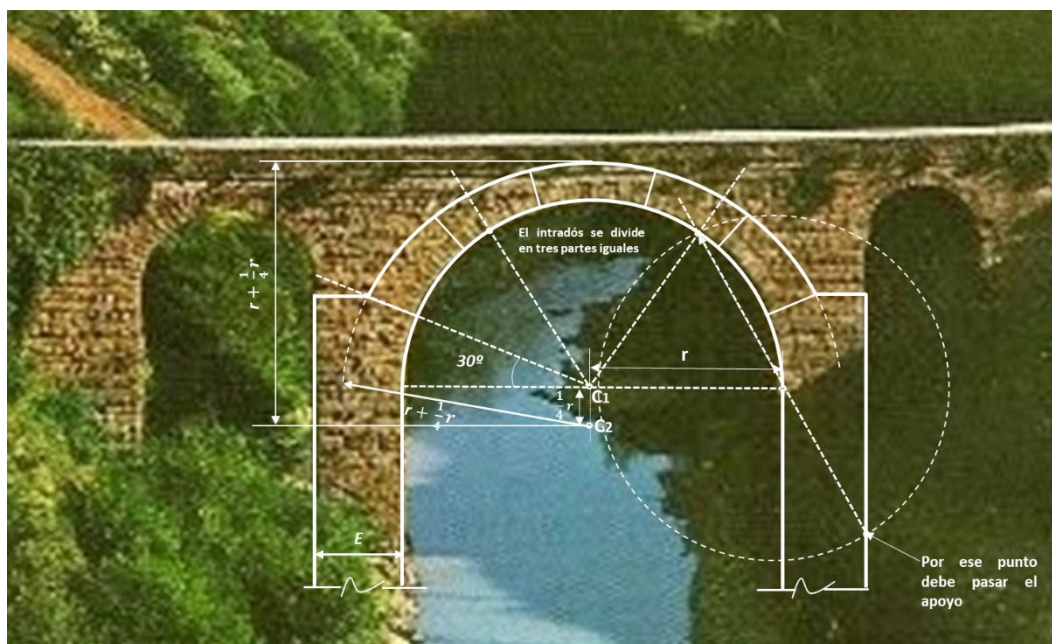


Figura 81. Vista frontal del puente romano del Bibei. Construcción geométrica para la obtención del espesor del pilar y el punto de apoyo de los arcos adyacentes. Elaboración propia.

Como ejemplo de que la geometría por sí misma ha funcionado como elemento que desde antiguo sustituyó a los cálculos numéricos, se superpone a continuación una vista frontal del puente del Bibei con su construcción geométrica (véase la figura 81), lo que permitió establecer condiciones para las formas del puente. Así, la anchura de los pilares sobre los que se asentarían los arcos de medio punto quedaba definida aplicando una regla geométrica muy simple: se divide el arco en tres partes iguales y con centro en el extremo del diámetro y radio desde ese punto al primer punto de la división del arco se traza una circunferencia. El punto resultado de la intersección de esta circunferencia con la recta que une los dos puntos anteriores, determina el punto de paso del espesor de la pila.

Este principio geométrico, de uso extendido en Europa, será replicado incluso por los ingenieros del siglo XVIII, quienes como Gautier (1765) valoraban el uso del álgebra como herramienta para el análisis estático de las estructuras abovedadas. Sea como fuere, parece que los ingenieros romanos utilizaron esa regla geométrica y hoy día sorprende la longevidad de la obra, todavía en uso por cualquier vehículo que pase por la carretera.

El ingeniero romano artista, se encontró siempre en la imposibilidad de olvidar la triple misión que un biógrafo de León Battista Alberti, Paul-Henri Michel, dio de la obra de arquitectura o ingeniería. Escribió que la obra debe ser *indiligentibus moles* (refiriéndose a edificaciones estáticas y grandiosas); *assiduis numerus* (refiriéndose a que sus números deben estar bien calculados); y *edoctis música* (deben mostrar expresión musical).

El matemático, filósofo y premio nobel de literatura en 1950, Bertrand Russell (1872 – 1970) en una reflexión muy personal al cumplir ochenta años dijo: "He vivido en busca de una visión personal: cuidar lo que es noble, lo que es bello, lo que es amable; permitir momentos de intuición para entregar sabiduría en los tiempos más mundanos".

En esa línea y para finalizar quiero enfatizar la idea de que la música, el arte y la geometría nos hace un poco más navegable el futuro, nos enseña que el mundo puede ser aún más agradable y más lleno de sentido. Bajo sus luces, las cosas, las ideas, las formas, empiezan a hacernos señas, como cómplices de un destino común que siempre nos acompañará en el camino de la vida.

Creo que el arte, los ritmos musicales, la fuerza y la belleza presentes en muchas obras, las transforma en elocuentes palabras gracias al lenguaje de la geometría y pueden curar el alma de quien las admira.

## Referencias

- [1] ALONSO, JESÚS ET ALL, *Sistemas de Representación II*, pp. 33-82, Ed. Asociación de Investigación. Instituto de Automática y Fabricación. León, 2012.
- [2] ALONSO, JESÚS ET ALL, *Geometría Métrica para ingenieros*, pp. 150-167. Ed. Garceta. Madrid, 2019.
- [3] ALONSO, JESÚS, *La representación del camino en los albores de la pintura moderna*, XIII Congreso Internacional de Caminería Hispánica, pp. 63 – 79, Madrid, 2017.
- [4] FOSTER HAL et all, *Arte desde 1900 modernidad, antimodernidad, posmodernidad*, pp. 38, 39, 119-124, Ed. Akal S. A., 2006
- [5] BAKER, GEOFFREY, *Le Corbusier, an analysis of form*, pp. 58, 59, Ed. Nostrand Reinhold, U.K., 1985.
- [6] BUCHANAN, JOHN E., *Balenciaga and Spain: Spanish Master*, 2011.
- [7] MARTÍNEZ, JESÚS, *El enigmático poliedro de Alberto Durero en Melancolia I*, Publicado en la Revista Tierra y tecnología, nº 30, Colegio Oficial de Geólogos, 2006.
- [8] CHARRAT, JANINE, *Antigone de la danse*. Editions d'Art H. Piazza, 1970.
- [9] COMAR, PHILIPPE, *La perspective en jeu, les dessous de l'image*, p.44. Ed. Frédéric Morvan, Francia, 1993.
- [10] HOGARTH, WILLIAM, *Análisis de la belleza*, pp. 38, 39, 226, Londres, 1775.
- [11] BOWLES, HAMISH, *Balenciaga and Spain*, Fine Arts Museum of San Francisco, Skira Rizzoli Publications, San Francisco, 2011.
- [12] BREUNI G., PETER, *Nok, African sculpture in archaeological context*, Goethe Universität Frankfurt, pp. 41, 95, 121, Germany, 2014.
- [13] SOLANA, GUILLERMO, *Cézanne Site/non-site*, Museo Thyssen – Bornemisza, pp. 103-109, Madrid, 2014.
- [14] HUGHES, ROBERT, *El impacto de lo nuevo, el arte del siglo XX*, Círculo de lectores, pp. 40, 51, 234, Madrid, 1991.
- [15] LIZ, JESÚS, *El puente de Alcántara: arqueología e historia*, CEHOPU (CEDEX) MOPU, pp. 61-71, Madrid, 1988.
- [16] VITRUBIO, MARCO, *Los diez libros de arquitectura traducidos del latín y comentados por Joseph Ortiz*, Imprenta Real, p. 291, Madrid, 1787.
- [17] HUMBERT, MICHEL, *Janine Charrat, Antigone de la danse*, pp. 10, 27, 65, Ed. D'art H. Piazza, Paris, 1970.
- [18] JAFFÉ, HANS, *El arte del siglo XX*, pp. 170, 171, EDAF, Ediciones y Distribuciones S.A., pp. 170, 171, Madrid, 1970.

- [19] ALTAIÓ, GERARD ET ALL, Auditorium, cinco siglos de música inmortal (volumen II), p. 2, Ed. Planeta, 2002.
- [20] LINCOLN KIRSTEIN, Vaslav Nijinsky, Balett-Fotobook con ensayos de Jaques Riviere y Edwin Denby, pp. 39-55, 1981.
- [21] Ensayo para la exposición en el museo de Arte de Berkeley, An eternity of forest –paintings by Mbuti women, California, 2000.
- [22] JOS SCHOLTES, Rock Steady  
[https://www.youtube.com/watch?v=dKkyAzCX5SM&list=PLNBZIH1HJ00Lo584mvX1fliA\\_r-33zM60&index=1](https://www.youtube.com/watch?v=dKkyAzCX5SM&list=PLNBZIH1HJ00Lo584mvX1fliA_r-33zM60&index=1)

**Sobre el autor:**

*Nombre:* Jesús Alonso Trigueros

*Correo Electrónico:* chus.alonso@upm.es

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

# Historias de Matemáticas

## Matemáticos galardonados con el Premio Nobel

### Mathematicians awarded the Nobel Prize

Juan Núñez Valdés, Luis Rabasco González

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 139–169, ISSN 2174-0410  
Recepción: 1 May'21; Aceptación: 30 Oct'21

1 de abril de 2022

#### Resumen

Es sabido que los Premios Nobel se conceden en seis modalidades distintas y ninguna de ellas es la de Matemáticas. No obstante, ello no es óbice para que muchos matemáticos hayan sido galardonados con ese Premio. En esta comunicación se muestran las biografías de aquellos matemáticos que llegaron a ser premiados en algunas de las modalidades en las que estos Premios se conceden, no solo científicas, como Física o Química, sino también en Economía o incluso en Literatura, como es el caso del prestigioso escritor español José de Echegaray, el primero de todos los matemáticos que consiguió ese galardón.

**Palabras Clave:** Premio Nobel, Matemáticos galardonados con el Premio Nobel, Historia de las Matemáticas.

#### Abstract

It is well-known that Nobel Prizes are awarded in six modalities and none of them is Mathematics. However, this is not an obstacle for many mathematicians to have been awarded that Prize. This communication shows the biographies of all those mathematicians who came to be awarded in some of the modalities in which these Awards are granted, not only scientific, such as Physics or Chemistry, but also in Economics and even in Literature, as it is the case of the prestigious Spanish writer José de Echegaray, the first mathematician awarded that distinction.

**Keywords:** Nobel Prize, Mathematicians awarded the Nobel Prize, History of Mathematics.

## 1. Introducción

El Premio de mayor categoría a nivel mundial que puede recibir una persona en las diferentes modalidades en las que se otorga es, sin ninguna duda, el Premio Nobel. Sin embargo, y como es bien sabido, no existe este Premio en Matemáticas, pues únicamente se concede para las modalidades de Física, Química, Medicina y Fisiología, Literatura, Economía y Paz. Por ello, ningún matemático ha podido obtener tal distinción en Matemáticas, aunque sí hay varios matemáticos que lo han conseguido en otras disciplinas, entre los cuales merece

ser destacado nuestro compatriota José de Echegaray e Izaguirre (1832-1916), licenciado en Matemáticas y premio Nobel de Literatura en 1904, en razón de su vastísima producción literaria, en torno a 70 obras de teatro (para una mayor información sobre las razones por las que no existe el Premio Nobel en la categoría de Matemáticas, el lector puede consultar (Núñez, 2019), entre otras referencias, por ejemplo).

En esta comunicación y con el objetivo principal de realzar el papel de los matemáticos ante la sociedad, se muestran unas breves biografías de todos aquellos matemáticos que consiguieron ser galardonados con el Premio Nobel gracias a sus trabajos sobre las aplicaciones de las Matemáticas a otras disciplinas, no solamente científicas como cabría esperar, como Física o Química, sino también en Economía o incluso en Literatura, como es el caso del ya indicado prestigioso escritor español José de Echegaray, el primero de todos los matemáticos que consiguió ese galardón.

La metodología que se ha seguido ha sido en la mayoría de los casos la de completar las biografías de matemáticos existentes bien en “Mac Tutor de la Universidad de Saint Andrews”, elaboradas por J. J. O'Connor, and E. F. Robertson, bien en “Biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea” o bien en “MCN Biografías” (véanse las referencias al respecto), con datos procedentes tanto de otras biografías como de la propia investigación, y luego extraer los resultados finales a fin de conseguir una razonable extensión del artículo. En los casos de los galardonados para los que no existían biografías significativas, se han elaborado estas a partir de las investigaciones realizadas y de los escasos retazos existentes, indicándose explícitamente en el texto la procedencia de los datos que se incluyen. Las imágenes en el texto se han tomado asimismo de esas biografías.

La Tabla 1, que se muestra seguidamente, incluye la relación completa de matemáticos galardonados con el Premio Nobel y la Tabla 2 la de otros galardonados que también recibieron ese Premio, quienes sin ser propiamente matemáticos (casi todos son graduados en Física), poseían unos grandes conocimientos de Matemáticas, que les valieron para conseguir esa distinción (Morales, sin fecha). Sí es conveniente, no obstante, aclarar al respecto que algunos de ellos aparecen como matemáticos en las biografías de O'Connor and Robertson, si bien no queda completamente constatado que se hubiesen graduado en Matemáticas.

Tras esas tablas y en las diferentes secciones se incluyen las biografías de todos los matemáticos galardonados con el Premio Nobel en todas las modalidades, salvo en la de Medicina y Fisiología y en el de la Paz, en las que no hubo ninguno.

Tabla 1. Matemáticos galardonados con el Premio Nobel

Galardonado	Modalidad	Año
Hendrik Antón Lorentz	Física	1902
Marie Curie	Física	1903
José Echegaray y Eizaguirre	Literatura	1904
Marie Curie	Química	1911
Paul Adrien Maurice Dirac	Física	1933
Bertrand Arthur William Russell*	Literatura	1950

Max Born	Física	1954
Walter Bothe	Física	1954
Eugene Paul Wigner	Física	1963
Richard Phillips Feynman	Física	1965.
Leonid Kantoróvich	Economía	1975
Subrahmanyam Chandrasekhar	Física	1983
Herbert Aaron Hauptman	Química	1985
John Forbes Nash	Economía	1994
Reinhard Selten	Economía	1994.
John Anthony Pople	Química	1998
Israel Robert John Aumann	Economía	2005
Leonid Hurwicz	Economía	2007
Eric Maskin	Economía	2007
Roger B. Myerson	Economía	2007
Lloyd Shapley	Economía	2012
Roger Penrose	Física	2020

Tabla 2. Otros ganadores del Premio Nobel no matemáticos, pero con una gran formación matemática

Galardonado	Modalidad	Año
Pieter Zeeman	Física	1902
Pierre Curie	Física	1903
Henry Becquerel	Física	1903
John William Strutt Raileigh	Física	1904
John Strutt	Física	1904
Adolf von Baeyer	Química	1905
Joseph John Thompson	Física	1906
Ernest Rutherford	Química	1908
Johannes van der Waals	Física	1910
Wilhelm Carl Fritz Franz Wien	Física	1911
Max Planck	Física	1918

Johannes Stark	Física	1919
Albert Einstein	Física	1921
Niels Bohr	Física	1922
Louis Víctor de Broglie	Física	1929
Werner Heisenberg	Física	1932
Erwin Schrödinger	Física	1933
Peter Debye	Química	1936
Wolfgang Ernst Pauli	Física	1945
John Cockcroft	Física	1951
Nikolái Semiónov	Química	1956
John Bardeen	Física	1956
Pavel Cherenkov	Física	1958
Lev Davidovich Landáu	Física	1962
Maria Goeppert-Mayer	Física	1963
Hans D Jensen	Física	1963
Julian Schwinger	Física	1965
Sin-Itiro Tomonaga	Física	1965
Jan Tinbergen	Economía	1969
Ragnar Frisch	Economía	1969
John Hicks	Economía	1972
John Bardeen	Física	1972
Tjalling Koopmans	Economía	1975
Abdus Salam	Física	1979
Walter Gilbert	Química	1980
Kai Siegbahn	Física	1981
William Alfred Fowler	Física	1983
Jerome Karle	Química	1985
Dudley Robert Herschbach	Química	1986
John Harsanyi	Economía	1994
Harold Kroto	Química	1996



Myron Scholes	Economía	1997
Steven Chu	Física	1997
John E Walker	Química	1997
Walter Kohn	Química	1998
Walter Kohn	Química	1998
Kurt Wüthrich	Química	2002
Frank Wilczek	Física	2004
Clive Granger	Economía	2003
Edward C Prescott	Economía	2004
Thomas C Schelling	Economía	2005
Albert Fert	Física	2007
Alvin E Roth	Economía	2012
Peter Higgs	Física	2013
Reinhard Genzel	Física	2020
Andrea Mia Ghez	Física	2020

## 2. Matemáticos galardonados con dos Premios Nobel en modalidades diferentes

### 2.1 Marie Curie, Premio Nobel de Física en 1903 y de Química en 1911

Marie Curie, física, química y matemática polaca (nacionalizada francesa), recibió el Premio Nobel de Física en 1903 *“por sus investigaciones conjuntas sobre los fenómenos de la radiación descubiertos por el profesor Henri Becquerel”*. Ese premio fue compartido con su marido Pierre Curie y con el físico francés Henri Becquerel, quienes lo recibieron *“por su descubrimiento de la radiactividad espontánea”*. También recibió el Premio Nobel de Química en 1911 *“por el descubrimiento del radio y el polonio, el aislamiento del radio y el estudio de la naturaleza y compuestos de este destacable elemento químico”*.

Al respecto del Premio Nobel en Física (Curie fue la primera mujer que recibía un Premio Nobel), es conveniente señalar que, al principio, el comité seleccionador pretendía premiar solamente a Pierre y Henri, negándole el reconocimiento a Marie por ser mujer. Uno de los miembros de la Academia, el matemático Magnus Gösta Mittag-Leffler, avisó a Pierre de la situación y Pierre dijo que rechazaría el premio Nobel si no se reconocía también el trabajo de Marie. Esa respuesta hizo que la incluyeran en la nominación.

Dado que casi con toda seguridad Maria Salomea Skłodowska-Curie, más conocida como Marie Curie al acoger el apellido de su esposo Pierre Curie, es la persona más reconocida por la sociedad en general de entre todos los galardonados con el Premio Nobel que se presentan

en esta aportación y que por tanto su figura suele ser bastante conocida, los autores no vamos a extendernos mucho en su biografía y sí solo realzar su condición de matemática galardonada con el Premio Nobel (Figura 1), licenciatura que también poseía además de las ya sabidas de Física y Química. Marie había obtenido la Licenciatura en Física en 1893 y la de Matemáticas un año después, ambas en la Universidad de La Sorbona.



Figura 1. Premio Nobel de Física, en 1903 (izquierda) y de Química, en 1911 (derecha) concedidos a Marie Curie

María Salomea Skłodowska-Curie nació el 7 de noviembre de 1867 en Varsovia, Polonia. Era la quinta hija del profesor de Física y Matemáticas, Władysław Skłodowski, y de la maestra Bronisława Boguska. Marie estudió en la “Universidad flotante” de Varsovia, una institución clandestina patriótica de educación superior que admitía mujeres estudiantes, en la que también se enseñaba la cultura polaca, dado que en la Polonia de aquel tiempo, sometida por la Rusia zarista, se les negaba a las mujeres acceder a estudios superiores y comenzó su formación científica en dicha ciudad, sintiéndose muy atraída por la Física y las Matemáticas, lo que le hizo decidirse a tratar de salir de su país para poder estudiar Ciencias Físicas.

Para ello, Marie acordó con su hermana mayor, Bronisława, que ella le iba a ayudar económicamente con sus estudios de Medicina en París a cambio de que esta le ayudara a ella de igual forma dos años más tarde. Debido a eso, Marie trabajó durante dos años de profesora particular y como institutriz de niños en Varsovia (O'Connor and Robertson, sin fecha).

De acuerdo con ese trato, cuando su hermana Bronisława se casó en 1890 llamó a Marie para que se fuese a vivir con ellos en París, pero ella no pudo reunir el dinero suficiente para poder viajar. Lo hizo a finales de 1891 y nada más llegar a Francia se matriculó en la Universidad de la Sorbona y para poder integrarse cambió su nombre por el de Marie (Figura 2, izquierda). En ese tiempo tenía 24 años y tras vivir un tiempo con su hermana y su cuñado, consiguió alquilar una habitación en el Barrio Latino de París, cercano a la Universidad. Allí pudo estudiar intensamente durante el día y dar clases por la noche para su subsistencia, lo que la llevó a conseguir su licenciatura en Física en 1893 y en Matemáticas un año después.

