Investigación

Función parte entera y algunas propiedades

Integer part function and some properties

Juan Carlos Arango Parra
Yeisson Alexis Acevedo Agudelo

Revista de Investigación

Volumen XII, Número 1, pp. 057–076, ISSN 2174-0410
Recepción: 26 Abr'21; Aceptación: 25 Ago'21

1 de abril de 2022

Resumen

En este artículo se pretende analizar algunas de las propiedades de la función parte entera desde una componente algebraica, algunas de ellas se demuestran y en otras se hace uso de la interpretación geométrica para obtener una mejor explicación de la propiedad o complementar la misma. Adicionalmente, se estudian algunas aplicaciones y algunos contextos matemáticos donde dicha función toma sentido, es el caso de los puntos red, los números complejos, las teselaciones, la teoría de números, la probabilidad, entre otros.

Palabras Clave: Función parte entera, mantisa, módulo, aditividad.

Abstract

This article aims to analyze some of the properties of the integer part function from an algebraic component, some of them are demonstrated and in others the geometric interpretation is used to obtain a better explanation of the property or to complement it. Additionally, some applications and some mathematical contexts where this function makes sense are studied, such as network points, complex numbers, tessellations, number theory, probability, among others.

Keywords: Function integer part, mantissa, modulus, additivity.

1. Introducción

La función parte entera es utilizada en diferentes aspectos de la cotidianidad algunos conscientes o inconscientes, otras situaciones son producto de aspectos estandarizados; por ejemplo, en el sistema monetario COP (pesos), una cuenta que asciende a \$8497 genera un pago total de \$8500 si éste se hace en efectivo, lo cual termina siendo el entero superior en dicho sistema monetario que va de \$50 en \$50. Al preguntarse la hora a un transeúnte, la mayoría responde en intervalos enteros de 5 en 5 minutos (en un reloj analógico), así a pesar de ser las 8:31 se suele decir que son las 8:30 (AM/PM). En cuyo caso estamos haciendo alusión al menor entero. Ocurre algo similar con los pesos de verduras y frutas cuando se hace la compra, al comprar una mercancía que cuesta \$19990. Entre otras muchas situaciones donde recurrimos al redondeo, pero de un número entero, inconscientemente hacemos uso de la función parte entera. Algunas de estas situaciones son culturales, otras mediadas por la divisa que maneje el país.

Pero la función parte entera no solo se aplica a situaciones de la cotidianidad, en la matemática misma tiene mucha funcionalidad, en particular para los campos de teoría de números, probabilidad, cálculo, geometría, así como una amplia gamma de contextos físicos y matemáticos. En [4], por ejemplo, los autores estudian una clase simple de sistemas dinámicos en $\mathbb{Z}$ relacionados con las funciones de suelo y techo aplicadas en un problema combinatorio para un juego de cartas y su tiempo de parada. En [9], los autores presentan algunas generalizaciones para las funciones de parte entera de números racionales positivos usando el árbol Stern-Brocot y lo asocian a un problema de generalización para la conjetura $4/3$ de ciencias de la computación. En [11], el autor determina expresiones de forma cerrada para el enésimo término de algunas secuencias y series de interés utilizando las funciones techo y suelo de manera individual y combinada. Algunas referencias sobre los últimos avances en el uso de las funciones de parte entera se pueden encontrar en [6, 7, 10, 12, 13, 15].

En este artículo se muestran algunas aplicaciones de la función parte entera (Suelo/Techo) en contextos matemáticos. Pese a que la función parte entera es conocida y bastante estudiada, en este trabajo se presentan situaciones desde un punto de vista geométrico así como también algunas propiedades que no son tan comunes. Además, en el presente escrito se utiliza una metodología en la cual, a partir de expresiones funcionales generales y el uso de su geometría adyacente, se deducen propiedades para los reales. El método empleado para deducir propiedades para $\mathbb{R}$ (y en general para un conjunto), a partir de expresiones funcionales más generales $\left(\text{ej. } \mathbb{R}^2\right)$ y en consideración de representaciones geométricas se denomina *inferencia funcional* [14] y no se debe confundir con análisis funcional o análisis matemático. Otro aspecto metodológico que se utiliza en el presente estudio es considerar propiedades para la función parte entera en el intervalo $[0,1]$ y luego se extienden como generalización en toda la recta numérica. Esta técnica es viable ya que la mantisa asociada a un número real siempre es un valor entre 0 y 1 y todo número real es la suma de su parte entera más su mantisa.

1.1. Función parte entera y Mantisa

La función parte entera, denotada $\lfloor\cdot\rfloor$, es el mayor de todos los enteros que son menores o iguales a un número real x; es decir, si $n \in \mathbb{Z}$ y $n \leq x < n+1$ entonces $\lfloor x\rfloor = n$, equivalente a

$$\lfloor x\rfloor = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{n \leq x\}\ . \tag{1}$$

La función parte entera de x cumple la propiedad de involución, a saber, $\lfloor\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor x\rfloor$. Se suele utilizar la expresión *Floor* (suelo) para denotar esta función en programación. A diferencia de la función $\lceil\cdot\rceil$ llamada función *Ceil* / *Ceiling* (techo), que es el menor de los enteros mayores o iguales que un real dado x, es decir, $\lceil x\rceil = \min_{n\in\mathbb{Z}}\{x \leq n\}$. Ambas funciones están relacionadas así

$$\begin{cases} \lfloor x\rfloor = \lceil x\rceil & \text{si } x \in \mathbb{Z}\ , \\ \lfloor x\rfloor + 1 = \lceil x\rceil & \text{si } x \notin \mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

La función mantisa de x indica la parte decimal de este número, se escribe como la diferencia entre el número y su parte entera, es decir, $m(x) = x - \lfloor x\rfloor$. Para todo número real x, se satisface la desigualdad $x - 1 < \lfloor x\rfloor \leq x$, de la cual se deduce que $0 \leq x - \lfloor x\rfloor < 1$. Lo cual implica que la función mantisa está acotada para todo $x \in \mathbb{R}$, acorde a las desigualdades se cumple que $\lfloor m(x)\rfloor = 0$. Ya que $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$, entonces se satisface que $m(x+1) = m(x)$, lo cual implica que la función mantisa es una función periódica con periodo $T = 1$. En el intervalo $[0, 1)$, tiene un punto de corte con los ejes en $(0, 0)$ y una discontinuidad inevitable en $x = 1$.

De forma general, la función $m_k(x) = kx - \lfloor kx \rfloor$ para $k \in \mathbb{N}$, donde $m_1(x) = m(x)$, es periódica de periodo $T = \frac{1}{k}$ y en el intervalo $[0, 1)$ tiene k intersecciones con el eje x para $x = 0$, $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}$, cada uno de estos interceptos representa una discontinuidad no removible (no evitable). El área bajo la curva para $m_k(x)$ en el intervalo $[0, 1)$ es $\frac{1}{2}$, para todo valor de k. En efecto, la función es discontinua para $x = \frac{1}{k}$ que es el periodo, entonces

$$\int_0^1 m_k(x)dx = k \cdot \int_0^{\frac{1}{k}} m_k(x)dx = k \cdot \lim_{b \to \left(\frac{1}{k}\right)^-} \int_0^b (kx - \lfloor kx \rfloor)dx = k \cdot \lim_{b \to \left(\frac{1}{k}\right)^-} \left[\int_0^b kxdx - \int_0^b \lfloor kx \rfloor dx\right] ,$$

como $\lfloor kx \rfloor = 0$ para todo $x \in \left[0, \frac{1}{k}\right)$, entonces se puede concluir que

$$\int_0^1 m_k(x)dx = k \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} .$$

A partir de la función mantisa es posible hallar la distancia de un $x \in \mathbb{R}$ al entero más próximo, la cual denotaremos $d(x)$. Esta función es periódica con $T = 1$, ya que da igual hacer el análisis en el intervalo $[0, 1]$ que en el intervalo $[n, n + 1]$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Sin pérdida de generalidad, se efectúa el análisis para $x \in [0, 1]$. Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ entonces dicha distancia es la mantisa de x, $d(x) = m(x) = \frac{1}{2} + \left(m(x) - \frac{1}{2}\right)$. Si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ entonces está más cerca de 1 y por ende la distancia es la unidad menos la mantisa, es decir, $d(x) = 1 - m(x) = \frac{1}{2} - \left(m(x) - \frac{1}{2}\right)$. Unificando ambas expresiones, concluimos que la distancia de un número real x al entero más próximo es

$$d(x) = \frac{1}{2} - \left|m(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - \left|x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right| . \tag{2}$$

2. Contextos Matemáticos

2.1. Geometría: Teselaciones

Consideremos dos polígonos regulares diferentes P_1 y P_2 con n_1 y n_2 lados respectivamente. Se busca una condición para los polígonos P_1 y P_2 de tal forma que teselen el plano. Sean X_1 y X_2 el valor del ángulo interior de cada polígono; sobre un punto Q en el espacio se satisface que

$$m_1X_1 + m_2X_2 = 360^\circ , \tag{3}$$

donde m_1 y m_2 es el número de polígonos del tipo P_1 y P_2 respectivamente que deben converger alrededor del punto Q. Por las propiedades de la geometría Euclidiana se sabe que los ángulos centrales de estos polígonos son $w_1 = \frac{360^\circ}{n_1}$ y $w_2 = \frac{360^\circ}{n_2}$ y que la relación entre el ángulo X_i y w_i son de la forma $w_i + X_i = 180^\circ$ para $i = 1, 2$; es por ello que $X_i = 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_i}\right)$ al sustituir en (3), resulta

$$180^\circ\ m_1 \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180^\circ\ m_2 \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) = 360^\circ ,$$

simplificado se escribe como $m_1 + m_2 = 2 + \frac{2m_1}{n_1} + \frac{2m_2}{n_2}$; ya que cada m_i es un entero entonces la igualdad se expresa como

$$m_1 + m_2 = \left\lfloor 2\left(1 + \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right)\right\rfloor .$$