En 1894, Marie conoció a Pierre Curie, un científico francés que trabajaba de instructor en la Escuela Superior de Física y de Química Industriales de París (Figura 2, derecha). Los presentó el físico polaco Józef Kowalski-Wierusz, quien se había enterado de que Marie estaba buscando un laboratorio con mayor espacio de trabajo y pensó que Pierre podía buscarle algo, lo que este encontró en la propia Escuela. Durante un año trabajaron juntos en el laboratorio de la misma y se casaron el 26 de julio de 1895, recorriendo toda Francia en bicicleta como viaje de luna de miel. La boda se celebró en Sceaux, de forma sencilla y sin ceremonia religiosa, recibiendo dinero de los invitados en lugar de regalos. A su regreso, el matrimonio

se centró en una gran actividad científica, para lo que convirtieron su casa en un laboratorio e invirtieron todo su tiempo libre en ir avanzando en sus investigaciones.



Figura 2. Marie Curie (izquierda) y Pierre y Marie Curie en 1903 (derecha)

El nacimiento de su primera hija, Irène, en 1897 no le afectó a Marie en sus investigaciones. Ese mismo año terminó sus estudios universitarios y fue becada. Publicó su primer trabajo científico, una monografía sobre la imantación del acero templado. Además, Marie, que estaba buscando un tema interesante para su tesis doctoral, se encontró con un descubrimiento casual que había hecho Antoine Henri Becquerel en febrero de 1896: la radiactividad natural. A partir de ahí, el matrimonio empezó a investigar ese fenómeno, descubriendo que no solo el uranio emitía los rayos descubiertos por Becquerel, sino que la pechblenda, un mineral que es extraído del uranio, era mucho más radioactivo que este.

En 1898, los Curie descubrieron el gas radón y la radiactividad del torio y anunciaron en julio de ese año el descubrimiento de un nuevo elemento también radioactivo, al que Marie nombró "polonio" en honor a su tierra natal (país que en ese momento estaba repartido entre tres imperios). A finales de ese año, los Curie descubrieron también otro nuevo elemento químico, el radio, del que afirmaron que emitía una reacción que era muchísimo mayor a la del uranio. Aunque esos descubrimientos les dieron un gran reconocimiento mundial, el matrimonio se negó a patentarlos para que la Ciencia pudiese profundizar más en ellos (O'Connor and Robertson, sin fecha).

Para finalizar estas notas y aunque su hija no era matemática, es conveniente indicar que Irene Joliot-Curie (París, 1897 - 1956), la hija de Marie, física y química francesa, y su esposo Frédéric Joliot, fueron galardonados con el Premio Nobel de Química en 1935 "*por sus trabajos en la síntesis de nuevos elementos radiactivos*" (Figura 3).



Figura 3. Frèderic e Irène Joliot-Curie

### 3. Matemáticos Premios Nobel en la modalidad de Física

#### 3.1 Hendrik Antón Lorentz, Premio Nobel de Física en 1902

Hendrik Antoon Lorentz (Figura 4, izquierda), físico y matemático neerlandés, recibió el Premio Nobel de Física en 1902 junto a su alumno Pieter Zeeman (Figura 4, derecha) *“por su investigación conjunta sobre la influencia del magnetismo en la radiación, originando la radiación electromagnética”*.

Lorentz nació en Arnhem, Holanda (Países Bajos), el 18 de julio de 1853, en el seno del matrimonio que formaban su padre, Gerrit Frederik Lorentz y su madre Geertruida van Ginkef. Cuando él contaba con cuatro años de edad, su madre murió, y en 1862 su padre se volvió a casar con Luberta Hupkes.

En 1866 ingresó en el primer centro de enseñanza media que se inauguró en Arnhem y al finalizar su quinto año se incorporó a la Universidad de Leyden en 1870, en la que se licenció en Matemáticas y Física, recibiendo el correspondiente título en 1871.

Obtuvo su grado de doctor en 1875, con 22 años, con una tesis en la que trataba los fenómenos de reflexión y refracción de la luz desde un punto de vista muy novedoso para la época. Tres años más tarde fue nombrado profesor titular de la cátedra de Física Teórica de la Universidad de Leyden y en 1878 consiguió la cátedra de Física Matemática de esa Universidad (Biografía y Vidas, sin fecha). En 1881, se casó con Aletta Catharina Kaiser. El matrimonio tuvo dos hijas y un varón.

En 1892 publicó su muy conocida obra *“La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants”* y en 1895 publicó *“Ensayo de una teoría sobre los fenómenos eléctricos y ópticos en los cuerpos en movimiento”*. El año 1902 recibió el Premio Nobel en Física, compartido con su discípulo Pieter Zeeman (Biografía y Vidas, sin fecha).

Lorentz, quien en 1904 descubrió las actualmente denominadas *“transformaciones de Lorentz”* en su honor, falleció el 4 de febrero de 1928, en Haarlem. Presidió hasta el día de su muerte, los Congresos Solvay y, en el año 1923, fue elegido miembro permanente del *“Comité de intelectuales para la cooperación internacional”* de la Liga de las Naciones, constituido, únicamente por los *“siete investigadores más destacados del mundo”*. Lorentz lo presidió en 1925 (O'Connor and Robertson, sin fecha).

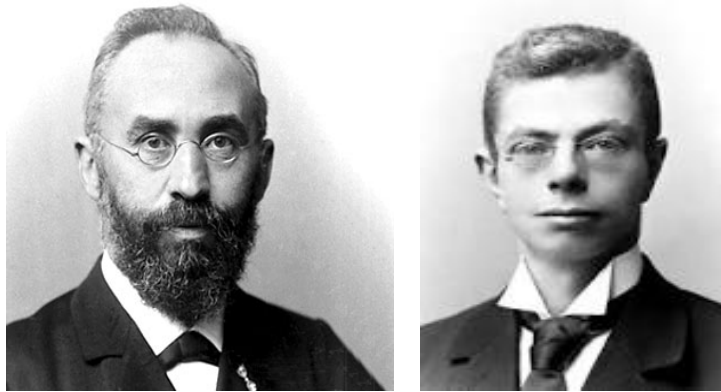


Figura 4. Hendrik Lorentz (izquierda) y Pieter Zeeman (derecha)

### 3.2 William Lawrence Bragg, Premio Nobel de Física en 1915

El matemático, químico y físico australiano, aunque de nacionalidad inglesa (también se le reconoce su nacionalidad australiana) William Lawrence Bragg (Figura 5, derecha) recibió el Premio Nobel de Física en 1915, junto con su padre, el físico William Henry Bragg (Figura 5, izquierda) "por sus contribuciones a la cristalografía de rayos X".

William Lawrence Bragg nació en Adelaida, Australia Meridional, el 31 de marzo de 1890. A los 15 años, en 1904 empezó estudiar Matemáticas, Física y Química en la Universidad de Adelaida, graduándose en 1908, a los 18 años.

Ese mismo año su padre fue contratado por la Universidad de Leeds, por lo que su familia se trasladó a Inglaterra y en el otoño de 1909 ingresó en el Trinity College de Cambridge, en el que se graduó en Matemáticas a pesar de estar en cama con neumonía cuando tuvo que hacer el examen. Más tarde, estudió Física, y se graduó en 1911. Fue profesor de la Universidad Victoria de Mánchester entre los años 1919 y 1937 y director del Laboratorio Nacional de Física en el curso 1937-1938. En 1938, la Universidad de Cambridge lo contrató como profesor de Física Experimental, siendo allí donde continuó investigando tras la Segunda Guerra Mundial.

En 1915 recibió el premio Nobel de Física junto con su padre. William Henry Bragg, siendo con 25 años la segunda persona más joven que ha recibido ese premio. Además, fue galardonado en 1931 con la medalla Hughes de la Royal Society "por su trabajo pionero en la elucidación de la estructura cristalina mediante análisis de rayos X" y en 1941 le fue concedido el título de Sir. Las investigaciones que estaba llevando junto a su padre sobre los fenómenos de refracción y difracción de los rayos X, le llevaron a desarrollar la actualmente conocida como "Ley de Bragg" (O'Connor and Robertson, sin fecha).

William Lawrence Bragg Falleció en Ipswich, Inglaterra, 1 de julio de 1971 y en su honor, se le puso su nombre, Bragg, al asteroide 11150.

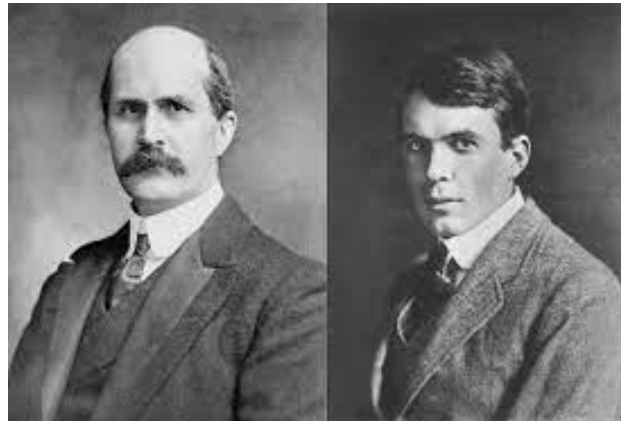


Figura 5. Willam Henry (padre, a la izquierda) y William Lawrence (hijo, a la derecha) Bragg.

Dado que su padre, William Henry Bragg (Wigton, Cumberland, 1862 - Londres, 1942) compartió el Premio Nobel con él, indicamos a continuación unas breves notas biográficas del padre, aunque este fue físico y no graduado en Matemáticas.

William Henry Bragg estudió en el King William's Collage, en la Isla de Man, y en el Trinity College de Cambridge. Fue profesor de Física y Matemáticas en las Universidades de Adelaida (1886-1908), Leeds (1909-1915) y Londres (1915-1923). Fue también profesor de Química en el Real Instituto de Gran Bretaña (1923-1942) y director del laboratorio de investigación Davy-Faraday. Fue uno de los primeros investigadores en el estudio de los rayos X. Cuando su hijo descubrió la ley de reflexión de los rayos X de una longitud de onda determinada al incidir en una superficie cristalina, él modificó un espectrómetro de Kirchhoff situando un cristal en la posición del prisma para estudiar el fenómeno. Ese aparato fue el primer difractor equipado con un detector en posición variable y permitió al padre y al hijo determinar la posición de los átomos en varias clases de cristales (O'Connor and Robertson, sin fecha).

### 3.3 Paul Adrien Maurice Dirac, Premio Nobel de Física en 1933

El ingeniero eléctrico, matemático y físico teórico británico Paul Adrien Maurice Dirac (Figura 6, izquierda) recibió el Premio Nobel de Física en 1933, junto al físico Erwin Schrödinger, por "*el descubrimiento de nuevas formas productivas de la teoría atómica*".

Paul Dirac nació en Bristol (Inglaterra), el 8 de agosto de 1902. Tuvo una hermana pequeña, Beatrice, y un hermano mayor, Reginald Charles Felix, que se suicidó a los 26 años, en 1924. Su infancia no fue muy dichosa debido a la rigidez y autoritarismo de su padre.

Tras realizar sus primeros estudios en la Bishop Primary School y en el Merchant Venturers Technical College, se graduó primero en Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Bristol en 1921 y más tarde, haciendo caso a su verdadera vocación, en Matemáticas en la misma Universidad, en 1923. Habiendo sido admitido en la Universidad de Cambridge para hacer el doctorado, desarrolló en 1926 una versión de la Mecánica Cuántica en la que unía los trabajos previos de Werner Heisenberg y Erwin Schrödinger en un único modelo matemático que describe el estado físico del sistema. Ese trabajo le valió su doctorado en Física por la Universidad de Cambridge.

En 1928 encontró la “ecuación de Dirac”, una ecuación relativista que le permitió predecir la existencia de la antipartícula del electrón, el positrón y dos años más tarde publicó su libro “Principios de la Mecánica Cuántica”, que pronto se convirtió en uno de los mejores libros de la materia. También introdujo la notación “corchete” y la función “delta de Dirac”. Por estos y otros descubrimientos, Dirac fue galardonado con el Premio Nobel en Física en 1933, que compartió con Erwin Schrödinger. Antes había obtenido la cátedra Lucasiana de Matemáticas de la Universidad de Cambridge, en la que ejerció como profesor de 1932 a 1969.

Los últimos años de su vida los pasó en la Universidad Estatal de Florida en Tallahassee, Florida, ciudad en la que falleció el 20 de octubre de 1984. En 1995 se colocó una placa en su honor en la Abadía de Westminster en Londres (O’Connor and Robertson, sin fecha).

Dirac era muy preciso, taciturno y callado (de hecho, se acuñó una unidad, el *dirac*, para la unidad mínima de palabras que se podían decir en una conversación. Graham Farmelo, en una reciente biografía que ha publicado sobre él, “The strangest man”, ha sugerido que tenía Síndrome de Asperger, ya que su lenguaje era muy literal y no solía hablar mucho.

Además de su modestia, eran notorias sus dificultades para relacionarse, su falta de empatía y su desinterés por las mujeres, aunque se casó en 1937 con la hermana del también físico Eugene Paul Wigner, con la que tuvo dos hijas, además de otros dos hijos que ella aportó de un matrimonio anterior y que adoptaron su apellido.

Aunque Dirac era un ateo reconocido, en 1963 declaró que consideraba a Dios como “un gran matemático que había usado una ciencia avanzada para crear el universo”. Y en una conferencia en 1971 mostró su escepticismo ante el hecho de que la vida hubiese resultado por casualidad y dijo que “se debe asumir que Dios existe” en relación a las leyes de la Física Cuántica (O’Connor and Robertson, sin fecha).

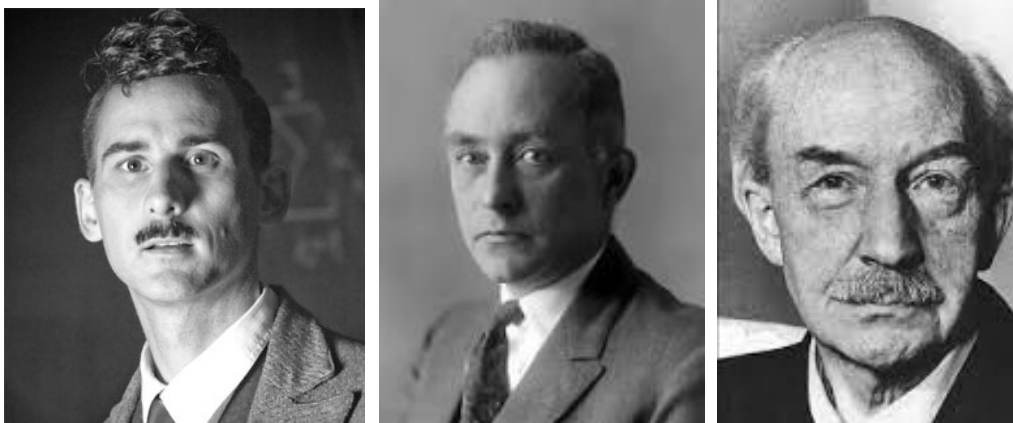


Figura 6. Paul Dirac (izquierda), Max Born (centro) y Walther Bothe (derecha)

### 3.4 Max Born, Premio Nobel de Física en 1954

El físico y matemático Max Born (Figura 6, centro) y el físico Walter Bothe (Figura 6, derecha) recibieron el Premio Nobel de Física en 1954 “por sus investigaciones fundamentales sobre la mecánica cuántica y, especialmente, por su interpretación estadística acerca de la función de

ondas” y por su “desarrollo del método de coincidencias y por sus descubrimientos relacionados con este”, respectivamente.

Max Born nació el 11 de diciembre de 1882 en Breslau (Alemania). De complexión muy débil, no fue a la escuela pública, sino que recibió formación básica en su casa hasta que pudo asistir al Gimnasio König Wilhelm. Estudió Física y Matemáticas en las Universidades de Breslau, Heidelberg, Zürich y Gotinga y se doctoró en esta última en 1907, bajo la dirección del matemático Felix Klein. En la Universidad coincidió con David Hilbert y Hermann Minkowski.

En 1909 empezó a estudiar la teoría de la relatividad especial de Albert Einstein y en 1912 se casó con Hedwig Ehrenberg, con quien tuvo seis hijos, si bien su relación no fue buena y a menudo él y su esposa vivían separados. En 1919, fue nombrado profesor titular en la Universidad de Frankfurt am Main, y en 1921 Profesor de Física Teórica en la Universidad de Gotinga. Entre sus alumnos se encuentran figuras posteriores de talla mundial como Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg, Pascual Jordan, Enrico Fermi, Fritz London, P.A.M. Dirac, Victor Weisskopf, J. Robert Oppenheimer, Walter Heitler y Maria Goeppert-Mayer. A él se le debe el conocido “ciclo de Born-Haber” (O’Connor and Robertson, sin fecha).

Born permaneció en Gotinga hasta abril de 1933, hasta que se trasladó junto a su familia a Inglaterra debido a la persecución nazi. Allí se convirtió en ciudadano británico en 1939 y permaneció en Edimburgo hasta su jubilación en 1953. Él y su esposa volvieron finalmente a Gotinga al año siguiente, donde falleció el 5 de enero de 1970 (López, 2017).

Sobre Born se cuenta la siguiente curiosa anécdota. Es sabido que el físico Albert Einstein (Ulm, Alemania, 1879 - Princeton, EEUU, 1955), considerado actualmente como el científico más importante y popular del siglo XX, obtuvo el Premio Nobel de Física en 1921 por sus explicaciones sobre el efecto fotoeléctrico y sus numerosas contribuciones a la física teórica (no por la Teoría de la Relatividad, como erróneamente se cree). Lo que ya no es tan conocido es que él y Born fueron muy amigos, aunque mantuvieron notables discrepancias científicas sobre la descripción de la naturaleza a partir de la mecánica cuántica, ya que Einstein no creía que la naturaleza estuviese regida por leyes estadísticas. De hecho, Born fue la persona a quien Einstein le dirigió la famosa frase “Dios no juega a los dados”. Born mantuvo toda su vida una admiración inmensa por Einstein, al que consideraba un maestro, reconociéndole una influencia incalculable en su trabajo y siempre trató de difundir la Teoría de la Relatividad, cuyo desarrollo consideraba genial y como él mismo afirmó, “decidí no trabajar en la Teoría de la Relatividad porque nunca podría llegar a la aportación genial de Einstein”.

### 3.5 Walther Wilhelm Georg Bothe, Premio Nobel de Física en 1954

El matemático, físico, químico e informático alemán Walther Wilhelm Georg Bothe recibió el premio Nobel de Física en 1954, junto con Max Born, por “la invención del método de las coincidencias en el empleo del contador Geiger, para el estudio de las radiaciones corpusculares, lo que le permitió seguir trayectorias más largas de rayos duros”.

Walther Wilhelm Georg Bothe nació el 8 de enero de 1891 en Oranienburg (Alemania). Entre 1908 y 1912 estudió Física, Química y Matemáticas en la Universidad de Berlín, en la que también se doctoró en Física, en 1914, bajo la dirección de Max Planck, con una Tesis que trataba sobre la teoría molecular de la refracción, la reflexión, la dispersión y la extinción.



Durante la Primera Guerra Mundial, sirvió como artillero en el ejército alemán y en 1915 fue capturado por los rusos y enviado a Siberia. Aprovechó su cautiverio para aprender ruso y continuar sus investigaciones, al tiempo que también se casó en 1920 con Barbara Below, que vivía en Moscú, con la que tuvo dos hijas.

Tras su regreso a Alemania en 1920, junto con su esposa, trabajó en el laboratorio radiactivo de Physikalisch-Technische Reichsanstalt, del que llegó a ser director en 1927. Durante ese tiempo, también fue profesor en la Universidad de Berlín. En 1931 obtuvo una cátedra en la Universidad de Giessen y en 1934 se convirtió en director del Instituto de Física del Instituto Max Planck de Investigación Médica en Heidelberg. Se trasladó a vivir a esa localidad, trabajando también en su universidad desde 1946 hasta 1957.

En 1929 investigó más el “efecto Compton” y en 1930 descubrió una nueva forma de radiación de berilio, lo que llevó a Sir James Chadwick a descubrir el neutrón en 1932. Más tarde, durante la Segunda Guerra Mundial investigó sobre la energía nuclear y usó el ciclotrón alemán para producir isótopos radiactivos para sus estudios médicos. Fue galardonado con la medalla Max Planck en 1953 y con el Premio Nobel en Física en 1954. Murió el 8 de febrero de 1957, a los 66 años de edad, en Heidelberg, Alemania (O’Connor and Robertson, sin fecha).

### 3.6 Eugene Paul Wigner, Premio Nobel de Física en 1963.

El físico y matemático húngaro Eugene Paul Wigner (Figura 7, izquierda) recibió el Premio Nobel de Física en 1963 *“por sus contribuciones a las teorías del núcleo atómico y de las partículas elementales y, en particular, el descubrimiento y aplicación de estas mediante los principios fundamentales de simetría”* Wigner compartió el Premio con la física estadounidense Maria Goeppert-Mayer y el físico alemán J. Hans D. Jensen, ambos *“por sus descubrimientos relacionados con la estructura nuclear de capas”*.