La expresión anterior permite identificar los únicos casos en que es posible la situación de estudio, dado que obliga a que $2\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right)$ sea un entero, esto es: $2\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) = \left\lfloor 2\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right)\right\rfloor = \left\lfloor \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \frac{1}{2}\right\rfloor$ (ver subsección 3.3) y considerando que $n_1, n_2 > 2$ y $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}$, tenemos que, los únicos valores para $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$, que cumplen la condición $2\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) = m_1 + m_2 - 2$, son los presentados en la Tabla 1, en esta se resumen las posibilidades que se pueden presentar cuando convergen dos polígonos diferentes alrededor de un vértice y la cantidad de tales polígonos.

Tabla 1: Posibilidades para $m_1 + m_2$

m_1+m_2	m_1	m_2	n_1	n_2	X_1	X_2	Polígonos
3	1	2	4	8	90°	135°	1 cuadrado y 2 octágonos
	1	2	3	12	60°	150°	1 triángulo y 2 dodecágonos
4	2	2	3	6	60°	120°	2 triángulos y 2 hexágonos
5	3	2	3	4	60°	90°	3 triángulos y 2 cuadrados
	4	1	3	6	60°	120°	4 triángulos y 1 hexágono

Análogamente, es posible que en un punto Q incidan tres polígonos regulares diferentes, en cuyo caso se debe presentar la expresión $m_1 + m_2 + m_3 = \left\lfloor 2\left(1 + \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \frac{m_3}{n_3}\right)\right\rfloor$. Para este último caso solo se presentan dos opciones. En la primera, convergen alrededor de un punto, un cuadrado, un hexágono y un dodecágono. En la segunda, un triángulo, dos cuadrados y un hexágono. En la Figura 1, se presentan las dos teselaciones posibles. Ambas configuraciones son muy similares.

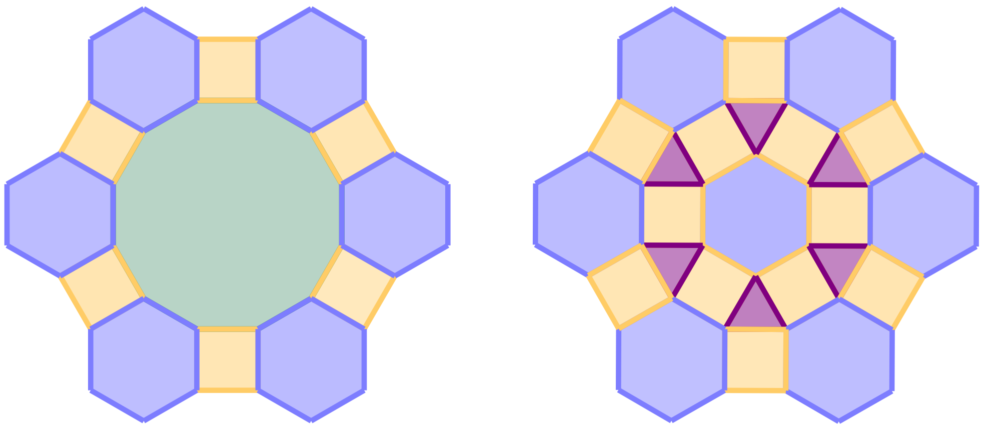


Figura 1: Teselaciones: Tres polígonos regulares diferentes que inciden en punto.

2.2. Geometría: Puntos Red

Se asume un punto red en el plano como aquel cuyas componentes (x, y) son ambas enteras. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa cuyo dominio es el intervalo $[a, b]$ donde a y b son enteros tales que $a < b$. Sea S el conjunto de puntos red (x, y) que satisfacen $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$. A continuación se deduce una expresión para determinar el número de puntos red que pertenecen al conjunto S.

Si se considera el hecho de que f sea una función no negativa, podemos afirmar que los puntos del conjunto S en el plano serán aquellos pertenecientes tanto al eje x como por encima de éste. La cantidad de puntos red a lo largo del eje x en el intervalo $[a, b]$ están dados por $b - a + 1$.

Por otra parte, considerando el hecho que $y \leq f(x)$, entonces interesan también aquellos puntos que están en la curva de la función $(x, f(x))$ y por debajo de esta. Así, para cada valor entero que asuma x en el intervalo $[a, b]$ podemos afirmar que $\lfloor f(x) \rfloor$ representa el número de puntos red de S que están en la curva y por debajo de esta. Luego el total de estos puntos en el intervalo $[a, b]$ está dado por:

$$card(S) = \sum_{i=a}^{b} \lfloor f(i) \rfloor + b - a + 1 \,, \tag{4}$$

donde $card(\cdot)$ hace alusión al cardinal o número de elementos del conjunto S, el número de puntos red debajo de la función no-negativa $y = f(x)$ y definida en el intervalo $[a, b]$.

2.3. Probabilidad

En [2], se encuentra el siguiente ejercicio, cuya solución se basa en la función parte entera y algunas de sus propiedades: "*Hallar la probabilidad de obtener un número divisible por 2 o 3 en una secuencia de números del 1 al n. ¿Qué sucede si $n \to \infty$?*".

Sea A el evento que se describe en la situación anterior, Sea A_2 el evento de obtener un número par entre 1 y n, A_3 el evento de obtener un número divisible por 3 y A_6 es el evento de obtener un número divisible por 6. En este caso se sigue que $P(A) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_6)$. Para saber cuántos números divisibles por $m \in \mathbb{N}$ hay entre 1 y n, se tiene la relación $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$, es decir, la parte entera del cociente entre la longitud del intervalo y el número por el cual se está analizando la divisibilidad. Así, hay $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ divisibles por 2, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ divisibles por 3 y $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ divisibles por 6. entonces la probabilidad del evento A es

$$P(A) = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} + \frac{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}{n} - \frac{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}{n} = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n}{6} \rfloor}{n} \,. \tag{5}$$

Por las propiedades de la función parte entera se tiene que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, es por ello que se tienen las siguientes desigualdades $\frac{n}{2} - 1 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2}$, $\frac{n}{3} - 1 < \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \leq \frac{n}{3}$ y $\frac{n}{6} - 1 < \lfloor \frac{n}{6} \rfloor \leq \frac{n}{6}$. Con estas desigualdades es posible acotar el numerador de la expresión para $P(A)$ dada en (5)

$$\frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 - \frac{n}{6} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor < \frac{n}{2} + \frac{n}{3} - \frac{n}{6} + 1 \,.$$

Al dividir por n, en el término del medio nos queda la probabilidad del evento A, en los extremos se hacen las operaciones necesarias para tener la desigualdad

$$\frac{2n - 6}{3n} < P(A) < \frac{2n + 3}{3n} \,.$$

De acuerdo al teorema de estricción (regla del sandwich), se puede concluir que $\lim\limits_{n \to \infty} P(A) = \frac{2}{3}$. Es decir, si efectuamos este experimento una gran cantidad de veces, podremos obtener un número divisible por 2 o por 3 en el 66 % de las extracciones. Es posible generalizar esta situación como sigue: Considere la secuencia de números naturales consecutivos $1, 2, 3, \ldots, n$. La probabilidad de obtener números divisibles por $k \in \mathbb{N}$ o $r \in \mathbb{N}$, en dicha secuencia y denotada por

$P(B)$, está dado por

$$P(B) = \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n} + \frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{n} - \frac{\left\lfloor \frac{n}{m.c.m(k,r)} \right\rfloor}{n} = \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + \lfloor \frac{n}{r} \rfloor - \left\lfloor \frac{n}{m.c.m(k,r)} \right\rfloor}{n}, \tag{6}$$

donde $m.c.m(k,r)$ es el mínimo común múltiplo de ambos números. A medida que $n \to \infty$ resulta la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} P(B) = \frac{1}{k} + \frac{1}{r} - \frac{1}{m.c.m(k,r)}. \tag{7}$$