Eugene Paul Wigner nació en Budapest el 17 de noviembre de 1902. Mas tarde, adquirió la nacionalidad americana en 1937. Obtuvo el título de Dr. Ingeniero Licenciado en la Technische Hochschule de Berlín y desde 1938 fue Profesor de Física Matemática en la Universidad de Princeton hasta su jubilación, en 1971.

Entre 1936 y 1937 estuvo casado con Amelia Frank. Más tarde, en 1941 se casó con Mary Annette Wheeler, con la que tuvo dos hijos, David y Martha. El matrimonio duró hasta 1977 y dos años más tarde, volvió a casarse, esta vez con Eileen Clare-Patton Hamilton, con la que vivió hasta 1995. Erika Zimmerman fue la tercera de sus hijos (Wightman, 1995).

Wigner fue uno de los cinco científicos que informaron al presidente de los Estados Unidos Franklin D. Roosevelt en 1939 de la posible utilización militar de la energía atómica y durante la Segunda Guerra Mundial, entre 1942 y 1945, trabajó en el Proyecto Manhattan en la Universidad de Chicago, contribuyendo al diseño de reactores de plutonio. En 1947 se convirtió en Director de Investigación y Desarrollo en los Laboratorios Clinton.

Aparte del Premio Nobel en Física, que obtuvo en 1963, Wigner ha sido reconocido también por sus investigaciones con muchos otros premios. Entre ellos, la Medalla Max Plank, la Medalla al Mérito de los Estados Unidos, en 1946, el Premio Enrico Fermi, en 1958 y el Premio Átomos para la Paz, en 1960.

Wigner se jubiló como profesor de Física en la Universidad de Princeton en 1971, aunque sus actividades no disminuyeron ya que fue profesor visitante y conferenciante en diversas instituciones. Falleció de neumonía el 1 de enero de 1995, a los 92 años, en Princeton (Estados Unidos), siendo sepultado en Nueva Jersey (O'Connor and Robertson, sin fecha).

Como anécdota, indicar que Paul Dirac, otro de los matemáticos ya citados en esta aportación, que también fue Premio Nobel en Física, junto a Erwin Schrödinger, en 1933, fue primero un gran amigo de Wigner y más tarde sería su cuñado. Los dos se conocieron en las frecuentes visitas que Dirac hizo a la Universidad de Princeton a partir de la década de 1930. Ambos se hicieron muy amigos, respetando cada uno de ellos las cualidades del otro y Wigner le presentó a Dirac a su hermana menor, con quien este se casó en 1937 (Wightman, 1995).

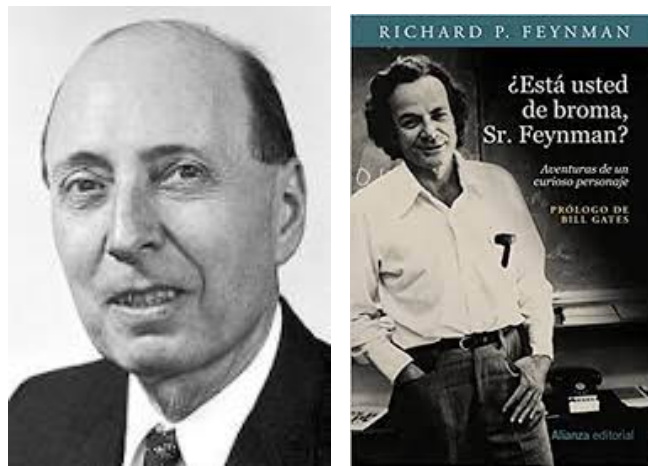


Figura 7. Eugene Paul Wigner (izquierda) y Richard Feynman (derecha)

### 3.7 Richard Phillips Feynman, Premio Nobel de Física en 1965.

El físico y matemático estadounidense Richard Phillips Feynman (Figura 7, derecha) recibió el Premio Nobel de Física en 1965 “por su trabajo fundamental en *Electrodinámica Cuántica, con profundas consecuencias para la física de las partículas elementales*”. Feynman compartió el Premio con el también físico estadounidense Julian Schwinger y el físico japonés Sin-Itiro Tomonaga, ambos “por sus trabajos sobre la teoría de renormalización”.

Richard Feynman nació el 11 de mayo de 1918 en el barrio de Manhattan, en Nueva York. Tanto su padre, Melville, como su madre, Lucille, eran miembros de familias judías, si bien su padre había nacido en Minsk (Bielorusia) y su madre en Estados Unidos. A los 5 años, Feynman tuvo un hermano que falleció solo al mes de nacer, lo cual le afectó mucho. Después, a sus 9 años, con la familia ya viviendo en Far Rockaway, nacería su hermana Joan. Desde el principio, su padre, muy interesado en la ciencia, y su madre, maestra, trataron de inculcarle ese gusto por la ciencia a su hijo: “Melville de aportó a la familia conocimiento y seriedad, Lucille, el humor y la narración de historias” (O'Connor and Robertson, sin fecha).

Richard Feynman, o Ritty, como sus amigos lo llamaban, aprendió mucha ciencia en la Enciclopedia Británica y estudió por su cuenta matemáticas elementales antes de entrar en la escuela. Incluso se construyó un laboratorio en su casa para experimentar con la electricidad.

Ya en la Far Rockaway High School, Feynman estudió muchas Matemáticas y en su último año ganó el Concurso de Matemáticas de la Universidad de Nueva York. Sin embargo,

tuvo bastantes problemas para entrar en la Universidad por ser judío, aunque finalmente pudo acceder al Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT) en 1935, donde obtuvo su grado en 1939, interesándose entonces mucho más por la Física que por la Matemáticas, en especial por la Teoría de la Relatividad. De hecho, en 1937, a Feynman le había entusiasmado la lectura de “Los Principios de la Mecánica Cuántica” de Dirac, a quien admiró y respetó después durante toda su vida (O’Connor and Robertson, sin fecha).

Feynman empezó el doctorado en el MIT, siendo después aceptado en Princeton por recomendación de uno de sus profesores, si bien fueron muchísimas las dificultades que tuvo para conseguir esa aceptación, solo por el hecho de ser judío: “¿Es Feynman judío? Nosotros no tenemos reglas definidas sobre los judíos, pero tenemos que mantener una proporción razonablemente pequeña de ellos en nuestro departamento debido a la dificultad de sacarles una plaza después”.

Sus estudios de doctorado, versados en las ideas que él había desarrollado durante su estancia en el MIT. fueron supervisados por John Wheeler. A su primera conferencia asistieron nada más y nada menos que Einstein, Pauli y von Neumann. Al respecto, Pauli comentó al final de la charla que: “Yo no creo que esta teoría sea correcta”.

Feynman se doctoró en Princeton en junio de 1942, poco antes de que los Estados Unidos entraran en la II Guerra Mundial. En aquel tiempo estaba trabajando también en la construcción de la bomba atómica (1941-42) y luego lo hizo en Los Alamos (1943-45). Como anécdota al respecto, decir que Feynman declaró muchos años después, en referencia al día 6 de agosto de 1945, cuando una bomba atómica aniquilaba de manera instantánea a más de 70.000 personas en la ciudad japonesa de Hiroshima, que:

*Yo estaba envuelto en esta juerga, bebiendo también y tocando borracho un tambor sentado en el capó de un Jeep; tocando el tambor con excitación mientras recorríamos Los Álamos al mismo tiempo que había gente muriendo y luchando en Hiroshima.*

En aquel tiempo, Feynman se casó con su novia de siempre, Arlene Greenbaum, quien poco después enfermó de tuberculosis, falleciendo en 1945. Después, él se casaría dos veces más, teniendo tuvo dos hijos con su tercera esposa (O’Connor and Robertson, sin fecha).

Tras finalizar la Guerra mundial, Feynman pasó por varios empleos, entre ellos profesor de Física Teórica en la Universidad de Cornell en 1945 y en el Instituto de Tecnología de California, aunque los primeros diez meses de ese trabajo los pasó en Brasil.

La principal contribución de Feynman fue a la Mecánica Cuántica, siguiendo el trabajo de su tesis doctoral. Introdujo los ahora llamados “diagramas de Feynman”, que son gráficos análogos a las expresiones matemáticas que permiten describir el comportamiento de los sistemas de partículas que interactúan. Todo ello le valió ser galardonado con el Premio Nobel en Física, en 1965, junto con Schwinger y Tomonoga. También, aparte de ese premio, Feynman recibió muchas distinciones por su trabajo. Fue elegido miembro de la American Physical Society, la American Association for the Advancement of Science, la National Academy of Science, y la Royal Society of London Entre otros premios que también recibió se encuentran el Albert Einstein Award, 1954, y el Lawrence Award, 1962.

Al principio de 1979, su salud empezó a deteriorarse al detectársele un cáncer de estómago. Tras la operación se recuperó por un tiempo corto, pero a finales de 1987 el cáncer se reprodujo de nuevo, esta vez en el abdomen. Falleció en Los Ángeles el 15 de febrero de 1988.

### 3.8 Subrahmanyan Chandrasekhar, Premio Nobel de Física en 1983

El físico teórico, astrofísico y matemático estadounidense de origen indio Subrahmanyan Chandrasekhar (Figura 8, izquierda), usualmente conocido por Chandra, recibió el Premio Nobel de Física en 1983, por “sus estudios teóricos sobre los procesos químicos importantes para la estructura y evolución de las estrellas”. Compartió ese Premio con el físico estadounidense William Alfred Fowler, “por sus estudios teóricos y experimentales sobre las reacciones nucleares de importancia en la formación de elementos químicos en el universo”.

Subrahmanyan Chandrasekhar (Chandra en adelante) nació el 19 de octubre de 1910 en Lahore, India (ahora Pakistan), pero pasó su niñez en Madrás. Chandra tuvo nueve hermanos. Un tío paterno suyo fue Sir Chandrasekhara Venkata Raman, ganador del premio Nobel en 1930 por su descubrimiento dos años antes de la “dispersión Raman y el efecto Raman”.

Chandra estudió en el Presidency College, University of Madras, junto a una vecina suya, Lalitha Doraiswamy, con quien más tarde se casaría. Antes, obtuvo una beca del gobierno indio para estudiar en Inglaterra, en el Trinity College, en 1930. Desde 1933 a 1937 estuvo en Cambridge, aunque regresó en 1936 a Madrás para casarse. El matrimonio no tuvo hijos

Chandra se graduó en la Universidad de Madrás y se doctoró en la de Cambridge. Después, trabajó en la Universidad de Chicago desde 1937 hasta su muerte, acaecida el 25 de agosto de 1995 en Chicago, Illinois. Su esposa y él ya se habían nacionalizado allí en 1953.

Chandra publicó más de 400 artículos y muchos libros sobre temas de investigación muy variados. Entre 1971 y 1983 investigó sobre la teoría matemática de los agujeros negros, y en la última etapa de su vida, trabajó en la teoría de las ondas gravitacionales en colisión. Fruto de ese enorme trabajo fueron las distinciones y premios que recibió. Además del Premio Nobel de Física en 1983, fue condecorado con las Medallas Real de la Royal Society (1962), Copley (1984), Bruce, de la Sociedad Astronómica del Pacífico, Henry Draper, de la Academia Nacional de Ciencias y la Medalla de Oro de la Real Sociedad Astronómica.

Chandra se jubiló en 1980 y continuó viviendo en Chicago, donde fue nombrado profesor emérito en 1985. Falleció el 21 de agosto de 1995 y fue enterrado en esa ciudad, después de sobrevivir a su esposa Lalitha (O'Connor and Robertson, sin fecha).



Figura 8. Subrahmanyan Chandrasekhar (Chandra, a la izquierda) y Roger Penrose (derecha)

### 3.9 Roger Penrose, Premio Nobel de Física en 2020

El matemático inglés Roger Penrose (Figura 8, derecha), recibió el Premio Nobel de Física en 2020 por *“el descubrimiento de que la formación de agujeros negros es una predicción robusta de la teoría general de la relatividad”*. Compartió ese Premio con el astrofísico alemán Reinhard Genzel y con la astrónoma estadounidense Andrea Mia Ghez por *“el descubrimiento de un objeto compacto supermasivo en el centro de nuestra galaxia”*.

Roger Penrose (nombrado Sir) nació el 4 de agosto de 1931 en Colchester, condado de Essex (Inglaterra). Su padre era físico y matemático y sus hermanos son Oliver, físico, Shirley, bióloga genética y Jonathan, gran maestro de ajedrez

Penrose pasó su niñez en London, Ontario (Canadá) donde trabajaba su padre en plena II Guerra Mundial y estudió en el University College School y en el College London, sacando las máximas calificaciones en Matemáticas. Con 24 años, cuando todavía era estudiante, introdujo la conocida como *“(matriz) inversa de Moore-Penrose”* y en la Universidad de Cambridge, en 1958, finalizó su Tesis Doctoral en Matemáticas titulada *“Métodos tensoriales en Geometría Algebraica”*, que fue dirigida por el profesor de Geometría y Astronomía Sir W. V. D. Hodge.

En esa década de los años 50, Penrose ideó y popularizó el conocido como *“triángulo de Penrose”* (un triángulo que parece un sólido tridimensional, pero que en la realidad no lo es), que describió como *“la imposibilidad en su forma más pura”*. Ese descubrimiento se gestó con motivo de su asistencia a una conferencia en Ámsterdam, en 1954, durante la cual pudo visitar una muestra de las representaciones de objetos imposibles del artista holandés M. C. Escher, que lo inspiraron y con quien pasó a mantener frecuentes intercambios de ideas. A su vez, Penrose también fue una fuente de inspiración para Escher cuando él y su padre le enviaron a Escher una copia de un artículo que ellos habían publicado sobre el diseño de una escalera que simultáneamente sube y baja. Sirviéndose de ese artículo, Escher produjo sus dos obras maestras: las cascadas ascendente y descendente.

Desde el curso 1956–57 hasta el 1986–87, Penrose trabajó en diferentes Universidades inglesas y americanas, realizando notables descubrimientos. Entre ellos, en 1974 introdujo los *“mosaicos de Penrose”*, formados a partir de dos mosaicos que solo pueden enlazar el plano de forma no periódica, y que son los primeros mosaicos que tienen una simetría rotacional quintuple. Otra notable invención son las *“redes de espín”* en 1971, presentes en la geometría del espacio-tiempo en la gravedad cuántica de bucles. Asimismo, popularizó lo que actualmente se conoce como los *“diagramas de Penrose”* (O'Connor and Robertson, sin fecha).

En Física, sus variados trabajos sobre la relatividad general han permitido la comprensión de los agujeros negros. Su *“teoría de Twistor”* ha producido avances en el conocimiento de las ecuaciones clásicas de la física matemática y sus teselaciones del plano son la base de los cuasicristales recientemente descubiertos. Toda esa gran obra científica le permitió ser galardonado con el Premio Nobel en Física en 2020, premio al que le han seguido muchísimos otros más y numerosas distinciones. Entre ellos, la Commandino Medal de la Urbino University (2017) por sus contribuciones a la historia de la ciencia, Doctorados Honorarios por las Universidades de Varsovia y Católica de Leuven, en 2005 y la Universidad de Nueva York en 2006, la Dirac Medal de la Universidad New South Wales en ese mismo año, la Copley Medal (2008), el Premio Fonseca de la Universidad de Santiago de Compostela (2011), la Ernst Medal (2012) y la De Morgan Medal por sus contribuciones a la Física Matemática.

Y previamente a la concesión del Nobel, Penrose fue también galardonado en 1971 con el Dannie Heineman Prize for Astrophysics. Fue elegido Fellow of the Royal Society en 1972. En 1975, junto con Stephen Hawking, fue galardonado con la Eddington Medal of the Royal Astronomical Society. En 1988 y también junto a Stephen Hawking, obtuvo el Wolf Foundation Prize for Physics. En 1989, obtuvo la Dirac Medal y el Prize of the British Institute of Physics. En 1990 la Albert Einstein Medal, en 1991, el Naylor Prize of the London Mathematical Society. Y desde 1992 hasta 1995, Presidente de la International Society on General Relativity and Gravitation

Actualmente, Penrose es Profesor Emérito de Matemáticas en la Universidad de Oxford, miembro emérito de Wadham College, Oxford, y miembro honorario del St John's College, Cambridge, y de la University College London (O'Connor and Robertson, sin fecha).

## 4. Matemáticos Premios Nobel en la modalidad de Química

### 4.1 Herbert Aaron Hauptman, Premio Nobel de Química en 1985

El matemático estadounidense Herbert Aaron Hauptman (Figura 9, izquierda) recibió el Premio Nobel de Química en 1985, junto a su antiguo profesor, director de su tesis y más tarde colaborador, el químico estadounidense Jerome Karle *“por sus destacados logros en el desarrollo de métodos directos para la determinación de estructuras cristalinas”*.

Herbert Aaron Hauptman nació en el barrio del Bronx, en Nueva York, el 14 de febrero de 1917. Se graduó en 1937 en la Universidad de Nueva York e hizo un un máster en la Universidad de Columbia en 1939. Tras participar en la II Guerra Mundial, se doctoró en Matemáticas en la Universidad de Maryland en 1954, con una tesis titulada *“An n-Dimensional Euclidean Algorithm”*, dirigida por quien luego sería su acompañante en recibir el Premio Nobel, Jerome Karle. En 1947 se matriculó también en el programa de doctorado en Filosofía de la misma universidad, obteniendo ese título en 1954.

Desde 1947, Hauptman colaboró con su director de tesis y antiguo profesor Jerome Karle en el Laboratorio de Investigación Naval de Washington en el desarrollo de métodos directos para la determinación de estructuras cristalinas, obteniendo los espectros correspondientes de difracción electrónica mediante instrumentos prácticos de su propia invención y utilizando para su interpretación métodos probabilísticos originales. Según él mismo cuenta en su biografía, *“nuestra colaboración se demostró fructífera, pues su formación como físico-químico, y la mía como matemático, se complementaban muy bien”*.

En 1970 se unió al grupo de investigación de la Fundación Médica de la Universidad Estatal de Nueva York en Búfalo, en la que fue profesor de Biofísica y después Director de Investigación en 1972. En 1985 fue galardonado con el Premio Nobel de Química, junto a Karle. Aparte de ese premio, recibió otros numerosos reconocimientos y fue Doctor Honoris Causa por varias universidades (O'Connor and Robertson, sin fecha).



Figura 9. Herbert Hauptman (izquierda) y Anthony Pople (derecha)

## 4.2 John Anthony Pople, Premio Nobel de Química en 1998

John Anthony Pople (Figura 9, derecha), químico y matemático inglés, recibió el Premio Nobel de Química en 1998 *“por su desarrollo de métodos computacionales en química cuántica”*. Compartió ese Premio con el físico teórico austriaco, nacionalizado estadounidense, Walter Kohn, quien lo recibió *“por su desarrollo de la teoría del funcional de densidades”*.

John Anthony Pople nació en Burnham-on-Sea, Inglaterra, el 31 de octubre de 1925. Tras interesarse desde muy joven por las Matemáticas, ingresó con una beca en la Universidad de Cambridge en 1943, graduándose en Matemáticas en 1946 y doctorándose más tarde en Química en 1951.

Estuvo en el Trinity College de Cambridge, desde 1951 a 1958, y fue profesor de Matemáticas allí desde 1954 a 1958. Dirigió la Basic Physics Division of the National Physical Laboratory en Middlesex, Inglaterra, desde 1958 a 1964. A mediados de la década de los 60 del siglo pasado se trasladó a Estados Unidos, quedándose a trabajar y a vivir allí el resto de su vida. En 1961 fue nombrado miembro de la Royal Society de Londres.

Desde 1964 hasta 1993 fue profesor de la Carnegie-Mellon University en Pittsburgh, Pennsylvania y también lo fue desde 1986 hasta 1993 de la Northwestern University en Evanston, Illinois. En 2003 fue nombrado Sir por parte de la reina Isabel II de Inglaterra.

Su investigación se centró en la Química Cuántica. Primeramente, desarrolló una teoría de los cálculos aproximados de los orbitales moleculares sobre sistemas de enlace pi en 1953, que era muy similar a la introducida por Rudolph Pariser y Robert Parr el mismo año, razón por la cual fue denominada *“método Pariser-Parr-Pople”* (O'Connor and Robertson, sin fecha).

También trabajó en métodos de computación cuánticos, que permitieron el desarrollo de la Química Computacional, que permite investigar las propiedades de las moléculas en los procesos químicos. Esas aportaciones le valieron ser galardonado con el Premio Nobel de Química en 1998, seis años antes de que falleciera el 15 de marzo de 2004 en su residencia de Sarasota, en el estado de Florida.