2.4. Teoría de Números: Fórmula de Polignac

Consideremos la cantidad de dígitos ceros al final de $n!$ y nombremos por conveniencia a estos dígitos como *Ceros Estables*, se denotan en adelante como $C(n)$. Para ello se hace uso de la descomposición de $n!$ en sus factores primos, resultado que recibe el nombre de fórmula de Polignac (también se le atribuye la fórmula a Legendre [3, 5]). Consideremos los números naturales consecutivos del 1 al 5, en este intervalo hay un múltiplo de 2 y otro de 5, es por ello que 5! debe terminar en cero ya que resulta un múltiplo de 10. Para 21!, los números se pueden dividir en 4 intervalos de 5 números cada uno: 1 al 5, 6 al 10, 11 al 15 y 16 al 20, en cada uno hay un múltiplo de 2 y 5, por ende, 21! debe terminar en 4 ceros, donde $\left\lfloor \frac{21}{5} \right\rfloor = 4$. En el caso de 25!, hay 5 intervalos de 5 números cada uno, por lo que dicho factorial debe terminar en 5 ceros; sin embargo, 25 es 5×5, lo que implica que hay un 5 adicional que al multiplicarse por uno de los pares de cualquiera de los intervalos, produce un cero adicional, es por ello que 25! termina en 6 ceros. Para 25!, el total de ceros en los cuales termina es $\lfloor \frac{25}{5} \rfloor + \left\lfloor \frac{25}{5^2} \right\rfloor = 5 + 1$. Esta situación ocurre de nuevo cuando aparece otra potencia de 5 que es $125 = 5^3$. De acuerdo con esto, la cantidad de ceros se puede encontrar como

$$C(n) = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor, \tag{8}$$

donde $k \in \mathbb{N}$ es el menor exponente tal que $\left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor = 0$. Esta última expresión implica que $0 \leq \frac{n}{5^k} < 1$, aplicando algunas operaciones algebraicas se obtiene que $\ln n < k \ln 5$, como k es el menor entero entonces $k = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 5} \right\rfloor = \lfloor \log_5 n \rfloor$. Otra manera de obtener esta cantidad de ceros estables es por la aplicación sucesiva del algoritmo de Euclides en la dirección de un cambio de base, en este caso en la base 5. En la Tabla 2, se muestran algunos de estos resultados:

Tabla 2: Número de ceros al final de $n!$

n	$n!$	$C(n)$	n	$n!$	$C(n)$
1	1	0	11	39916800	2
2	2	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	6	0	15	1307674368000	3
4	24	0	16	20922789888000	3
5	120	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	720	1	20	2432902008176640000	4
7	5040	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	40320	1	n	$\Gamma(n+1) = n!$	
9	362880	1			
10	3628800	2			

2.5. Sistemas numéricos: Números complejos

Considere un número complejo z escrito en forma binómica como $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Se define la parte entera de z como $\lfloor z \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor i$, donde se asume, por definición, que $\lfloor i \rfloor = i$ y $\lfloor -i \rfloor = -\lfloor i \rfloor = -i$. Se analiza ahora la función compleja $f(z) = |\lfloor z \rfloor|$, donde $|\cdot|$ es el módulo de dicho número complejo. Tal función $f(z)$ se puede escribir como una función de dos variables en la forma

$$f(z) = |\lfloor z \rfloor| = \sqrt{\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor y \rfloor^2} = g(x, y) \ . \tag{9}$$

Con base en la definición de la función parte entera de un número complejo, la imagen $\lfloor z \rfloor$ es constante por rectángulos en el plano de Argand (plano complejo), es por ello que la función $f(z) = |\lfloor z \rfloor|$, en el intervalo $I_{M,N} = [M, M+1) \times [N, N+1)$ es $f(z) = \sqrt{M^2 + N^2}$, las fronteras derecha y superior del rectángulo, donde la suma $W = M + N$ (como enteros no negativos) permite escribir la función f como $f(z) = \sqrt{M^2 + (W - M)^2}$. Por ejemplo, si $W = 4$, entonces se presentan para M y N las posibilidades 4 y 0, 1 y 3, 2 y 2, 3 y 1, también 0 y 4 respectivamente. Las imágenes bajo f son 4, $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ y 4 respectivamente. En la Tabla 3, se presenta esta información y se asocia un color acorde a la suma que resulta para W.

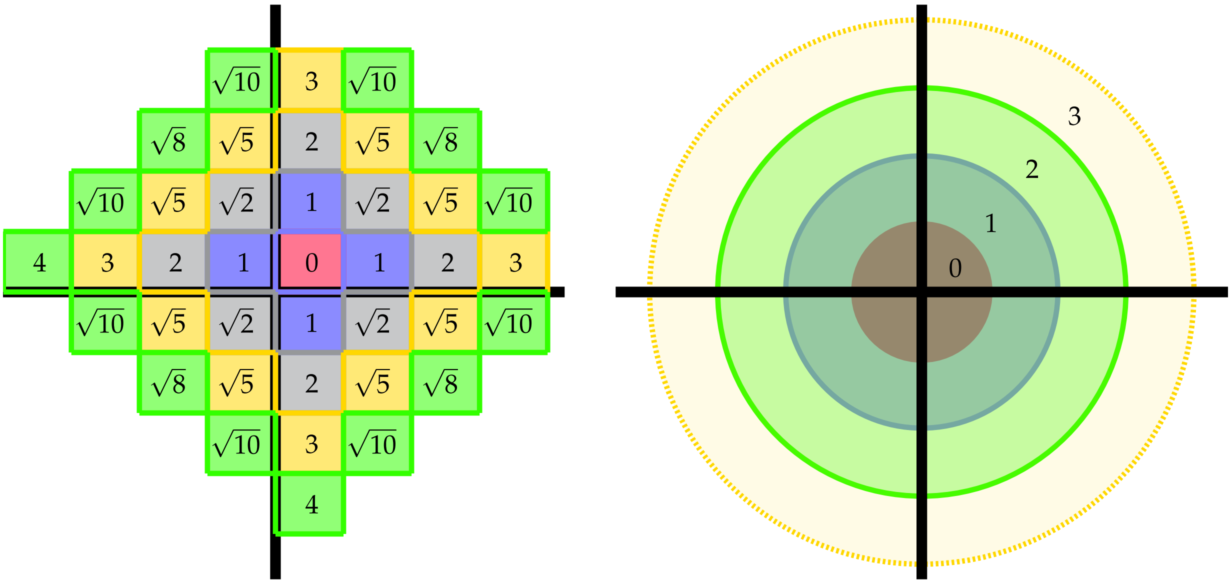
Tabla 3: Valores de W en la función $f(z) = |\lfloor z \rfloor|$