## 5. Matemáticos Premios Nobel en la modalidad de Economía

El nombre oficial del Premio Nobel de Economía es el de “Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel”. La Economía no estaba inicialmente en las modalidades de los premios Nobel que se entregaban, y el premio antes citado empezó a entregarse en 1969.

### 5.1 Leonid Kantoróvich, Premio Nobel de Economía en 1975

En 1975, el economista, matemático e ingeniero Leonid Kantoróvich (Figura 10, izquierda) fue el primer, y de hecho único, ciudadano de la Unión Soviética en recibir ese galardón. Lo compartió con el estadounidense de origen holandés Tjalling Koopmans “por sus contribuciones a la teoría de la asignación óptima de recursos”.

Según él mismo indicó en su autobiografía (Kantoróvich, 1975), Leonid Vitaliyevich Kantoróvich nació en San Petersburgo (Leningrado), el 19 de enero de 1912, cuando la ciudad aún era la capital del Imperio ruso. Se doctoró en Matemáticas en 1930, en la Facultad de Matemáticas y Mecánica de la Universidad Estatal de Leningrado, con tan solo 18 años. Cuatro años más tarde, obtuvo plaza de profesor en la misma universidad, en la que permaneció hasta 1960.

Kantoróvich trabajó principalmente en análisis funcional, teoría de la aproximación y teoría de operadores, y se acercó a lo que ahora se conoce como programación lineal, previamente a que esta fuera descubierta por George Dantzig. Empezó a tener contactos con la economía en 1938, cuando el laboratorio de la firma Plymood le encargó el análisis de la distribución de materias primas para la maximización del equipo productivo, para lo cual se planteó maximizar una función lineal sujeta a restricciones sobre un politopo convexo, dándose cuenta de que esa función podía ser aplicada también para resolver algunos problemas de carácter económico. Escribió un libro en 1939 sobre métodos matemáticos de organización y planificación de la producción, que no sería publicado hasta después de la guerra, en 1959. Dirigió en Instituto de Matemáticas de la URSS y el Instituto de Control de la Economía Nacional.

Se casó con Natalie Iljina, física, en 1938 y tuvo dos hijos. En 1965 fue reconocido con el Premio Lenin, a pesar de que siempre sufrió muchas dificultades con sus escritos debido a la situación política de su país, dada la hostilidad general de las autoridades hacia sus principios sobre la economía matemática. Obtuvo el Premio Nobel de Economía en 1975 y falleció el 7 de abril de 1986, en Moscú.



Figura 10. Leonid Kantoróvich (izquierda) y John Nash (derecha)



## 5.2 John Forbes Nash, Premio Nobel de Economía en 1994

John Forbes Nash, matemático estadounidense (Figura 10, derecha), recibió el Premio Nobel de Economía en 1994, “por sus aportes a la teoría de juegos y los procesos de negociación”. Lo compartió con el también matemático estadounidense Reinhard Selten y con el farmacólogo, empresario y profesor de economía húngaro de origen judío John Harsanyi. También recibió el Premio Abel en 2015, junto al matemático canadiense Louis Nirenberg “por sus sorprendentes y seminales contribuciones a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y sus aplicaciones para el análisis geométrico”.

John Forbes Nash nació en Bluefield, Virginia Occidental, el 13 de junio de 1928. Su padre había estudiado Ingeniería Eléctrica y su madre había sido profesora durante diez años antes de casarse, el 6 de septiembre de 1924. De pequeño era un niño solitario e introvertido, al que le gustaban mucho los libros y muy poco jugar con otros niños.

En 1941, cuando ya había empezado a mostrar gran interés por las Matemáticas y la Química, entró en el Colegio Bluefield y más tarde, tras ganar una beca en el concurso George Westinghouse, se matriculó en 1945 en la actual Universidad Carnegie Mellon para estudiar Ingeniería Química, aunque su profesor John Synge, que reconoció su especial talento, le convenció para que se especializara en Matemáticas (O'Connor and Robertson, sin fecha).

Tras licenciarse en Matemáticas en 1948 fue aceptado para realizar estudios de postgrado en las universidades de Harvard, Princeton, Chicago y Michigan. Él creía que la mejor opción era Harvard, pero se decidió por Princeton al serle ofrecida una beca mejor, por lo que entró allí en septiembre de 1948. En 1949, mientras preparaba su doctorado, escribió el artículo por el que sería premiado cinco décadas después con el Premio Nobel. Se doctoró en 1950 con una tesis de menos de treinta páginas titulada "Juegos No-Cooperativos", realizada bajo la dirección de Albert Tucker, en la que describía lo que hoy se conoce como “*equilibrio de Nash*”.

Al año siguiente empezó a trabajar para la RAND Corporation (una institución de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos dedicada a la investigación estratégica) y en 1952 entró como profesor en el Massachusetts Institute of Technology. Tres años más tarde aceptó una beca de la Universidad de Princeton. La carta de recomendación que presentó contenía una única frase: “*Este hombre es un genio*”.

En 1952 conoció a una enfermera, Eleanor Stier, con la que tuvo un hijo, John David Stier, del que se desentendió y se negó a casarse con ella. En 1957 se casó con una exalumna suya del MIT, la salvadoreña Alicia Lardé López-Harrison, con la que tuvo a su segundo hijo, John Charles Martin Nash, que tuvo esquizofrenia.

Tras un año de matrimonio se le diagnosticó a él mismo esquizofrenia y a partir de ahí su vida dio un vuelco muy grande. Inicialmente, su enfermedad mental fue calificada de paranoia. Más tarde, su comportamiento era errático. Nash parecía creer que todos los hombres que usaban corbatas rojas formaban parte de un grupo de comunistas que lo perseguían y conspiraban contra él: los criptocomunistas”. Finalmente, en uno de sus discursos sobre la Hipótesis de Riemann en la Sociedad Estadounidense de Matemática de la Universidad de Columbia en 1959, Nash se mostró incomprensible en sus palabras, lo que hizo darse cuenta a sus colegas de que algo estaba mal (O'Connor and Robertson, sin fecha).

Entre 1959 y 1970, Nash estuvo internado en numerosos hospitales y centros psiquiátricos

de Nueva Jersey, en los que entraba y salía, hasta que decidió suspender su tratamiento con fármacos, lo que causó la reaparición de las alucinaciones. Al respecto de esa época de su vida, Nash, quien se curó parcialmente, escribió en 1994 lo siguiente:

*He estado alrededor de cinco a ocho meses en hospitales de Nueva Jersey, siempre en contra de mi voluntad y siempre tratando de dar algún argumento legal para salir de ellos. Y sucedía que después de haber estado hospitalizado por un tiempo bastante largo, al fin lograba renunciar a mis hipótesis delirantes y volvía a concebirme a mí mismo como un ser humano de circunstancias más convencionales; podía volver así a mis investigaciones matemáticas; en estos periodos, por así decirlo, de racionalidad forzada, tenía éxito en realizar algunas investigaciones matemáticas respetables. De esta manera fue posible la investigación para *Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général*; o trabajar sobre la idea a la cual el profesor Hironaka llamó "la estallante transformación de Nash"; y la investigación para la estructura de arco de las singularidades y analiticidad de las soluciones de problemas de función implícita con datos analíticos.*

*Pero tras mi retorno a las hipótesis delirantes, que parecían sueños a finales de la década de 1960, me transformé en una persona de pensamiento delirante, aunque de comportamiento relativamente moderado; y eso me ayudaba a evitar las hospitalizaciones y el tratamiento directo de psiquiatras.*

*Y así transcurrió algo más de tiempo. Gradualmente empecé a rechazar inteligentemente algunas líneas de pensamiento que estaban influenciadas de manera delirante y que habían sido características de mi orientación. Esto comenzó a notarse más claramente con el rechazo del pensamiento orientado políticamente como algo que es esencialmente un desperdicio inútil de esfuerzo intelectual. Así que, actualmente, he vuelto a pensar de manera racional, en el estilo que es característico de los científicos.*

Con referencia a las Matemáticas, Nash trató varias ramas además de la Teoría de Juegos. Entre ellas, la Geometría Diferencial, en la que dio nombre al "teorema de inmersión de Nash", que dice que toda variedad Riemanniana puede embeberse isométricamente en el espacio euclídeo y propuso la conjetura que resolvieron los matemáticos españoles Javier Fernández de Bobadilla y María Pe Pereira en 2011. También tiene publicaciones sobre ecuaciones en derivadas parciales.

Gracias a todas esas numerosas publicaciones y contribuciones a las áreas de Matemáticas y Economía, Nash, y aparte de ser galardonado con el Premio Nobel de Economía en 1994 por sus trabajos sobre Teoría de Juegos, Nash recibió también otros numerosos premios y distinciones a lo largo de su vida. De entre ellos, pueden destacarse el Premio de Teoría John von Neumann, en 1978, el Premio Leroy P. Steele de la Sociedad Americana de Matemáticas, en 1999 y el Premio Abel, en 2015.

Precisamente, puede decirse que la concesión del Premio Abel fue la causante indirecta de su muerte, pues Nash falleció junto a su esposa, Alicia Lardé López-Harrison, el 23 de mayo de 2015, en un accidente de tráfico en Turnpike, en el peaje de Nueva Jersey, cuando volvían en el viaje de regreso tras haber recibido el Premio Abel de manos del rey Harald V, en Oslo (O'Connor and Robertson, sin fecha).

En 1998, Sylvia Nasar publicó la novela "A Beautiful Mind" (publicada en español en 2012 bajo el título "Una mente prodigiosa". En 2001 se estrenó la película homónima, dirigida por Ron Howard y protagonizada por Russell Crowe (la película se tituló "Una mente maravillosa" en España y "Una mente brillante" en América Latina). Esa película estaba basada en la vida de John Nash y ganó cuatro Óscars, incluyendo la categoría de mejor película. No constituía una biografía exacta, ya que existen varias diferencias entre la realidad y la ficción (Figura 11). A este respecto, el propio Nash declaró:

*Tiene errores y licencias, incluso en los lugares de rodaje. Por ejemplo, no se rodó en la Universidad de Princeton, que es donde yo estudié, aunque sí aparece un edificio que hace pensar en Princeton. Sin embargo, reconoce que lo positivo fue que supo llamar la atención en todo el mundo sobre la esquizofrenia.*



Figura 11. El libro y la película sobre John Nash

### 5.3. Reinhard Selten, Premio Nobel de Economía en 1994.

El matemático y economista alemán Reinhard Selten (Figura 12, izquierda) recibió el Premio Nobel de Economía en 1994 "por su precursor análisis del equilibrio en la teoría de los juegos no cooperativos". Selten compartió el Premio con los estadounidenses John Harsanyi y el anteriormente citado John Forbes Nash, ya que los tres realizaron trabajos complementarios sobre la misma teoría.

Reinhard Selten nació en Breslau en 1930. Estudió Matemáticas y Ciencias Económicas en la Universidad de Francfort, en la que se doctoró en 1961, inició su carrera docente y trabajó durante diez años como profesor ayudante. En 1969 pasó a ser profesor de Economía en la Universidad Libre de Berlín y de allí se trasladó en 1972 al Instituto de Economía Matemática de la Universidad de Bielefeld, y en 1984, a la Universidad del Rhin Friedrich Wilhelm de Bonn, como catedrático de Ciencias Económicas. En ella impartió docencia y se jubiló después de finalizar su etapa docente como profesor emérito.

Selten se interesó por la teoría de los juegos aplicada al mundo de las relaciones económicas complejas y centró sus estudios en juegos de sociedad, "donde se utilizan estrategias basadas en lo que harán los contrarios". Para Selten, la suya "es una teoría matemática de conflicto y cooperación", con la que trata de analizar matemáticamente el comportamiento de

protagonistas racionales, de desarrollar estrategias de decisión y formas de actuación en situaciones conflictivas. Fue el primero en perfeccionar el equilibrio de Nash en su aplicación a la interacción estratégica, teoría que utilizó para analizar la competición entre un número limitado de vencedores (O'Connor and Robertson, sin fecha). Su noción de equilibrio, el "equilibrio de Selten" se convirtió en referencia para juegos secuenciales, aunque él mismo publicó posteriormente un artículo mostrando que, si bien su equilibrio perfecto tenía sentido desde el punto de vista de la lógica matemática, su capacidad predictiva del comportamiento real de las personas no era muy grande. Respecto a los juegos cooperativos dijo lo siguiente:

*En juegos de cooperación cada negociador debe empezar por ceder en algo para que todos obtengan más de lo que tenían antes de empezar a negociar. Todos ceden, pero todos acaban ganando más de lo que ceden.*

Selten también destacó por su trabajo en racionalidad limitada, y puede ser considerado como uno de los padres de la economía experimental. Desarrolló un ejemplo de un juego llamado "El caballo de Selten" a causa de su extensa forma representativa. Fue un conocido defensor del idioma internacional esperanto, lengua que hablaba en su familia. De hecho, la Sociedad Española de esperanto le dedicó un perfil necrológico en su página web tras su fallecimiento, acaecido el 23 de agosto de 2016 en Poznań.



Figura 12. Reinhard Selten (izquierda), Robert Aumann (centro) y Lloyd Shapley (derecha)

#### 5.4 Israel Robert John Aumann, Premio Nobel de Economía en 2005

El matemático alemán de nacionalidad estadounidense e israelí Israel Robert John Aumann (Figura 12, centro) recibió el Premio Nobel de Economía en 2005, que compartió con el economista estadounidense Thomas C. Schelling, de la Universidad de Maryland, "por ampliar la comprensión del conflicto y la cooperación a través análisis basados en la Teoría de Juegos".

Israel Robert John Aumann nació en Fráncfort del Meno, Alemania, el 8 de junio de 1930. Ocho años después, su familia emigró a Estados Unidos huyendo del nazismo. Se graduó en Matemáticas en el City College de Nueva York, en 1950. Obtuvo la maestría en 1952 y el doctorado en 1955, ambos en el Instituto Tecnológico de Massachussets. Unas conferencias de

George Whitehead fueron las causantes de que decidiese hacer su doctorado sobre la Teoría de los Nudos. Su tesis fue publicada en 1956 en los "Annals of Mathematics".

Aumann es miembro de los "Profesores para un Israel Fuerte", grupo político de la derecha israelí, contrario a la retirada unilateral israelí de la Franja de Gaza en 2005. También se ha prodigado en los medios israelíes defendiendo la idea de que dar tierra a los palestinos es erróneo desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, a la que ha dedicado sus principales investigaciones.

Actualmente es miembro de las Academias Nacionales de Ciencias estadounidense, israelí y alemana y profesor del centro para el Estudio de la Racionalidad de la Universidad Hebrea de Jerusalén, en Israel. Fue presidente de la Unión Matemática de Israel y el primer miembro de la Sociedad de la Teoría del Juego, sociedad internacional para profundizar en el desarrollo de esta teoría y sus aplicaciones (O'Connor and Robertson, sin fecha).

## 5.5 Lloyd Shapley, Premio Nobel de Economía en 2012

Lloyd Shapley (Figura 12, derecha), matemático y economista estadounidense, recibió el Premio Nobel de Economía en 2012, compartido con el también economista estadounidense Alvin E. Roth, "por su trabajo en la teoría de las asignaciones estables y el diseño de mercado". Su trabajo se ha centrado en teoría de juegos, de la cual está considerado un gran especialista.

Lloyd Stowell Shapley, hijo del astrónomo Harlow Shapley, nació el 2 de junio de 1923, en Cambridge (Massachussets), Con 20 años, siendo estudiante en la Universidad de Harvard, fue reclutado por el ejército de los EE. UU y nombrado sargento del Cuerpo Aéreo del Ejército en Chengdu, China. Al finalizar la guerra, se matriculó en la Universidad de Harvard y se graduó con un título B.A. en Matemáticas en 1948. Después, trabajó durante un año en la RAND Corporation y volvió a la Universidad de Princeton, donde finalizó su doctorado en Filosofía en 1953.

En su tesis, siguiendo las ideas de Francis Ysidro Edgeworth, introdujo el conocido como "valor de Shapley" y otros conceptos de la Teoría de Juegos. Tras la misma, continuó en Princeton un corto espacio de tiempo antes de volver a la Rand corporación, donde estuvo desde 1954 hasta 1981. Desde esa fecha fue profesor en la Universidad de California en Los Ángeles (UCLA), finalizando su etapa docente como profesor emérito de los departamentos de Matemáticas y Economía (Roth and Shapley, 2012).

Shapley se casó con Mariam y tuvieron dos hijos. En 1950, junto a Mel Hausner, John Forbes Nash y Martin Shubik, patentó el conocido juego de mesa "So Long Sucker" y es considerado por muchos expertos como la personificación misma de la teoría de juegos. Falleció el 12 de marzo de 2016, en Tucson (Arizona), a los 92 años de edad, a consecuencias de la fractura de una cadera.

## 5.6 Leonid Hurwicz, Eric Maskin y Roger B. Myerson, Premios Nobel de Economía en 2007

Leonid Hurwicz, Eric Maskin y Roger B. Myerson (Figura 13), matemáticos estadounidenses (Hurwicz era de ascendencia polaca), recibieron conjuntamente el Premio

Nobel de Economía en 2007 *“por establecer las bases de la teoría del diseño de los mecanismos, que determina cuándo los mercados están trabajando de manera efectiva”*.

Leonid Hurwicz nació en Moscú, el 21 de agosto de 1917, en el seno de una familia polaca judía, que al poco de nacer Leonid volvió a Varsovia, pero que al ser perseguida por su condición de judíos tuvo que escapar nuevamente de Polonia en 1939. Leonid fue obligado a trabajar en un campo de trabajo soviético. Después se refugió en Suiza, luego en Portugal, y finalmente pudo emigrar a Estados Unidos, donde se reencontró con su familia en 1940.

Por petición de su padre, obtuvo su título en Derecho por la Universidad de Varsovia en 1938. Sin embargo, su verdadera vocación se gestó en las clases que recibía de economía. Realizó cursos en Inglaterra, en la London School of Economics, y en Ginebra, en el Institute of International Studies. Ya residiendo en Estados Unidos, estudió en las Universidades de Chicago y de Harvard. En la primera de ellas conoció a su esposa, Evely Jensen, que le había sido asignada como asistente. El matrimonio tuvo 4 hijos (MCN biografías, sin fecha).

Su investigación se centró en la Economía Matemática, la Teoría de Modelos y la Teoría de la Empresa. Así, fue uno de los primeros economistas en reconocer la importancia de la Teoría de Juegos, y fue pionero en su aplicación.

Hurwicz fue hospitalizado en junio de 2008, por una insuficiencia renal, falleciendo a la semana de su ingreso, en Minneapolis, el 24 de junio.

Eric S. Maskin nació el 12 de diciembre de 1950, en Nueva York. Obtuvo su título de Licenciado en Matemáticas en la universidad de Harvard en 1972, el de doctor en Matemáticas Aplicadas en 1976, y realizó un máster por la Universidad de Cambridge en 1977.

En los años 1976 y 1977 trabajó como investigador en la universidad de Cambridge, luego enseñó en el MIT desde 1980 hasta 1984. En 1985 se trasladó a la Universidad de Harvard para ocupar la prestigiosa cátedra Louis Berkman de Economía. Desde el año 2000 es profesor en el Institute for Advanced Study en Princeton y actualmente es el editor de la prestigiosa publicación *Economic Letters*.

A mediados de los años 70 del siglo pasado comenzó a trabajar en lo que se conoce como el área de la teoría de "la implementación". En su discurso de aceptación del premio Nobel en 2007, el 8 de diciembre de ese año, Maskin explicó que la teoría de mecanismos puede ser entendida como la parte de "ingeniería" en la teoría económica.

El tercero de la terna de matemáticos galardonados con el Premio Nobel en Economía en 2007 es Bruce Roger Myerson

Myerson nació el 29 de marzo de 1951 en Wilmette, Illinois y estudió en la Universidad de Harvard, donde obtuvo el grado *summa cum laude* en Matemáticas Aplicadas en 1973 y el doctorado en 1976. Su tesis doctoral se titulaba *“Una teoría de los juegos cooperativos”*.

Fue profesor de Economía en la Kellogg School of Management de la Universidad de Northwestern durante 25 años, desde 1976 a 2001. Allí desarrolló la investigación que le condujo a la obtención del Nobel. También fue investigador en la Universidad Bielefeld entre 1978 y 1979 y profesor visitante en la Universidad de Chicago en dos etapas: de 1985 a 1986, y de 2000 a 2001. Este último año fue nombrado profesor de Economía de esa Universidad.

Es miembro de la Academia Americana de las Artes y las Ciencias, la Academia Nacional de Ciencias, y el Consejo de Relaciones Exteriores. Recibió varios títulos honoríficos, y el Premio Jean-Jacques Laffont en 2009.