W	M	N	$f(z)$	Color	W	M	N	$f(z)$	Color
0	0	0	0	Rojo		1	2	$\sqrt{5}$	Amarillo
1	1	0	1	Azul		0	3	3	Amarillo
	0	1	1	Azul	4	4	0	4	Verde
2	2	0	2	Gris		3	1	$\sqrt{10}$	Verde
	1	1	$\sqrt{2}$	Gris		2	2	$\sqrt{8}$	Verde
	0	2	2	Gris		1	3	$\sqrt{10}$	Verde
3	3	0	3	Amarillo		0	4	4	Verde
	2	1	$\sqrt{5}$	Amarillo					

En la Figura 2 a), se presentan las imágenes del módulo de la parte entera de un número complejo, analice dicho gráfico como una vista aérea de la función en tres dimensiones.

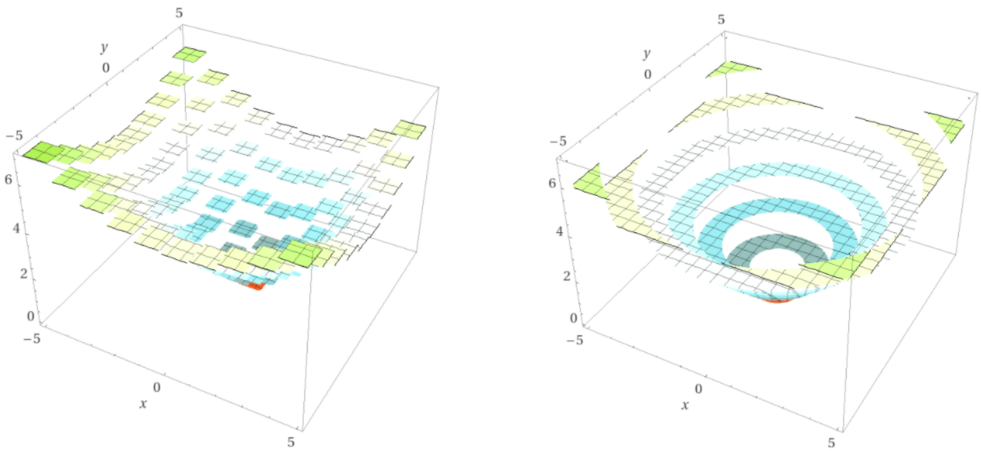
Considere ahora la función compleja $g(z) = \lfloor |z| \rfloor$, es decir, la parte entera del módulo de un número complejo. Como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces $g(z)$ se puede ver como una función de dos variables de la forma $h(x, y) = \left\lfloor \sqrt{x^2 + y^2} \right\rfloor$. Ya que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa un cono, entonces $g(z) = h(x, y)$, es la parte entera de un cono. Por la definición de la parte entera, si se tienen las desigualdades $M \leq \sqrt{x^2 + y^2} < M + 1$ con M entero, entonces $\left\lfloor \sqrt{x^2 + y^2} \right\rfloor = M$, las desigualdades se cumplen siempre que $M^2 \leq x^2 + y^2 < (M+1)^2$, es decir, para aquellos (x, y) que se encuentran comprendidos entre dos circunferencias de radio M y $M + 1$, sin contener la segunda circunferencia. Se forman así anillos circulares. Como $x^2 + y^2$ es un valor no negativo entonces, M es un entero no negativo. En la Figura 2 b), se ilustra esta situación y en la Figura 3 a) y 3 b) se muestran vistas en 3D para ambos casos.