Figura 13. Leonid Hurwicz (izquierda), Eric Maskin (centro) y Roger Myerson (derecha)

## 6. Matemáticos Premios Nobel en la modalidad de Literatura

Solo hay un único caso hasta el momento de que un matemático haya sido galardonado con el Premio Nobel de Literatura: el matemático y literato español José Echegaray y Eizaguirre.

### 6.1 José Echegaray y Eizaguirre, Premio Nobel de Literatura en 1904

El ingeniero de caminos, canales y puertos, dramaturgo, político y matemático español José Echegaray y Eizaguirre (Figura 14) recibió el Premio Nobel de Literatura en 1904 *“como reconocimiento a las numerosas obras que, de forma individual y original, han revivido las grandes tradiciones del teatro español”*. Fue el primer español que recibió ese premio y a pesar de ser Literatura la modalidad en la que lo recibió, está considerado como el matemático español más grande del siglo XIX. El insigne matemático español Julio Rey Pastor afirmaba de él lo siguiente: *“Para la matemática española, el siglo XIX comienza en 1865 y comienza con Echegaray”*. José Echegaray compartió ese Premio con el escritor francés Frédéric Mistral, *“en reconocimiento a la originalidad fresca e inspiración verdadera de su producción poética, la cual refleja fielmente el escenario natural y espíritu nativo de su gente, y, adicionalmente, su trabajo significativo como un filólogo provenzal”*.

José Echegaray y Eizaguirre nació en Madrid el 19 de abril de 1832, aunque por razones familiares pasó su infancia en Murcia. Fue en esa ciudad, en el Instituto de Segunda Enseñanza, donde comenzó su afición por las Matemáticas. Después, se trasladó a Madrid, consiguiendo el título de Bachiller en el Instituto San Isidro e ingresó en 1848 en la Escuela de Caminos, obteniendo allí el título de Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos con el número uno de su promoción, desplazándose seguidamente a Almería y Granada para incorporarse a su primer trabajo (Sánchez, 2003). En aquel tiempo leía las obras tanto de Goethe, Homero y Balzac, como las de matemáticos como Gauss, Legendre y Lagrange.



En 1854 fue profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos, de la que fue Secretario y también simultaneó esas clases con las de la Escuela de Ayudantes de Obras Públicas. Con 32 años de edad fue elegido miembro de la Real Academia de las Ciencias Exactas. Durante esa etapa y hasta su fallecimiento publicó muchas obras sobre Física y Matemáticas.

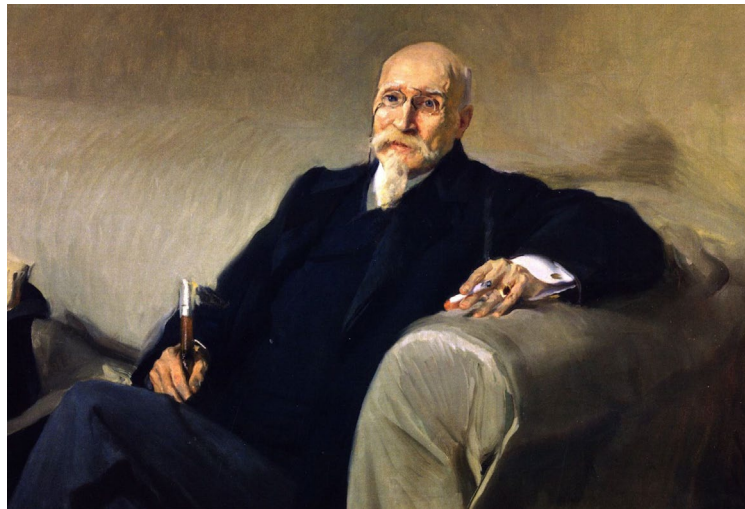


Figura 14. Echeagaray pintado por Joaquín Sorolla

Echeagaray tuvo también una destacada participación en política. En 1868 fue nombrado Director General de Obras Públicas y al año siguiente Ministro de Fomento (1870-1872) y de Hacienda (1872-74). En este último ministerio realizó la Ley de Bases de Ferrocarriles y se le concedió al Banco de España el carácter de banco nacional con el monopolio de emisión de billetes (Figura 15).



Figura 15. Antiguo billete de curso legal con la imagen de Echeagaray en un tiempo posterior

En 1865, comenzó su actividad literaria, fruto de la cual fueron sus más de 70 aportaciones fundamentalmente obras de teatro, algunas de ellas en verso. En 1896 fue elegido miembro de la Real Academia Española.

En 1904, le fue concedido el Premio Nobel de Literatura, que compartió con el escritor y poeta francés en lengua occitana Frédéric Mistral (1830-1914), convirtiéndose así en el



primer español en recibir un premio Nobel. El premio le fue entregado en Madrid, el 18 de marzo de 1905, por el rey y la comisión sueca organizadora. Su concesión, no obstante, escandalizó a las vanguardias literarias españolas y en particular, a los escritores de la generación del 98, aunque sus obras triunfaban en ciudades como Londres, París, Berlín y Estocolmo.

Echegaray ocupó numerosos cargos durante toda su vida. Fue presidente del Ateneo de Madrid (1898-1899), Presidente de la Asociación de Escritores y Artistas Españoles (1903-1908), miembro de la Real Academia Española, donde ocupó el sillón "e" minúscula entre 1894 y 1916, Senador vitalicio (1900) y dos veces presidente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1894-1896 y 1901-1916). Fue el primer presidente de la Sociedad Española de Física y Química, creada en 1903, catedrático de Física Matemática de la Universidad Central de Madrid (1905), Presidente de la sección de Matemáticas de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1908) y primer Presidente de la Sociedad Matemática Española (1911). En 1907, a propuesta de Ramón y Cajal, la Academia de Ciencias creó la "Medalla Echegaray" concediéndosele a él la primera (Sánchez, 2003).

Echegaray mantuvo una gran actividad hasta el mismo día de su muerte, el 14 de septiembre de 1916, en Madrid. Así lo atestiguan los 25 o 30 tomos de Física Matemática que escribió en la etapa final de su vida. Con 83 años, él mismo comentaba: "No puedo morirme, porque si he de escribir mi Enciclopedia elemental de Física matemática, necesito por lo menos 25 años."

## 6.2 Bertrand Arthur William Russell, Premio Nobel de Literatura en 1950

El filósofo, matemático, lógico y escritor británico Bertrand Arthur William Russell (Figura 16) recibió el Premio Nobel de Literatura en 1950 "en reconocimiento a sus variados y significativos escritos en los que defiende los ideales humanitarios y la libertad de pensamiento".

Bertrand Arthur William Russell, Tercer conde de Russell, nació el 18 de mayo de 1872 en Trellech, Monmouthshire, en el seno de una de las familias aristocráticas más prominentes del Reino Unido. Sus padres fueron John Russell, vizconde de Amberley y Katrine Louisa Stanley. Su abuelo paterno fue lord John Russell, primer conde de Russell, quien fue dos veces primer ministro con la reina Victoria. Su abuelo materno fue Edward Stanley, 2º barón Stanley de Alderley. Además, era ahijado de John Stuart Mill, quien, aunque nunca conoció a Russell, ejerció una profunda influencia en su pensamiento político a través de sus escritos.

Russell quedó huérfano a la edad de seis años, tras fallecer primero su madre y su hermana de difteria y seguidamente su padre, quien no pudo recuperarse de esas pérdidas. Él y su hermano Frank se fueron a vivir con sus abuelos paternos, donde él pasó mucho tiempo en la biblioteca, empezando allí su amor por la Literatura y la Historia. No asistió a ningún colegio, siendo educado por tutores y preceptores. Llevaba una vida muy solitaria y escribía en griego sus reflexiones sobre la vida en un cuaderno. También aprendió muy rápidamente francés y alemán. A los 11 años su hermano lo instruyó en geometría euclidiana, teoría que le entusiasmó, aunque se quedó decepcionado cuando su hermano le dijo que para poder demostrar una proposición tendría que aceptar primero ciertos axiomas, lo cual llegó a asumir, aunque sus dudas sobre dichos axiomas marcarían su obra.

En 1890, Russell ingresó en el Trinity College de Cambridge para estudiar Matemáticas y durante su cuarto año, en 1894, también Ciencias Morales (el nombre por el que entonces se

denominaba a la Filosofía). El mismo año de su graduación se casó con la estadounidense Alys Pearsall Smith, varios años mayor que él. Más tarde contrajo otros tres matrimonios, con Dora Black, en 1921, Patricia Spencer, en 1936 y Edith Finch, en 1952, ya con 80 años, respectivamente, teniendo un total de tres hijos (O'Connor and Robertson, sin fecha).

En 1900, escribió "Los principios de la Matemática" y poco después comenzaría su colaboración con su profesor de Cambridge, el matemático A. N. Whitehead, con quien escribió los tres volúmenes de los Principia Mathematica, la que sería su obra cumbre y en la que deseaba reducir la Matemática a la Lógica.

En 1950, Russell recibió el Premio Nobel de Literatura por su vasta obra en la que defendía los ideales humanitarios y la libertad de pensamiento. Excepto en la última etapa de su vida, él siempre fue un destacado activista social pacifista contra la guerra y defendió el antiimperialismo. Por ello, en la Primera Guerra Mundial fue encarcelado durante seis meses por la publicación de artículos y panfletos. Después le cogió la Segunda Guerra Mundial en Chicago, adonde había ido en 1938, invitado por la Universidad para dar unas conferencias de Filosofía y fue allí cuando pasó de su pacifismo habitual a un apoyo claro a las fuerzas aliadas contra el ejército nazi. Tras esa guerra, se dedicó plenamente a tratar de evitar la guerra nuclear y asegurar la paz mediante una adecuada organización internacional, iniciando una etapa de activismo político que provocaría su segunda encarcelación a los 90 años.

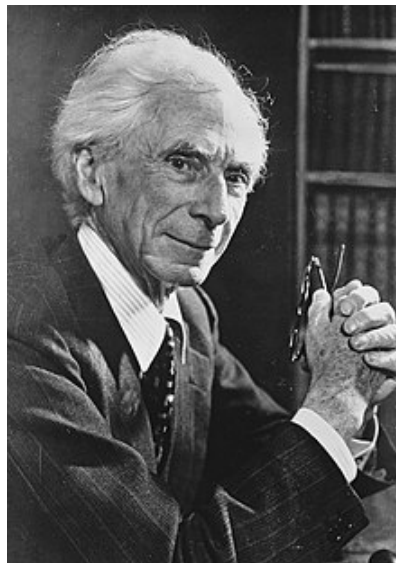


Figura 16. Bertrand Russell en 1957

Con respecto a su obra relacionada con la Lógica y las Matemáticas, Russell tuvo una gran influencia en la lógica matemática moderna. Su primer libro matemático, "Ensayo sobre los fundamentos de la geometría" lo publicó en 1897. En él, muy influido por Kant, se mostraba contrario al esquema espacio-tiempo de Einstein. Muy interesado en la definición de número, Russell estudió los trabajos de George Boole, Georg Cantor y Augustus De Morgan y entre 1897 y 1903 publicó varios artículos. Su último trabajo, "Introducción a la filosofía matemática", lo escribió a mano mientras estaba en la cárcel por sus actividades antibélicas durante la Primera Guerra Mundial (O'Connor and Robertson, sin fecha).

Russell falleció el 2 de febrero de 1970 en Penrhyndeudraeth, Gwynedd, con 97 años de edad, en brazos de su cuarta esposa, Edith Finch. Tras su fallecimiento, el Trinity College de Cambridge, su segundo hogar, le rindió un homenaje, colgando en sus paredes una placa conmemorativa en su memoria.

## Referencias

- [1] KANTORÓVICH, Leonid. *Autobiografía*, 1975. Disponible en <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1975/kantorovich/25950-autobiography-1975>
- [2] MORALES MEDINA, MIGUEL ÁNGEL. *Blog Gaussianos*. Disponible en <https://www.gaussianos.com/matematicos-que-han-recibido-un-premio-nobel/>
- [3] NÚÑEZ VALDÉS, Juan. *Las mujeres y los Premios de Matemáticas*. Revista Pensamiento Matemático IX:1 (abril 2019), 113-147.
- [4] O' CONNOR, J.J. AND ROBERTSON, E.F. *Biografías de matemáticos*. Mac Tutor, Saint Andrews University. Sin fecha. Disponible en <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/>
- [5] ROTH, Alvin E., SHAPLEY, Lloyd S. *Lloyd S. Shapley: Biographical*. Disponible en <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2012/shapley/biographical/>
- [6] SÁNCHEZ RON, José Manuel. *José Echegaray, matemático. 13 biografías de astrónomos españoles de referencia en el siglo XX*. La Gaceta de la RSME, 6:3 (2003), 743-764.
- [7] WIGHTMAN, A. S. *Eugene Paul Wigner 1902-1995*. Notices of the American Mathematical Society. 42:7 (1995), 769-771.
- [8] VARIOS AUTORES. *Biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea*. Disponible en <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/lorentz.htm>
- [9] VARIOS AUTORES. *MCN Biografías*. Disponible en <http://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key>

### Sobre el autor:

*Nombre:* Juan Núñez Valdés

*Correo Electrónico:* jnvaldes@us.es

*Institución:* Universidad de Sevilla, España.

*Nombre:* Luis Rabasco González

*Correo Electrónico:* luragon01@gmail.com

*Institución:* Universidad de Sevilla, España.

# Juegos y rarezas matemáticas

## Matemáticas védicas

### Vedic Mathematics

Santiago Higuera de Frutos

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 171–183, ISSN 2174-0410  
Recepción: 1 Oct'21; Aceptación: 20 Nov'21

1 de abril de 2022

#### Resumen

En 1965 se publicó el libro «*Vedic Mathematics*», de Bharati Krishna, con una recopilación de procedimientos que permiten la realización de cálculos aritméticos de manera mental, sin lápiz ni papel. El autor afirma que se trata de una recopilación de los métodos matemáticos descritos en los antiguos *Vedas*. Hay serias dudas acerca de la veracidad de dicha afirmación, pero los procedimientos descritos en el libro ofrecen una herramienta valiosa que puede favorecer el aprendizaje de las matemáticas entre los más pequeños. En este artículo se explican los fundamentos de algunos de estos algoritmos matemáticos.

**Palabras Clave:** Matemáticas védicas, Cálculo mental, Cálculo aritmético

#### Abstract

In 1965, the book «*Vedic Mathematics*», by Bharati Krishna, was published with a compilation of procedures that allow arithmetic calculations to be carried out mentally, without pencil or paper. The author claims that it is a compilation of the mathematical methods described in the ancient *Vedas*. There are serious doubts about the veracity of this statement, but the procedures described in the book offer a valuable tool that can favour the learning of mathematics among the little ones. This article explains the fundamentals of some of these mathematical algorithms.

**Keywords:** Vedic Mathematics, Mental arithmetic, mental calculation.

## 1. Introducción

Sri Bharati Krishna Tirthaji fue un monje hindú que vivió en India entre 1884 y 1960. Sus conocimientos de sánscrito le permitieron estudiar en profundidad los «*Vedas*», los antiguos textos sagrados del hinduismo. En 1965, cinco años después de su muerte, se publicó su libro «*Matemáticas Védicas*» [1]. Bharati Krishna afirmaba haber redescubierto el antiguo método matemático de los *Vedas* a partir los escritos originales en sánscrito. Afirmaba que el sistema estaba basado en dieciséis *sutras*, o fórmulas matemáticas, que abarcan todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas.

El libro de Bharati Krishna describe diversos procedimientos para realizar operaciones aritméticas que facilitan la utilización de cálculos mentales, sin utilizar lápiz y papel. El método se podría comparar a otros existentes, como el método Trachtenberg [2], los descritos por Meyer [3] y los señalados por Stigler [4].

En el prefacio del libro de Bharati Krishna, el propio editor alude a las dudas acerca de la veracidad de que los métodos de cálculo descritos provengan realmente de los Vedas. S. G. Dani, profesor en el Indian Institute of Technology de Bombay, asegura que no hay evidencias científicas de que los métodos descritos por Bharati Krishna fueran conocidos en la época mencionada de los Vedas (entre 200 y 800 A.C) e incluso señala que algunos de los procedimientos matemáticos descritos se basan en conceptos posteriores que no eran conocidos en esa época. No obstante, considera que se trata de un trabajo de gran valor, producto de los conocimientos matemáticos de Bharati Krishna y de su dilatada experiencia en la experimentación con números [5].

Alex Bellos, en su libro «*Alex's adventures in numberland*» [6], menciona haber encontrado algunos de los procedimientos de cálculo de Bharati Krishna en el libro de Fibonacci «*Liber Abaci*» [7], por ejemplo el correspondiente al sutra «*En vertical y cruzando*». Es claro que algunos de los artificios matemáticos descritos en el libro de Bharati ya eran comunes en Europa durante el renacimiento. Lo que no se sabe es si estos métodos procedían de India. Conviene recordar que el libro de Fibonacci fue el primero que recogió en Europa el sistema de numeración indo-arábigo.

Al margen de la veracidad o no de que los métodos de cálculo descritos procedan de la antigüedad, o sean una recopilación de procedimientos de cálculo mental realizada por el autor, hay que destacar el valor que pueden aportar para enseñar matemáticas a los niños. El propio Bharati Krishna menciona este asunto en el prólogo de su libro.

Nacho Ruíz destaca algunas de las ventajas que aportan los métodos de cálculo aritmético de las Matemáticas Védicas, frente a los métodos tradicionales [8]:

1. Sencillez: son fáciles de enseñar y de aprender
2. Flexibilidad: se pueden utilizar métodos diferentes para hacer las mismas cosas
3. La unión de sencillez y flexibilidad favorece la creatividad de los alumnos, que pueden desarrollar sus propios métodos de resolución de los problemas
4. Las operaciones se resuelven en una sola línea, lo que permite la realización de los cálculos de manera mental, sin lápiz ni papel, favoreciendo el desarrollo de la memoria y la agilidad y capacidad mental

En los años posteriores a la publicación del libro de Bharati Krishna, diversos matemáticos han profundizado y desarrollado los métodos védicos. Si bien las principales aplicaciones tienen que ver con las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división, exponenciación y extracción de raíces), existen aplicaciones a la trigonometría, la geometría, la derivación, la integración y la resolución de sistemas de ecuaciones, entre otras [9; 10].

Existen algunos intentos de utilizar la algoritmia de los procedimientos de cálculo de las matemáticas védicas para su aplicación a cálculos con ordenador. Algunos autores afirman que la implementación de las técnicas de las matemáticas védicas en la arquitectura de alguno de los componentes de los procesadores aumenta la velocidad en las operaciones y reduce el tamaño de los mismos [11; 12; 13; 14]. También se han desarrollado filtros para el tratamiento de señales [15].



Figura 1. Portada de la edición actual del libro *Vedic Mathematics* de Sri Bharati Krishna

Los métodos védicos son interesantes y les resultarán divertidos a los amantes de la aritmética. Se trata de técnicas operativas que se pueden aplicar para la realización de cálculos mentales, como gimnasia del cerebro o como métodos para constatar algunas propiedades de los números enteros. Los métodos más sencillos pueden ayudar a motivar a los más pequeños en el aprendizaje de las matemáticas. Permiten la utilización de diferentes procedimientos para la resolución de las operaciones, y ello favorece la utilización de la competición y el juego a la hora de practicar la aritmética.

El objetivo de este artículo es dar a conocer el método védico a las personas que no lo conocen. A modo de muestra, en los siguientes apartados se explicarán algunas de las técnicas que se pueden utilizar para realizar algunas operaciones aritméticas. El lector interesado en profundizar más sobre las matemáticas védicas encontrará en el libro «Multiplica como nadie» de Nacho Ruíz una buena introducción [8]. También son muy interesantes y se han utilizado en la preparación de este artículo las referencias [9; 10; 16; 17].

## 2. Multiplicaciones de números de dos cifras

Los números de dos cifras van desde el número 10 hasta el número 99. El producto de dos de estos números estará comprendido entre 100 y 9801. El resultado de estas multiplicaciones será siempre un número de 3 o de 4 cifras. Sea  $a$  la primera cifra del primer operando y  $b$  su segunda cifra. Esto es, el primer operando será el número  $ab$ , donde  $a$  y  $b$  son sus dos cifras y cada una de ellas puede valer: 0, 1, 2..., 9. Análogamente, sean  $c$  y  $d$  las dos cifras que componen el segundo operando,  $cd$ . Si se realiza la multiplicación con el algoritmo tradicional, las operaciones que hay que realizar son las siguientes:

$$ab \times cd = d \times b + d \times a \times 10 + c \times b \times 10 + c \times a \times 100$$

Por ejemplo, si los operandos fueran 32 y 74, su producto sería:

$$32 \times 74 = (4 \times 2 + 4 \times 3 \times 10) + (7 \times 2 \times 10 + 7 \times 3 \times 100) = 128 + 2240 = 2368$$

Se puede ver que hay que hacer cuatro productos de dos cifras y luego sumar un número que puede tener 2 o 3 cifras con otro que puede tener 3 o 4 cifras. Las multiplicaciones por 10 o por 100 realmente no se hacen, van sobreentendidas por la forma en que se colocan los números al operar el algoritmo. En la parte izquierda de la figura 2 se muestra el algoritmo tradicional para esta operación.