De acuerdo a los resultados para $f(z) = |\lfloor z \rfloor|$ y $g(z) = \lfloor |z| \rfloor$ y las Figuras 2 a) y 2 b), es posible encontrar aquellos valores complejos para los cuales $|\lfloor z \rfloor| = \lfloor |z| \rfloor$. Sea $z = a + bi$ un número complejo para el cual se cumple dicha igualdad, los posibles valores de este número complejo son las porciones de las circunferencia para las cuales se satisface $M - 1 < \sqrt{a^2 + b^2} < M$, para $M \in \mathbb{N}$ y a, b puede estar en cualquiera de los rectángulos $[0, 1) \times [M - 1, M)$ o $[M - 1, M) \times [0, 1)$. En la Figura 4 se ilustran estas opciones.



a) Módulo de la parte entera, $|\lfloor z \rfloor|$. b) Parte entera del módulo, $\lfloor |z| \rfloor$.

Figura 2: Parte entera y módulo de un número complejo.



a) Vista 3D del módulo de parte entera. b) Vista $3D$ de la parte entera del módulo.

Figura 3: Vista en 3D para $|\lfloor z \rfloor|$ and $\lfloor |z| \rfloor$.

3. Algunas Propiedades

3.1. Condiciones de Aditividad

Considérese a continuación la función de dos variables dada por

$$f(x,y) = \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \, . \tag{10}$$

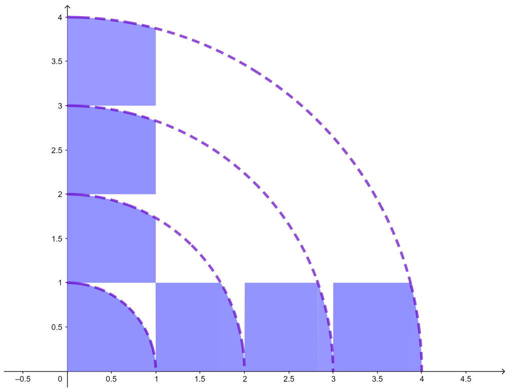


Figura 4: Valores que satisfacen $\lfloor |z| \rfloor = |\lfloor z \rfloor|$.

Se procede al análisis de los valores x, y para que la función f satisfaga la igualdad $f(x,y) = 0$, lo que conduce a hallar las condiciones para que se de la igualdad

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \,. \tag{11}$$

Sea $K = \lfloor x+y \rfloor$, donde K debe ser un número entero acorde a la definición de la función parte entera. Sin pérdida de generalidad, se asumirá que $\lfloor x \rfloor = M + K$ y $\lfloor y \rfloor = -M$ esto con el fin que la ecuación 11 se cumpla, donde $M \in \mathbb{Z}$. Por la definición de la función parte entera se presentan las desigualdades

$$K \leq x+y < K+1\,, \quad M+K \leq x < M+K+1 \quad \text{y} \quad -M \leq y < -M+1\,.$$

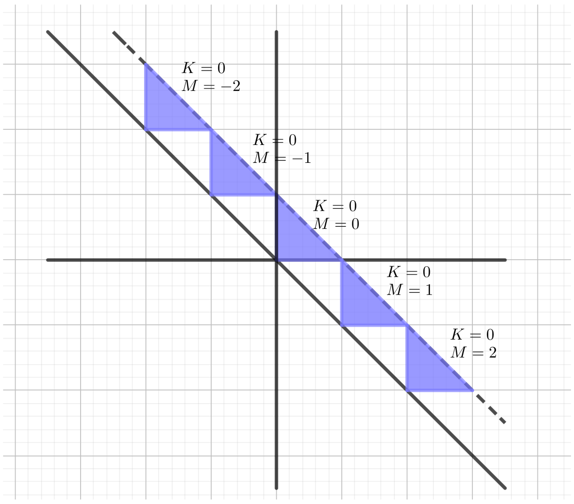
La primera desigualdad implica que son todos los (x,y) que están por debajo de la recta $y = -x + (K+1)$ sin contenerla y que además están por encima de la recta $y = -x + K$ conteniéndola. Las dos desigualdades restantes acotan los intervalos para x y y, en cuyo caso son los rectángulos