Reordenando las operaciones individuales, el resultado de la multiplicación de  $ab \times cd$  se puede calcular de la siguiente manera:

$$ab \times cd = a \times c \times 100 + (a \times d + b \times c) \times 10 + b \times d$$

Para el mismo ejemplo anterior, su producto sería:

$$32 \times 74 = 3 \times 7 \times 100 + (3 \times 4 + 2 \times 7) \times 10 + 2 \times 4 = 2100 + 260 + 8 = 2368$$

El esquema que hay que seguir para realizar la operación es el de la parte derecha de la figura 2, que en la literatura sobre matemáticas védicas se asocia al sutra «*En vertical y cruzando*».

Figura 2. Izda: algoritmo tradicional para multiplicar dos números de dos cifras. Centro: algoritmo védico. Dcha: esquema de la operación realizada según el sutra «en vertical y cruzando»

Esta forma de organizar la operación tiene la ventaja de que se pueden ir calculando las cifras del resultado de manera individual, con lo que se facilita realizar la operación en la cabeza, sin utilizar lápiz y papel. Además, las cifras del resultado se pueden calcular operando de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. La manera de proceder para calcular las cifras del resultado es la siguiente:

- Lado izquierdo:  $a \times c$ .
- Cifra central:  $a \times d + b \times c$ . Si el resultado de esta operación es mayor que 9, las decenas resultantes hay que sumárselas a la cifra izquierda dejando como cifra central del resultado solo las unidades
- Cifra derecha:  $b \times d$ . Como antes, si el resultado fuera mayor que 9, las decenas se sumaran a la cifra central. Si como consecuencia de ello, la cifra central pasara de 9, las decenas se pasarán al lado izquierdo.

En la descripción anterior se ha puesto «lado izquierdo» pues, según la operación concreta, podrá constar de 1 o de 2 cifras. La parte central de la figura 2 muestra cómo se podría organizar el algoritmo si se hace con lápiz y papel. Se ha calculado primero  $7 \times 3$ , y se ha escrito 21. A continuación se ha calculado  $3 \times 4 + 7 \times 2$ , que da 26, escribiendo el 2 debajo del 1 del resultado anterior. Por último, se ha calculado  $4 \times 2$ , escribiendo el 8 en su lugar. La suma muestra el resultado final.

Resulta más difícil explicarlo con palabras que hacerlo siguiendo el esquema de la parte derecha de la figura 2. Al principio se puede practicar utilizando lápiz y papel, pero es fácil ejercitarse a hacerlo de cabeza. A algunas personas, al hacerlo de cabeza, les resulta más sencillo calcular primero la cifra central, y luego el resto. Al principio puede parecer más sencillo operar de derecha a izquierda, pero con un poco de práctica, se opera mejor de izquierda a derecha.

### 3. Multiplicación de números de 3 cifras

Los números de tres cifras van desde el 100 hasta el 999. El resultado de multiplicar dos números de tres cifras estará comprendido entre 10000 y 998001, con lo que tendrá 5 o 6 cifras. El esquema para realizar la operación según el método védico es el de la parte izquierda de la figura 3. Como en el caso de los productos de números de dos cifras, al operar con lápiz y papel se irán escribiendo las cifras individuales del resultado en una línea, pudiendo operar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. En la parte derecha de la figura 3 se puede ver la aplicación a un caso concreto.

Con tres cifras, operar de cabeza es más complicado, pero con un poco de práctica también se pueden obtener buenos resultados. En cualquier caso, si se hace con lápiz y papel, resulta bastante más sencillo que el algoritmo tradicional.

Un caso particular es el de tener que multiplicar un número de 3 cifras por uno de 2 cifras. En ese caso, se opera como indica la figura 4. Se omite el cálculo de la cifra central. Las cifras del

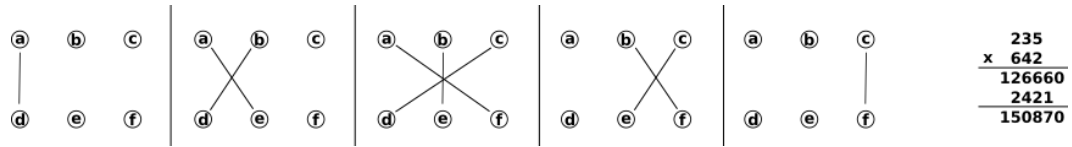


Figura 3. Izda: esquema védico para el producto de dos números de tres cifras. Dcha: aplicación a un caso concreto y forma de operar con lápiz y papel

lado izquierdo se calculan alineando el número de dos cifras al lado izquierdo y utilizando los dos esquemas de productos de la izquierda. Las cifras del lado derecho se calculan alineando el número de dos cifras al lado derecho y operando con los dos esquemas de la derecha del método general.

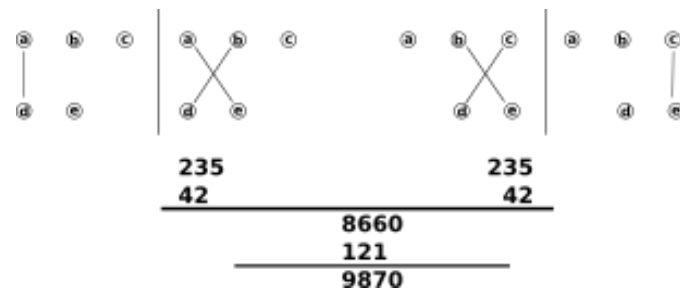


Figura 4. Esquema védico para el producto de un número de tres cifras por uno de dos cifras

Aunque el método descrito para calcular el producto de un número de 2 cifras por uno de 3 cifras es sencillo, también se podría utilizar el método general para números de 3 cifras, poniendo un cero delante del número de 2 cifras para convertirlo en un número de 3 cifras.

#### 4. Multiplicación de números de cuatro cifras

Los números de cuatro cifras son los comprendidos entre el 1000 y el 9999. El producto de dos de estos números estará comprendido entre 1000000 y 99980001. Por tanto, estos resultados siempre tendrán 7 u 8 cifras. El esquema para realizar la multiplicación es el de la figura 5, donde se indica cómo calcular las siete cifras. La octava, de haberla, se obtendrá cuando la cifra de la izquierda sea mayor que 9.

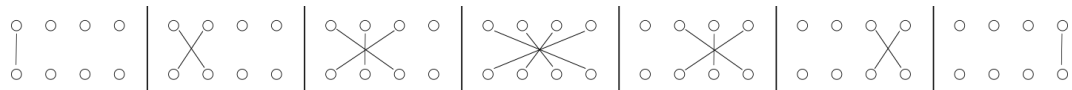


Figura 5. Esquema védico para el producto de dos números de cuatro cifras

El esquema puede parecer complicado, pero la operación que resulta es más sencilla de realizar que con el algoritmo tradicional. En la parte izquierda de la figura 6 se muestra la operación para un caso concreto utilizando el algoritmo tradicional; en la parte derecha de la figura se muestra la misma operación realizada con el esquema védico.



$\begin{array}{r} 6545 \\ \times 3278 \\ \hline 52360 \\ 45815 \\ 13090 \\ 19635 \\ \hline 21454510 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6545 \times 3278 \\ \hline 18746870 \\ 260764 \\ 1 \\ \hline 21454510 \end{array}$
--	--

Figura 6. Izda: multiplicación tradicional de dos números de cuatro cifras. Dcha: multiplicación de dos números de cuatro cifras utilizando el algoritmo védico

Una vez más, el algoritmo védico, además de ser más sencillo, permite realizar la operación en menos líneas y operando de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Si se realiza un conteo de las operaciones individuales de cada algoritmo, en ambos casos se realizan 16 productos de dos números de una cifra, 2 sumas de una cifra, 2 sumas de dos cifras y 2 sumas de tres cifras. Pero mientras que en el algoritmo tradicional hay que realizar 2 sumas de cuatro cifras, en el algoritmo védico se realiza una sola de esas sumas.

El caso particular de la multiplicación de un número de 4 cifras por uno de 3 cifras se muestra en la figura 7. Como se hacía en el apartado anterior al multiplicar un número de 3 cifras por uno de 2 cifras, hay que ir desplazando el número de menos cifras y utilizar solo una parte de los esquemas de multiplicación. Algo similar sucede al multiplicar un número de 4 cifras por uno de 2 cifras. En la figura 8 se muestra un ejemplo resuelto, indicando los esquemas de operaciones que hay que realizar en cada desplazamiento del número de 2 cifras.






				
$\begin{array}{r} 6545 \\ 237 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6545 \times 237 \\ \hline 1285735 \\ 26543 \\ \hline 1551165 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6545 \\ 237 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6545 \\ 237 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6545 \\ 237 \end{array}$

Figura 7. Esquema védico para el producto de un número de cuatro cifras por uno de tres cifras




		
$\begin{array}{r} 2368 \\ 32 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2368 \\ 32 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2368 \\ 32 \end{array}$
$\begin{array}{r} 2368 \times 32 \\ \hline 63466 \\ 1231 \\ \hline 75776 \end{array}$		

Figura 8. Esquema védico para el producto de un número de cuatro cifras por uno de dos cifras

En cualquier caso, se podrían añadir ceros delante de los números con menos cifras y utilizar el esquema general de cálculo.

## 5. Realización de restas

Existe un método general para la realización de cualquier tipo de resta, que puede ser muy didáctico para practicar con los más pequeños. Para un adulto que sepa restar por el método tradicional, seguramente no aporta muchas ventajas. Se puede consultar la referencia [9] para aprender su funcionamiento. Aquí solo se va a describir cómo realizar determinados tipos concretos de restas, que permiten su realización de cabeza de manera sencilla, y que resuelven problemas habituales en la vida cotidiana.

En la literatura sobre matemáticas védicas se denominan «bases primarias» a los números múltiplos de 10, por ejemplo, 10, 100, 1000, .... Se denominan «bases de trabajo» o también «bases secundarias», a los números acabados en 0 que no son potencia exacta de 10, por ejemplo 50, 250, 500, ....

Se va a explicar cómo restar un número de una base. Para ello, los libros sobre matemáticas védicas dicen que se utiliza el sutra «*todos de nueve y el último de diez*», por el motivo que quedará claro a continuación.

Supóngase que se quiere realizar la resta  $100 - 17$ . El resultado se obtiene, de izquierda a derecha, restando cada cifra del sustraendo (17) de 9, excepto la última que se restará de 10. En el ejemplo indicado, el resultado de la resta será 83 (Se ha hecho de izquierda a derecha  $9 - 1$  y  $10 - 7$ ). La figura 9 muestra el esquema de la operación aplicado a otro caso concreto.

Para que funcione el método, el número de cifras del sustraendo tiene que ser igual que el número de ceros de la base. Si tuviera menos, se completará a la izquierda con ceros. Por ejemplo,  $1000 - 17 = 1000 - 017 = 983$ .

Se puede utilizar como minuendo una base que no sea primaria. Por ejemplo, si se quisiera hacer la resta  $5000 - 248$ , se podría descomponer (mentalmente) en  $4000 + (1000 - 248)$ , lo que equivale a restar de 1000 y poner a la izquierda del resultado una unidad menos que la base, esto es:  $5000 - 248 = 4752$ .

Si el sustraendo tuviera el mismo número de cifras que el minuendo, habría que ajustar la cifra de la izquierda de acuerdo a la operación concreta, por ejemplo,  $3000 - 1732 = (2000 - 1000) + (1000 - 732) = 1268$

Si el número que hay que restar acaba en cero, se hace la resta quitando el último cero a la base y al sustraendo y se añade un cero al resultado:  $100 - 30 \rightarrow 10 - 3 = 7 \rightarrow 70$ .

El lector puede comprobar lo sencillo que resulta hacer las operaciones de cabeza. Puede ser de utilidad para calcular «las vueltas» de pequeñas compras. Por ejemplo, para calcular cuánto dinero se debe devolver al pagar con un billete de 20 euros una compra de 6,45 euros, se puede hacer  $2000 - 645 = 1355 \rightarrow 13,55$  euros.

$$\begin{array}{r}
 1000 - 468 \\
 \begin{array}{r}
 | \quad | \quad | \\
 9910 \\
 | \quad | \quad | \\
 532
 \end{array}
 \end{array}$$

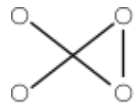
Figura 9. Ejemplo de resta de izquierda a derecha con el método «*Todos de nueve y el último de diez*»

## 6. Multiplicación de números próximos a una base

Se va a explicar un procedimiento sencillo para multiplicar de cabeza dos números que se encuentren cercanos a una base primaria. En la figura 10 se muestra el esquema de lo que se va a explicar a continuación.

Supóngase que se quiere multiplicar  $12 \times 14$ . Son números próximos a la base 10. El procedimiento consiste en formar un cuadro, poniendo a la derecha de cada número su diferencia con la base, con su signo. La parte izquierda del resultado se obtiene sumando uno de los números con la diferencia a la base del otro. Da igual cuál de los dos operandos se escoja, el resultado es

el mismo. En el ejemplo, la parte izquierda del resultado sería  $12 + 4 = 14 + 2 = 16$ . La parte derecha del resultado se obtendrá multiplicando con su signo la columna de las diferencias. En el ejemplo, la parte derecha del resultado sería  $2 \times 4 = 8$ . Al juntar la parte izquierda y la parte derecha se obtiene el resultado de la multiplicación, en este caso 168.



$$\begin{array}{r}
 \mathbf{12} \quad \mathbf{+2} \\
 \mathbf{14} \quad \mathbf{+4} \\
 \hline
 \mathbf{16} \quad \mathbf{/} \quad \mathbf{8} \\
 \mathbf{168}
 \end{array}$$

Figura 10. Ejemplo de multiplicación de dos números próximos a una base

Un caso particular sería cuando el producto para obtener la parte derecha de un número mayor que 9. En ese caso, las decenas se añadirán a la parte derecha. Por ejemplo, para multiplicar  $13 \times 17$ , la parte izquierda da inicialmente  $13 + 7 = 17 + 3 = 20$ . Al operar la columna de las diferencias se obtiene  $3 \times 7 = 21$ , con lo que el 2 habrá que sumarlo a las decenas de la parte izquierda, resultando finalmente  $13 \times 17 = 221$ .

Otro caso particular se da si uno de los operandos está por encima de la base y el otro por debajo de la base. Por ejemplo, al operar  $13 \times 9$ . En este caso, el producto de las diferencias da  $-3$ . Lo que habrá que hacer es extraer una decena de la parte izquierda y dejar como parte derecha el complemento a 10. La figura 11 muestra el procedimiento.

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{13} \quad \mathbf{+3} \\
 \mathbf{9} \quad \mathbf{-1} \\
 \hline
 \mathbf{12} \quad \mathbf{/} \quad \mathbf{-3} \\
 \mathbf{11} \quad \mathbf{/} \quad \mathbf{7} \\
 \mathbf{117}
 \end{array}$$

Figura 11. Caso particular de multiplicación de dos números próximos a una base

Al operar la columna de las diferencias hay que tener en cuenta que la parte derecha del resultado tiene que tener tantos dígitos como ceros tenga la base. Por ejemplo, para operar  $103 \times 107$ , la base es 100 y, por tanto, la parte derecha del resultado tiene que tener dos cifras. En este caso, la parte izquierda sería  $103 + 7 = 107 + 3 = 110$ , y la parte derecha sería  $3 \times 7 = 21$ , con lo que el resultado sería 11021. Si hubiera menos cifras, se completan con ceros. Puede ser cómodo, para no olvidarse, poner ya las diferencias con los ceros necesarios. Por ejemplo, para operar  $102 \times 104$ , la parte izquierda sería  $102 + 4 = 104 + 2 = 106$ ; las diferencias serían  $+02$  y  $+04$ . El producto de las diferencias sería 08 y el resultado total de la operación 10608.

Cuando los números están próximos a una base secundaria, hay que utilizar una base primaria de referencia. Por ejemplo, suponga que se quiere multiplicar  $48 \times 47$ . Ambos números son próximos a la base de trabajo 50. El procedimiento se esquematiza en la parte izquierda de la figura 12. Se escoge una base primaria que servirá para fijar el número de cifras de la parte derecha del resultado y el factor por el que habrá que multiplicar o dividir la parte izquierda que se obtiene. Solo se aplica el factor a la parte izquierda. En el ejemplo que nos ocupa, si se

escoge como base primaria 10, el resultado obtenido para la parte izquierda habrá que multiplicarlo por 5. La parte izquierda será inicialmente:  $48 - 3 = 47 - 2 = 45$ , que multiplicado por 5 da como resultado 225. La parte derecha será como siempre  $-3 \times -2 = 6$ . Tiene una cifra, como la base primaria es 10, que tiene un solo cero, no hay que hacer nada más. Al unir las dos partes dará el resultado:  $48 \times 47 = 2256$ .

<p>Base primaria: 10 Base trabajo : 50 Factor: 50/10 = 5</p> <table style="margin: auto;"> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>48</b></td><td><b>-2</b></td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>47</b></td><td><b>-3</b></td></tr> </table> <hr style="width: 80%; margin: 10px auto;"/> <table style="margin: auto;"> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>45</b></td><td><b>/ 6</b></td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>225</b></td><td><b>/ 6</b></td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>2256</b></td><td></td></tr> </table>	<b>48</b>	<b>-2</b>	<b>47</b>	<b>-3</b>	<b>45</b>	<b>/ 6</b>	<b>225</b>	<b>/ 6</b>	<b>2256</b>		<p>Base primaria: 100 Base trabajo : 50 Factor: 50/100 = .5</p> <table style="margin: auto;"> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>48</b></td><td><b>-02</b></td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>47</b></td><td><b>-03</b></td></tr> </table> <hr style="width: 80%; margin: 10px auto;"/> <table style="margin: auto;"> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>45</b></td><td><b>/ 06</b></td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>22.5</b></td><td><b>/ 06</b></td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>22</b></td><td><b>/ 56</b></td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;"><b>2256</b></td><td></td></tr> </table>	<b>48</b>	<b>-02</b>	<b>47</b>	<b>-03</b>	<b>45</b>	<b>/ 06</b>	<b>22.5</b>	<b>/ 06</b>	<b>22</b>	<b>/ 56</b>	<b>2256</b>	
<b>48</b>	<b>-2</b>																						
<b>47</b>	<b>-3</b>																						
<b>45</b>	<b>/ 6</b>																						
<b>225</b>	<b>/ 6</b>																						
<b>2256</b>																							
<b>48</b>	<b>-02</b>																						
<b>47</b>	<b>-03</b>																						
<b>45</b>	<b>/ 06</b>																						
<b>22.5</b>	<b>/ 06</b>																						
<b>22</b>	<b>/ 56</b>																						
<b>2256</b>																							

Figura 12. Multiplicación con base de trabajo secundaria. Izda: la base de trabajo es mayor que la base de referencia. Dcha: la base de trabajo es menor que la base de referencia

Suele ser más cómodo elegir la base primaria de referencia menor que la base de trabajo, para que el resultado de la parte izquierda haya que multiplicarlo y no dividirlo. Por ejemplo, la operación anterior se podría haber hecho con base de referencia 100, resultando el esquema de cálculo de la parte derecha de la figura 12. Se puede ver que hay que dividir por 2 el resultado obtenido para la parte izquierda con lo que da un ,5, que hay que pasar como decenas a la parte derecha, resultando un poco más engorrosa la operación mental.

En todos los casos, aunque se trate de números próximos a una base, se podría utilizar también el método general de multiplicación «En vertical y cruzando» que se explicó en apartados anteriores.

## 7. Algunas casos particulares de multiplicaciones

### 7.1. Multiplicaciones por 11

Cuando el número tiene una cifra, simplemente se repite dos veces. Por ejemplo,  $7 \times 11 = 77$ .

Si el número tiene dos cifras, serán la primera y la última cifra del resultado. La cifra central del resultado se obtendrá sumando ambas cifras. Si esta suma da mayor que 9, habrá que pasar la decena a la primera cifra del resultado. Los siguientes ejemplos aclaran la cuestión:

$$\begin{aligned}
 12 \times 11 &= 1 \mid 1 + 2 \mid 2 = 132 \\
 98 \times 11 &= 9 \mid 9 + 8 \mid 8 = 1078
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Si el número tiene más de dos cifras, el procedimiento es similar. La primera y la última cifra se mantienen. En medio se van sumando dos a dos:

$$175 \times 11 = 1 \mid 1 + 7 \mid 7 + 5 \mid 5 = 1925$$

Otra forma de entender el procedimiento es situar poner un cero antes y después del número a multiplicar e ir sumando desde la derecha cada número con el que tiene a su izquierda:

$$2745 \times 11 = 0 \ 2 \ 7 \ 4 \ 5 \ 0 \rightarrow 30195$$

Con esta técnica, se puede multiplicar por 111. Para ello, hay que poner dos ceros delante y otros dos detrás del número e ir sumando los números de tres en tres. En todos los casos, si la suma da más de 9, se pasan las decenas a la siguiente suma:

$$34 \times 111 = 003400 \rightarrow 3744$$

Similar es multiplicar por 1111. Se ponen tres ceros delante y detrás del número y se van haciendo sumas de cuatro cifras:

$$2172 \times 1111 = 0002172000 \rightarrow 2413092$$

## 7.2. Multiplicación por 5, 50, 25, 125, 625

Para multiplicar por 5, se añade un cero y se divide por 2:

$$42 \times 5 = 420/2 = 210$$

Para multiplicar por 50, se añaden dos ceros y se divide por 2:

$$47 \times 50 = 4700/2 = 2350$$

Para multiplicar por 25, se añaden dos ceros y se divide por 4. La división por 4 se puede hacer dividiendo dos veces por 2. Por ejemplo:

$$16 \times 25 = 1600/4 = 800/2 = 400$$

Para multiplicar por 125, se pueden añadir tres ceros y dividir por 8. Una vez más, dividir por 8 se puede hacer dividiendo tres veces por 2:

$$624 \times 125 = 624000/8 = 312000/4 = 156000/2 = 78000$$

Para multiplicar por 625, se añaden cuatro ceros y se divide por 16:

$$428 \times 625 = 4280000/16 = 2140000/8 = 1070000/4 = 535000/2 = 267500$$

## 7.3. Producto de números cuyas últimas cifras suman 10 y el resto son iguales

Se dividen los números en dos partes: la parte izquierda con las cifras que son iguales y la parte derecha con la última cifra. La parte derecha del resultado será el producto de las últimas cifras de los números. La parte izquierda será el producto de la parte izquierda por la parte izquierda más 1:

$$\begin{aligned} 46 \times 44 &= (4 \times (4 + 1)) \mid (6 \times 4) = 2024 \\ 113 \times 117 &= (11 \times (11 + 1)) \mid (3 \times 7) = 13221 \end{aligned} \quad (2)$$

#### 7.4. Elevar al cuadrado un número que acaba en 5

Sea el número  $a5$ , donde  $a$  representa su primera cifra. El resultado constará de la parte derecha, que es  $5^2 = 25$ , y la parte izquierda que será  $a \times (a + 1)$ :

$$85^2 = (8 \times (8 + 1)) | 25 = 7225$$

Si el número tiene más de dos cifras, el procedimiento es el mismo:

$$\begin{aligned} 115^2 &= (11 \times (11 + 1)) | 25 = 13225 \\ 245^2 &= (24 \times (24 + 1)) | 25 = 60025 \end{aligned} \quad (3)$$

#### 7.5. Cuadrado de un número próximo a una base

El resultado consta de dos partes: la parte izquierda será la suma del número más la desviación con la base, con su signo; la parte derecha será el cuadrado de la desviación. La parte derecha tiene que tener el mismo número de cifras que los ceros de la base. Si tiene más, se pasan a la parte izquierda. Si tiene menos, se añaden ceros a la izquierda. Algún ejemplo:

$$\begin{aligned} 13^2 &\rightarrow \text{Base} = 10, \text{Desv} = 3 \rightarrow (13 + 3) | 9 = 169 \\ 16^2 &\rightarrow \text{Base} = 10, \text{Desv} = 6 \rightarrow (16 + 6) | 36 = (16 + 6 + 3) | 6 = 256 \\ 91^2 &\rightarrow \text{Base} = 100, \text{Desv} = -09 \rightarrow (91 - 9) | 81 = 8281 \\ 97^2 &\rightarrow \text{Base} = 100, \text{Desv} = -03 \rightarrow (97 - 3) | 09 = 9409 \end{aligned} \quad (4)$$

### 8. Comprobación de resultados: sacando nueves

Con cualquier número entero se puede hacer la operación denominada «sacar nueves». Consiste en sumar las cifras de un número entero de manera recursiva, eliminando los nueves hasta que solo quede un dígito menor que 9. Se debe eliminar cualquier cifra 9 que haya. También se pueden eliminar, para facilitar la operación, cualquier combinación de cifras que sume 9. Al final tiene que quedar una única cifra menor que 9, o 0. Vea un ejemplo:

$$754236 \rightarrow 27 \rightarrow 9 \rightarrow 0$$

Se han ido sumando todas las cifras, al final al eliminar el 9 queda 0. Pero se podrían haber eliminado el 7 y el 2, que suman 9, y el resultado sería el mismo:

$$754236 \rightarrow 5436 \rightarrow 36 \rightarrow 0$$

En una operación aritmética entre números enteros se cumple que, si se operan los resultados de sacar nueves a los operandos, se obtiene el mismo valor que si se sacan nueves al resultado de la operación. Esto se cumple con la suma, la resta, la multiplicación, la exponenciación y otras. Esta propiedad se conoce con el nombre de «teorema de los restos chinos». El teorema de los restos chinos se conoce desde el siglo III y se atribuye al matemático chino Sun Tzu. En la literatura védica, al número que resulta de sacar nueves se le llama el «Navasesh».

Por ejemplo, en la operación  $123 \times 145 = 17835$ , si se sacan nueves de 123 se obtiene 6, si se sacan nueves de 145 se obtiene 1 y si se sacan nueves del resultado se obtiene 6. Observe que el Navasesh del resultado es igual al producto de los Navasesh de los operandos.

Si los valores coinciden, no se tiene garantizado que la operación esté bien hecha, pero si no coinciden, sí que se tiene garantizado que la operación está mal hecha. Es una técnica sencilla para comprobar el resultado de las operaciones, al menos, para detectar resultados incorrectos.

## 9. Conclusiones

Hay otras técnicas de cálculo en la literatura védica que no se han explicado en este artículo. La intención no era mostrarlas todas, sino mostrar algunas de ellas con el fin de despertar la curiosidad del lector. En la bibliografía que acompaña a este artículo se puede encontrar material para ampliar conocimientos sobre el tema.

Si se ha mostrado en el artículo, en opinión del autor, lo suficiente para poder valorar la utilidad de los métodos propuestos, tanto para ejercitar el cerebro mediante el cálculo mental, como para que la enseñanza de las matemáticas en las edades tempranas se pueda hacer de una forma más amena que simplemente forzando a los chicos a repetir interminables operaciones de multiplicar con el algoritmo clásico. Los métodos que se muestran en este artículo no tratan de sustituir a métodos los clásicos, sino más bien complementarlos.

Recuerdo que cuando yo tenía diez años, mi abuelo me enseñó el algoritmo de la raíz cúbica. Mi abuelo lo había aprendido en el colegio. A mí, en el colegio me enseñaron el algoritmo para calcular raíces cuadradas. Desconozco si se sigue enseñando. Lo que sí puedo asegurar es que, a excepción de los ejercicios que hice en el colegio, nunca he utilizado dicho algoritmo para calcular una raíz cuadrada. A día de hoy, ya no recuerdo cómo se hace. Prefiero calcular las raíces tanteando multiplicaciones de números cercanos. Las matemáticas védicas disponen de un método similar de tanteo para calcular raíces cuadradas y cúbicas, aunque no se ha explicado en este artículo. Mucho me temo que, lo que me ha pasado a mí con el algoritmo de la raíz cuadrada, le pasa hoy en día a un número importante de personas con los algoritmos de la multiplicación y de la división. Las personas que necesitan hacer multiplicaciones y divisiones en su trabajo o en su vida diaria, utilizan una calculadora.

Los métodos de cálculo descritos en este artículo, y otros similares que no se han descrito, son fáciles de aprender y de utilizar. Pero quizás, lo más importante es que desarrollan la inventiva y la imaginación de los aprendices, haciéndoles utilizar y entender propiedades de los números. Quién sabe si alguno de ellos no verá en estas propiedades un campo interesante de profundización. Saber hacer de manera sencilla y de cabeza pequeñas operaciones podría propiciar que algunas veces no sientan la necesidad de utilizar la calculadora para realizar determinados cálculos.

Es por ello que creo que, sin dejar de enseñar los métodos clásicos para realizar las operaciones aritméticas, se debería dedicar algo de tiempo a provocar en los alumnos el ejercicio del cálculo mental y de la comprensión de las propiedades de los números.

Problemas parecidos a los indicados para el caso del aprendizaje de la aritmética en la enseñanza primaria, han sido detectados por el autor en la enseñanza de las matemáticas superiores en los estudios universitarios de ingeniería. Pero esa es otra historia, y no corresponde abordarla aquí.

## Referencias

- [1] B. Krishna. *Vedic Mathematics, or Sixteen Simple Mathematical Formulae from the Vedas*. Motilal Banarsidass, 1965.
- [2] J. Trachtenberg. *The Trachtenberg Speed System of Basic Mathematics*. ISHI Press International, 1960.
- [3] L. Meyers. *High-Speed Math*. D. Van Nostrand Company Ltd., Canada, 1957.
- [4] J. W. Stigler. "Mental Abacus": The Effect of Abacus Training on Chinese Children's Mental Calculation. *Cognitive Psychology*, 16:145–176, 1984.
- [5] S. G. Dani. Myths and reality : On 'Vedic mathematics'. *Frontline: India's National Magazine*, October 1993:10, 1993.
- [6] A. Bellos. *Alex's Adventures in Numberland*. Bloomsbury, 2010.
- [7] L. de Pisa. *Liber Abaci*. 1202.
- [8] N. Ruiz Cía. *Multiplícala Como Nadie*. Penguin Random House, 2019.
- [9] R. Kumar Thakur. *The Essentials of Vedic Mathematics*. Rupa Publications India Pvt. Ltd., 2013.
- [10] R. Kumar Thakur. *Advanced Vedic Mathematics*. Rupa Publications India Pvt. Ltd., 2019.
- [11] S. R. Huddar, S. R. Rupanagudi, M. Kalpana, and S. Mohan. Novel high speed vedic mathematics multiplier using compressors. In *2013 International Mutli-Conference on Automation, Computing, Communication, Control and Compressed Sensing (iMac4s)*, pages 465–469, Kottayam, Mar. 2013.
- [12] S. Akhter, V. Saini, and J. Saini. Analysis of vedic multiplier using various adder topologies. In *2017 4th International Conference on Signal Processing and Integrated Networks (SPIN)*, pages 173–176, Noida, Delhi-NCR, India, Feb. 2017.
- [13] H. Thapliyal and H. R. Arabnia. A Time-Area- Power Efficient Multiplier and Square Architecture Based On Ancient Indian Vedic Mathematics. page 7, 2004.
- [14] H. Thapliyal and M. B. Srinivas. High Speed Efficient N X N Bit Parallel Hierarchical Overlay Multiplier Architecture Based On Ancient Indian Vedic Mathematics. page 4, 2004.
- [15] A. Savadi, R. Yanamshetti, and S. Biradar. Design and Implementation of 64 Bit IIR Filters Using Vedic Multipliers. *Procedia Computer Science*, 85:790–797, 2016. ISSN 18770509.
- [16] A. Gupta. *The Power of Vedic Maths*. Jaico Publishing House, 2004.
- [17] D. Bathia. *Vedic Mathematics Made Easy*. Jaico Publishing House, 2012.

### Sobre el autor:

*Nombre:* Santiago Higuera de Frutos

*Correo electrónico:* santiago.higuera@upm.es

*Institución:*

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid).



# Cuentos Matemáticos

## Goro el ogro

## The ogre Goro

Javier Rodrigo

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 185-188, ISSN 2174-0410

Recepción: 4 Dic'21; Aceptación: 23 ene'22

1 de abril de 2022

### Resumen

Se presenta un cuento infantil, orientado a niños de 6 a 9 años (de 6 años principalmente) en el que se introducen las operaciones aritméticas básicas de forma amena, mediante un espectáculo infantil.

**Palabras Clave:** Cuentos con contenidos matemáticos, método de aprendizaje clásico, operaciones matemáticas básicas.

### Abstract

A tale for children is presented. It is oriented for children from 6 to 9 years old (mainly for 6 years old). In the tale the basic arithmetic operations are introduced in a funny way, by means of a children's show.

**Keywords:** Mathematical tales, classical learning method, basic mathematical operations.

## 1. El cuento

### 1.1 Goro el ogro

- A continuación, con todos ustedes, ¡Goro el ogro y Gora la ogra!

(Sintonía)

Goro el ogro, se arranca las patas, se arranca las cejas, se arranca la barba, se arranca los dientes, se arranca las napias, se arranca, se arranca todo.

Gora la ogra, se arranca las patas, se arranca las cejas, se arranca la barba, se arranca los dientes, se arranca las napias, se arranca, se arranca todo.

No tengas miedo y juega con ellos, da saltos muy altos, que lleguen al cielo, y tápate un ojo, y tírate al suelo y muérdete, muérdete un codo.

No tengas miedo y juega con ellos, da saltos muy altos, que lleguen al cielo, y tápate un ojo, y tírate al suelo y muérdete, muérdete un codo.

(voz de niño) Juego con ellos, y no me da miedo.

No me dan miedo, pues son ogros buenos

Son un poco feos, pero yo los quiero.

Son mis amigos, ¡y bailo con ellos!

(acelerado) Goro el ogro se arranca las patas, se arranca...

- ¡Hola, niños!

- Holaaaa

- ¿Sabéis quiénes somos?

- Goro y Gora.

- ¿Qué somos, marido y mujer?

- No, sí, no, nooo

- ¿Somos padre e hija?

- Sí, no, sí...

- ¿Somos madre e hijo?

- Noo..., sí..., no sé...

- ¿Somos hermanos?

- Sí..., Noo...

- ¿Somos amigos?

- Noooo... Sí...i...

- Nadie sabe lo que somos. Pero no nos importa. Lo que importa es que vamos a pasarlo bien. A ver, ¿qué queréis hacer? ¿Qué os gusta? ¿Os gusta el fútbol?

- Sí,,,i,,,i

- ¿Os gustan los juguetes?

- Sí...i...i...i

- ¿Os gusta jugar al pilla-pilla?

- Sí...i...i

- ¿Y jugar con las muñecas?

- Sí...i...i...i

- Y las mates, ¿también os gustan?

- Noo...o...o

- ¿Qué me decís? ¿No os gustan las sumas y las restas?

- Noo...oo...o...o
- Pero si puede ser muy divertido. Sobre todo, si lo hacemos rápido. A ver quién gana... ¿cinco más tres?
- Ochoooo...
- Muy bien. ¿Cuatro más dos?
- Seiiis... Siete...
- Pero bueno, ¿quién ha dicho siete? Bueno, no pasa nada, eso es porque lo estamos haciendo rápido. A ver ahora, ¿seis más tres?
- Nueveee....
- ¿Quince más cinco?
- .....
- Pero bueno, ¿nadie sabe cuántas son quince más cinco? Mirad que me enfado, ¿eh?
- Goro, que son pequeños. Sólo saben sumar números de una cifra.
- ¡Pero si es muy fácil! ¡Tienen que saberlo!
- (Goro se tira al suelo y patatea)
- No os preocupéis, os voy a enseñar un truco para hacer quince más cinco y que Goro deje de patatear. ¿sabéis contar?
- Sí...i...i...
- ¿Hasta cuánto?
- Hasta treinta..., hasta cuarentaaa, hasta veintee...
- ¿Todo el mundo sabe contar hasta veinte?
- Sí...i...
- Bueno, pues entonces vamos a hacer una cosa. Vamos a contar, y cuando lleguemos a quince sacamos la manita y contamos con los dedos hasta que tengáis la mano abierta. ¡Empezamos!
- Unooo, dos..., treeesss, ..., ..., ..., quinceeee...
- ¡Ahora, la mano!
- Dieciseis..., diecisiete..., ..., veinte...
- ¡Muy bien, ya está! ¿Cuánto son quince más cinco?
- Veinteeeeeee...
- (Goro se incorpora de un salto y empieza a dar palmas)
- ¡Genial, chicos! ¿Qué se le dije a Gora?
- ¡Gracias, Gora!
- ¿No veis que las matemáticas están bien? ¿Qué os gusta más ahora, las mates o el fútbol?

- El futboool...

(Goro y Gora se echan la mano a la cara).

**Sobre el autor**

*Nombre:* Javier Rodrigo

*Correo Electrónico:* [jrodrigo@comillas.edu](mailto:jrodrigo@comillas.edu)

*Institución:* Universidad Pontificia Comillas, España.

Críticas y reseñas

Proyecto Colaborativo CuentaMates en  
Experimentamates

Collaborative Project MathTales in  
Experimentamates

Alejandra Fernández Sánchez

Verónica Navarro Fernández

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 189-193, ISSN 2174-0410

Recepción: 9 Feb'22; Aceptación: 1 Mar'22

1 de octubre de 2021

**Resumen**

En este artículo se realiza una reseña del Proyecto Colaborativo CuentaMates, que forma parte del Laboratorio Ciudadano Experimentamates, realizado en el mes de noviembre de 2021, en la Escuela de Caminos de la UPM. Se trata de un proyecto en el que se pretende realizar una página web que sea un repositorio de cuentos matemáticos para distintas edades y clasificado por métodos didácticos y/o contenidos.

**Palabras Clave:** Cuentos, matemáticas, material manipulativo, laboratorio ciudadano

**Abstract**

In this paper a report about the Collaborative Project MathTales is performed. This Project took part of the Citizen Laboratory Experimentamates, carried out in November, 2021 in the Polytechnical University of Madrid. The Project consists on the creation of a web page that stands as a repository of mathematical tales oriented to different ages as well as classified by didactic methods and contents.

**Keywords:** Tales, mathematics, manipulative material, citizen laboratory.

# 1. Introducción y descripción

## 1.1 La idea

La idea de este proyecto surge después de que una de las autoras de la presente reseña, Alejandra Fernández, llevara 10 años escribiendo en su blog [www.unaprofe.com](http://www.unaprofe.com). Hasta entonces había creado muchas entradas y compartido muchas ideas en internet. Durante los últimos 3 años se había empezado a especializar en el área de matemáticas, compartiendo su experiencia con el uso del Método Singapur en el aula de primaria. Y es entonces cuando se da cuenta de lo importante que es leer en matemáticas, y de los beneficios que tiene el conseguir que el estudiante sea el protagonista de su propio aprendizaje, dándole a conocer diferentes modelos y métodos para poder resolver los problemas que vayan apareciendo en el momento.

Empieza a tener interés por las matemáticas divulgativas, leyendo libros como La sonrisa del conocimiento de José Antonio Fernández Bravo <sup>1</sup> [1] o La poesía de los números, de Daniel Tammet <sup>2</sup> [2] y se engulle en la búsqueda de cuentos matemáticos y empieza a leerlos y clasificarlos por temática. Cuando ya cree haber encontrado todos los cuentos matemáticos que existen se pone a escribir sus propios cuentos matemáticos, como Los 3 árboles de Navidad o El tapón de leche que cobró vida. Pero se da cuenta que sigue siendo poco, que con los cuentos que hay, o lo que pueda ir creando ella, no va a conseguir llegar a todos los niños y niñas y es ahí, donde llega la idea.

¿Por qué ponerse a escribir cuentos ella sola? ¿Por qué no crear una comunidad educativa de personas que amen las matemáticas? ¿Por qué no abrir la idea a los demás?

Y es así como Alejandra se pone manos a la obra y crea el Proyecto Colaborativo CuentaMates. Con el proyecto quiere crear un repositorio de cuentos matemáticos para que docentes, familias y estudiantes puedan llegar a entender las matemáticas usando su lado más lingüístico. Después de darle muchas vueltas y de presentar su idea por las redes sociales para ver qué pensaba la gente sobre el proyecto, decide crear una web para así poder almacenar de forma gratuita todos los cuentos matemáticos que le lleguen.

Como Alejandra siempre ha sido de las que piensan que no se pierde nada por intentarlo, decide presentar su Proyecto de CuentaMates a la convocatoria de Laboratorios Ciudadanos Experimentamates y cuál es su sorpresa, que el 4 de octubre de 2021 es informada de que su propuesta ha sido aprobada y durante el mes de noviembre podrá ser desarrollada en los talleres de producción del Laboratorio Ciudadano ExperimentaMates.

Y es ahí cuando empieza la gran aventura de CuentaMates.

---

<sup>1</sup> Fernández Bravo, José Ángel. La sonrisa del conocimiento, Editorial CCS, Madrid, 2019.

<sup>2</sup> Tammet, Daniel. La poesía de los números. Cómo los números cambiaron mi vida, Blackie Books, Barcelona, 2017.

## 2. Nuestro paso por Experimentamates

El laboratorio ciudadano Experimentamates, es un espacio multidisciplinar, abierto al diálogo y a la reflexión sobre las matemáticas teóricas, experimentales y sobre todo manipulativas.

Para Cuentamates se convirtió en el punto de partida para consolidar un proyecto.

Nuestro equipo estuvo formado por tres integrantes:

- Alejandra Fernández, promotora de la iniciativa “Cuentamates”
- Javier Rodrigo, mentor del laboratorio Experimentamates
- Verónica Navarro, colaboradora

Durante el mes de gestación de Cuentamates, tuvimos tres reuniones presenciales en el laboratorio ciudadano Experimentamates, además de continuas reuniones online, email y llamadas telefónicas.

### 2.1 Punto de partida

Nuestra primera reunión presencial estuvo marcada por tres fases, una primera fase de acercamiento y conocimiento sobre nuestra trayectoria profesional, una segunda fase de presentación de la idea original por parte de Alejandra, y para terminar un “brainstorming” del que surgieron grandes avances y tareas para continuar en casa, como revisión de artículos bibliográficos, y revisión de cuentos matemáticos en diferentes portales de búsqueda activa como Pensamiento Matemático.



Figura 1. Logo de participación en el proyecto

Se realizó también un listado de los cuentos que ya estaban a disposición del proyecto y de los potenciales participantes en la propuesta, así como un reparto de las tareas pendientes acorde a las habilidades y preferencias de los integrantes del proyecto y una petición, a los responsables del laboratorio, de materiales indispensables para seguir trabajando.

### 2.2 Desarrollo y análisis

La segunda reunión presencial se centró en organizar y dar forma a la página web [www.cuentamates.com](http://www.cuentamates.com), estructurándola por contenidos, rango de edad, y métodos matemáticos como Singapur o ABN.



Figura 1. Segunda reunión en el laboratorio ciudadano Experimentamates.

## 2.3 Resultado y consolidación

La tercera reunión fue una revisión individual y grupal de todos los objetivos planificados, evaluación y control de los cuentos aportados, consolidando así el proyecto en una página web abierta al usuario a día de hoy.

## 3. El resultado final

Un mes después de finalizar el Laboratorio Ciudadano salió a la luz la web [www.cuentamates.com](http://www.cuentamates.com) [3] fue un trabajo duro y largo, pero gracias a la labor de los tres participantes en el proyecto, se consiguió. Ahora queda la parte más difícil, aunque no lo parezca, ahora hay que llenar la web de cuentos matemáticos y conseguir que, si no todos, sí la mayoría, vayan acompañados de una guía didáctica, de una propuesta de material manipulativo, de su traducción a otros idiomas, del audiolibro, de ilustraciones, ...

En una idea ambiciosa, pero su primer pasito lo dio gracias a Experimentamates. Esperemos que, dentro de unos años, la web sea una herramienta más en las aulas de todos nuestros centros y un recurso para todas las familias que lo necesiten.



Figura 3. Imagen de la portada de la web [www.cuentamates.com](http://www.cuentamates.com)



## Referencias

- [1] FERNANDEZ BRAVO, JOSÉ ÁNGEL. *La sonrisa del conocimiento*, Editorial CCS, Madrid, 2019.
- [2] TAMMET, Daniel. *La poesía de los números. Cómo los números cambiaron mi vida*, Blackie Books, Barcelona, 2017.
- [3] FERNÁNDEZ , ALEJANDRA. *Página web del proyecto* [www.cuentamates.com](http://www.cuentamates.com)

### **Sobre el/los autor/es:**

*Nombre:* Alejandra Fernández Sánchez

*Correo Electrónico:* [ale@cuentamates.com](mailto:ale@cuentamates.com)

*Institución:* Colegio Concertado Escuelas Pías Alcalá, España.

*Nombre:* Verónica Navarro Fernández

*Correo Electrónico:* [veronicanavarrofernandez@gmail.com](mailto:veronicanavarrofernandez@gmail.com)

*Institución:* Colegio Concertado Escuelas Pías Alcalá, España,

*Nombre:* Javier Rodrigo Hitos

*Correo Electrónico:* [jrodrigo@comillas.edu](mailto:jrodrigo@comillas.edu)

*Institución:* Universidad Pontificia Comillas, España.

## Entrevista

Pedro Daniel Pajares Galeano  
“de monologuista a docente”

Pedro Daniel Pajares Galeano  
“from monologist to teacher”

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 195–200, ISSN 2174-0410  
Recepción: 27 mar'22; Aceptación: 28 mar'22

1 de abril de 2022

### Resumen

En este artículo hablamos con Pablo Daniel Pajares Galeano, divulgador y docente extremeño que nos cuenta su experiencia.

**Palabras Clave:** divulgación, entrevista, monólogos científicos, docencia.

### Abstract

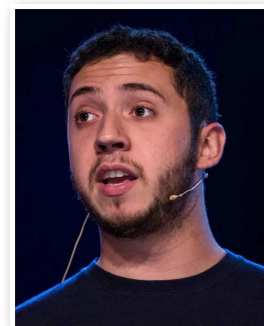
In this article we interview Pablo Daniel Pajares Galeano, science communicator and teacher from Extremadura who tells us about his experience.

**Keywords:** science communication, interview, scientific monologues, teaching.

Pedro Daniel Pajares Galeano (Cáceres, Sep. 1993) es graduado en matemáticas por la Universidad de Extremadura (UEX), profesor de secundaria y divulgador científico, ganador del prestigioso Famelab en 2017. Su presencia es más que notable en redes sociales (@Pedrodanielpg) y a través de su canal de Youtube «A todo Gauss». Suele colaborar en algunos podcast, como «A Ciencia Cierta», y otros programas de radio y televisión. Además hace poco, sus paisanos y compañeros docentes y los que le conocemos tenemos el orgullo de verle «crecer», hemos visto como ha sido elegido uno de los jóvenes extremeños más influyentes.

– *En primer lugar Pedro agradecerte que te hayas prestado a nuestra entrevista.*

Muchas gracias a vosotros por la invitación y por la presentación. Los profesores y los divulgadores estamos acostumbrados a



Pedro Daniel

hablar y expresar nuestras opiniones, y aunque ahora mismo no tenga demasiado tiempo libre, siempre se puede sacar un huequito para hablar con vosotros.

– Confieso que, aún siendo compañero docente cacereño tuyo, no te conocí hasta que lo hicimos en el canal de Telegram de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper». Fue entonces cuando ví que en Extremadura teníamos un «chaval» (espero que te lo tomes en el buen sentido) paisano nuestro que había sido ganador del famoso FameLab en 2017. Cabe decir que hay un referente ganador del mismo prestigioso concurso como el gran divulgador Eduardo Sáenz de Cabezón, con lo cual nuestros lectores pueden hacerse una idea de la importancia de este concurso. Nos gustaría que nos comentaras sobre tu participación en él, y sobre la experiencia posteriormente internacional.

Pues solo tengo buenas palabras para todo ello. Antes de FameLab ya hacía divulgación en algunas actividades de la universidad como la noche de los investigadores o en redes sociales, pero FameLab me permitió conocer a más gente con la que compartíamos motivaciones y consejos. Fue un apoyo mutuo y muy productivo, por ello mi experiencia fue buena, tanto la organización como el resto de compañeros estuvieron siempre ahí para echar una mano o dar algunos consejos, porque aunque esto era un concurso, nosotros no éramos competidores sino compañeros.

En la edición internacional fue similar, aunque actualmente tengo más contacto con mis compañeros españoles que con los del resto de países.

– ¿Cuéntanos cómo es eso de ser ponente en bares? Nos estamos refiriendo a tu experiencia en «Pint of Science» para que nuestros lectores se ubiquen.

Pint of Science es algo único, te permite hablar de ciencia en un bar ante un montón de personas curiosas que están ahí con ganas de aprender algo nuevo y de tomar algo fresquito. Solo pude participar en una edición como ponente, pero como oyente he estado en muchas, y es algo que recomiendo a todos, porque el ambiente de este evento lo hace diferente a las típicas ponencias científicas, y eso es muy propicio para despertar la curiosidad del público.

– Quizás uno de tus logros de mayor repercusión mediática haya sido la de colaborar con Cremades en «Raíz de cinco», ¿cómo te llegó la oportunidad hacerlo?

A Santi lo conocía ya de redes sociales, pero fue a través de FameLab cuando lo conocí en persona. Él forma parte de Big Van Ciencia y de mil cosas más, y cuando me ofreció colaborar ocasionalmente en el único programa de España que trata íntegramente sobre matemáticas solo pude decir que sí. Además, es un programa que ya escuchaba antes, por lo que me hizo especial ilusión.

– Qué consideras que nos falta en España en cuanto a la divulgación para estar al nivel de otros países como los EE.UU, donde alguien puede permitirse el lujo de ganarse la vida con el mero hecho de divulgar conocimientos. Estarás de acuerdo conmigo que en nuestro país a no ser que tengas el respaldo docente, resulta muy difícil vivir únicamente de la divulgación.

Exacto, es complicado vivir de la divulgación. Yo soy profesor de secundaria, es el trabajo que disfruto y gracias al que vivo. Aunque a veces pueda usarlo de forma complementaria a la enseñanza, la divulgación para mi es un hobby, y precisamente porque me gusta la enseñanza no me planteo ni actualmente ni a futuro dedicarme exclusivamente a la divulgación. Desconozco como está actualmente la divulgación en EE.UU, pero todos mis compañeros que viven gracias a ella mezclan pasión, dedicación y esfuerzo a partes iguales. Ser divulgador puede ser algo bastante sacrificado, y también tienes que tener un poquito de suerte para dar los primeros pasos.

– Bueno llegados a este punto de nuestra entrevista, resultará más que evidente para nuestros lectores tu versatilidad como divulgador. Me gustaría que nos contaras ¿en qué momento decidiste que las matemáticas podrían ser la forma de ganarte la vida? y ¿por qué específicamente las matemáticas y la docencia?

Pues fue precisamente a través de la divulgación. En mis últimos años como estudiante de matemáticas descubrí que desde la Universidad de Extremadura se hacían algunas actividades divulgativas, y decidí apuntarme a muchas de ellas. Dedicarme a la docencia siempre había sido una opción, pero todo esto me empujó y animó a seguir, y no me arrepiento de ello.

– *Centrémonos en la docencia. ¿Qué opinas de los cambios drásticos que se están produciendo no solo a nivel curricular en la secundaria? Vaya por delante que a mi personalmente me parece una aberración ciertos puntos que la nueva LOMCE baraja, y que desde mi punto de vista tira por tierra la cultura del esfuerzo y la meritocracia y que nos iguala a todos «por abajo». Tú eres muy joven, pero para docentes más mayores como yo, echamos mucho de menos tiempos pasados, y muchos de nosotros tenemos la impresión de ser cada vez más burócratas y que cada vez tenemos menos tiempo para poder elaborar contenidos de calidad y atractivos para nuestros chavales.*

Bueno, a fecha de hoy aún no se han publicado los nuevos currículos, y aunque sí hay borradores prefiero no opinar sobre los contenidos hasta que sea definitivo, pero respecto a la motivación de esta nueva ley en cuanto a la cultura del esfuerzo he de decir que yo también pensaba así, pero tras hablar con muchas personas mi opinión ha cambiado bastante en los últimos meses. Actualmente la educación hasta los 16 años es obligatoria, pero no todos los alumnos tienen los mismos intereses, motivaciones o capacidades, y hay determinados alumnos que terminan aislados en determinadas modalidades o atrapados en bucles de repeticiones hasta que cumplen los 16 años y se van sin el título, es decir, el sistema les aparta del resto. La ley educativa actual iba aún más allá (con las paralizadas reválidas), pero la nueva va en sentido contrario, haciendo que sean los contenidos los que se adapten al alumno. Esto va a darnos más trabajo a los profesores, claro, pero va a proporcionar un equilibrio entre la inclusión y la comprensión del temario que, al menos teóricamente, debería beneficiar al alumno. Todo esto es sobre el papel, hasta que la ley no esté en vigor no podremos saber si funcionará o no, pero no hay que olvidar que en España tenemos un número de alumnos que repiten muy superior al de otros países, y que la repetición debería ser la última opción, por lo que si un alumno repite curso debe significar que todas las demás opciones han fallado.

– *¿No has tenido nunca la sensación que cada vez somos más cuidadores de adolescentes y menos docentes?*

Bueno, para algunas personas trabajar con grupos de 20 niños o adolescentes durante varias horas al día es algo complicado. Para nosotros es un martes más. Un docente debe saber enseñar su materia, pero también gestionar su aula.

– *Volvamos a tu época estudiantil. Un pajarito (te confieso que ha sido nuestro amigo Juan Medina de lasmatemáticas.es y fundador de Shurmáticos a quien entrevistamos ya hace unos cuantos años) nos ha dicho que la rama que más te gusta quizás sea la Geometría, aunque reconoces no ser un extraordinario «dibujante», la Topología para ser más exacto ¿por qué? ¿cómo le explicarías a uno de tus alumnos de secundaria que un donut y una taza son lo mismo desde un punto de vista topológico?*

Es cierto, la geometría y el álgebra son de mis ramas favoritas. El ejemplo de la taza y el donut es sencillo de explicar, este homeomorfismo puede interpretarse geoméricamente como una distorsión que conserva la propiedad de "tener un único agujero", y además en este ejemplo concreto hay bastante apoyo visual. Estamos haciendo algo de trampa porque realmente esto es topología muy geométrica y los topólogos tendrán las manos en la cabeza, pero no querría ser yo quién explicase topología algebraica en una clase de secundaria ...

– *Yo personalmente como bien sabes publiqué hace mucho tiempo un artículo sobre «Hamilton y el descubrimiento de los Cuaterniones» al que le tengo un especial cariño, y sé que tu TFG versaba precisamente sobre este hecho. Explícales a nuestros lectores por qué elegiste este tema.*

En bachillerato ya escuchas hablar de un tipo especial de números llamados complejos que existen más allá de la recta real, pero en ningún momento se me ocurrió pensar sobre si había algo más allá o no. Un día después de clase un profesor me habló sobre una serie de documen-

tales matemáticos que acababan de estrenar en una plataforma de streaming. Era “The Code”, de Marcus du Sautoy. En un capítulo se mencionaba muy levemente a los números hipercomplejos, y esto me despertó la curiosidad porque no habían dado mucha información sobre ellos y para mi era algo nuevo. Hasta tal punto me picó la curiosidad que terminé empapándome de ellos durante varios meses para escribir mi TFG sobre ellos.

– *Sabemos que conoces un poco la antigua Prusia oriental (actualmente Polonia occidental), y ciudades como Poznań cuna de criptógrafos polacos como Marian Rejewski, Jerzy Różycki o Henryk Zygalski entre otros. Cuéntanos un poco sobre tu experiencia allí como Erasmus.*

Fue una experiencia maravillosa, y cualquier persona que haya ido de Erasmus dirá lo mismo. Es una oportunidad que todo el mundo tiene y que quien decida aprovecharla no se arrepentirá, porque conocerá a gente maravillosa en contextos muy distintos y convivirá con otras culturas, aprendiendo mucho en el proceso. Además, académicamente me permitió aprender sobre algunas asignaturas que no existían en mi universidad, como Teoría de grafos o Teoría de juegos.

– *Eres docente desde hace muy poquito. Imagínate que tuvieras la oportunidad de gestionar cambios en la educación como legislador, ¿qué cambios estructurales fundamentales llevarías a cabo?*

Sinceramente, no sabría por donde empezar, pero tengo muy claro que no sería yo solo quien tomase la decisión, pues lo primero que haría sería preguntar a mis compañeros por los mejores puntos de la ley actual y aquellas cosas que deberían mejorarse o que se echan en falta. En las leyes educativas debería haber consenso para conseguir que duren en el tiempo.

– *¿Qué opinas de que un alumno titule ya no solo en secundaria obligatoria, sino incluso en bachillerato con las matemáticas pendientes?*

Esta pregunta no tiene una respuesta fácil. Creo que aquí hay algo más importante que tener un 3, un 5 o un 7: las matemáticas no solo te enseñan a calcular el máximo común divisor de dos números, la derivada de una función, o el número de aristas de un poliedro determinado; te enseñan a razonar y a pensar. Si alguien no es capaz de razonar de forma lógica, de verificar información o de extraer conclusiones, es mucho más fácil de engañar y de manipular, y esto es un problema porque si no es capaz de esto sus decisiones no serán suyas. ¿Me encantaría que todos los alumnos que tengan el título de bachillerato tengan por lo menos un 5 en matemáticas? ¡Por supuesto! Pero, ¿puedo asegurar todo lo anterior con ese 5?

– *¿Cómo les trasmites a tus alumnos la importancia, y lo que es más importante la utilidad, de nuestra materia?*

Creo que te he respondido un poco a esta pregunta en la anterior, pero ya que has mencionado antes a Eduardo Sáenz de Cabezón, él tiene una frase que resume impecablemente esta importancia: “aquel ciudadano que tiene el rigor de las matemáticas es más difícil de manipular, es más libre, es un ciudadano crítico”.

– *¿Qué recomendarías a un recién graduado en matemáticas que duda entre dedicarse o no a la docencia?*

La docencia te tiene que gustar. No hay que caer en ese mito de tienes que tener la vocación desde recién nacido: hay quien lo tiene claro a los 3 años y quien lo ve a los 23, pero te tiene que gustar, porque si no te gusta dar clase no vas a estar cómodo en tu día a día, y tus alumnos lo van a notar. Por suerte, para ser profesor hay que hacer un periodo de prácticas donde vas a dar clase durante algunos meses. En ese momento es en el que confirmas que te gusta, y que además te gusta más de lo que pensabas.

– *Bueno y llegado a este punto creo que es clave preguntarte cómo se siente un docente joven como tú que ha sido elegido «uno de los jóvenes extremeños más influyentes», ¿sientes mucha responsabilidad sobre tus hombros?*

¡Por supuesto! me enteré en febrero, estamos en marzo y creo que de momento en este mes

no he metido la pata, así que espero seguir así unos cuantos meses mas. Es algo que me ha hecho mucha ilusión, y así lo agradezco públicamente a todo el que me pregunta.

– *¿Qué nos depara el futuro en la educación Pedro? ¿Te ves dando clases hasta los 67 años?*

Pues todo parece indicar que las tecnologías van a estar cada vez más dentro del aula, y esto es algo bueno. Ya poco a poco estamos levantando el veto a las calculadoras, y quizás lo próximo sea permitir el uso de teléfonos móviles como herramienta en el aula (aunque me consta que ya se usan en determinadas actividades). Me queda mucho para llegar a los 67 años, pero me gustaría ver como habrá cambiado todo para aquel momento.

– *Bueno Pedro, cuéntanos algo en tus proyectos de futuro, dónde te gustaría llegar, qué te gustaría hacer, etc.*

Pues este año que estoy un poco más libre (no mucho, pero un poco sí) estoy retomando la divulgación. El año pasado me fue imposible al estar dando clases y preparando oposiciones a la vez, pero como ya no voy a tener que volver a hacer lo segundo, puedo volver a centrarme en divulgar. Además, también quiero seguir formándome porque tengo dos espinitas clavadas que quiero quitarme pronto: la formación en estadística y en didáctica de las matemáticas. Estadística porque me gustaría saber más de lo que sé, y didáctica porque creo que actualmente es aquello de lo que menos formación tengo.

– *Llegados a este punto, no nos queda otra cosa que agradecerte tu atención y requerirte un único compromiso, que nunca dejes de hacer lo que haces y seguir metiéndote en todos los «fregaos» que te metes y permitirnos disfrutar de todo lo que haces y nos transmites con tu pasión. Un fuerte abrazo compañero.*

Muchísimas gracias a vosotros. Ha sido una entrevista muy completa que me ha hecho parar a pensar más de una vez. ¡Un abrazo!

### **Sobre el autor:**

*Nombre:* José Manuel Sánchez Muñoz

*Correo electrónico:* jmanuel.sanchez@educarex.es

*Institución:* G.I.E. Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid. I.E.S. Jaranda, Jarandilla de la Vera, Cáceres. Consejería de Educación de la Junta de Extremadura.



Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

**Tu eres libre de:**

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

**Bajo la siguientes condiciones:**

**Atribución** Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

**No Comercial** No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

**Licenciar Igual** Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.