$$I_{M,K} = [M+K, M+K+1) \times [-M, -M+1). \tag{12}$$

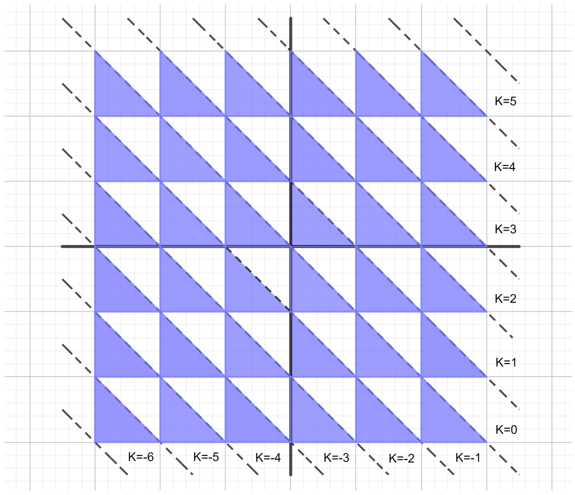
Se analizan algunos de los casos, sabiendo que K y M son números enteros. Si $K = 0$, $f(x,y) = 0$ para aquellos valores por debajo de la recta $y = -x+1$ y por encima de la recta $y = -x$, el rectángulo admisible es $I_{M,0} = [M, M+1) \times [-M, -M+1)$. Se analizan algunas posibilidades para M. Si $M = 0$, el intervalo se escribe como $I_{0,0} = [0,1) \times [0,1)$, mientras que $f(x,y) = 0$ se cumple para un triángulo rectángulo, el cual no contienen la hipotenusa. Para $M = 1$, el intervalo es $I_{1,0} = [1,2) \times [-1,0)$, el triángulo rectángulo que se forma contiene los vértices $(1,0)$, $(1,-1)$ y $(2,-1)$. Cuando $M = -1$, en el intervalo $I_{-1,0} = [-1,0) \times [1,2)$ se forma un triángulo rectángulo en el segundo cuadrante.

En la Figura 5 a) se ilustran los tres triángulos rectángulos para $M = -2, -1, 0, 1, 2$, rectángulos que no contienen la hipotenusa, pero sí los vértices. De manera análoga, al extender este razonamiento para cualquier valor de K y de M, se encuentra que $f(x,y) = 0$ para todos los puntos que están en el interior de los triángulos rectángulos o en sus vértices pero sin contener las hipotenusas. En la Figura 5 b) se presentan los diferentes casos de manera general para que se satisfaga $f(x,y) = 0$.

Se elige ahora un punto que no esté en las regiones sombreadas de la Figura 5 b); es decir, una pareja (x,y) para la cual $f(x,y) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, se puede tomar cualquier punto (x,y) tal que $\lfloor m(x) + m(y) \rfloor = 1$, por ejemplo el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$, al calcular la imagen bajo f se obtiene $f\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right) = \left\lfloor \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 2 - 1 - 0 = 1$. En términos generales, para



a) $K = 0$.



b) Interceptos con el plano x, y de la función $f(x, y)$.

Figura 5: Valores para los cuales $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

cualquier punto que no esté en dicha región, $f(x, y) = 1$, esto se demuestra fácilmente siempre que $\lfloor m(x) + m(y) \rfloor = 1$. Acorde con lo presentado hasta el momento, se puede concluir que la función f está acotada para todo valor de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde $0 \leq f(x, y) \leq 1$, y por tanto $0 \leq \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq 1$, con lo cual se presentan las igualdades

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 0 \quad \text{o} \quad \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1. \tag{13}$$

Por otra parte, como $0 \leq m(x) < 1$ y $0 \leq m(y) < 1$, entonces $0 \leq m(x) + m(y) < 2$, lo cual implica dos opciones, $\lfloor m(x) + m(y) \rfloor = 0$ o $\lfloor m(x) + m(y) \rfloor = 1$. Estos dos últimos casos permiten concluir (mediante sustitución directa) en (13), que

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor m(x) + m(y) \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \rfloor . \tag{14}$$

En la Figura 6, se presenta una porción del gráfico de la función $f(x, y)$ a modo de ilustración del proceso así construido.

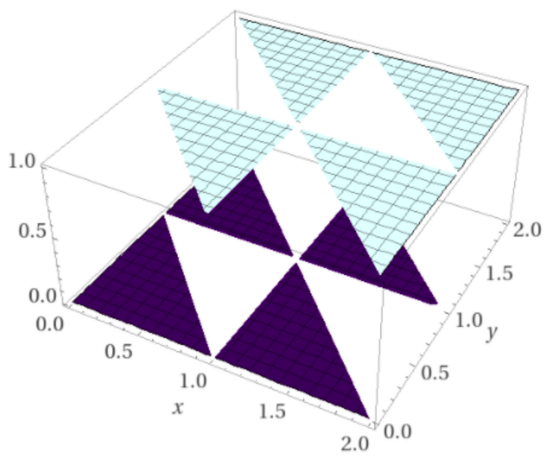


Figura 6: Gráfica de la función $f(x, y) = \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$.

Finalmente, nótese el hecho que si y es un entero, llámese n, entonces $\lfloor y \rfloor = n$ y $m(y) = 0$, luego en la expresión (14) se tiene que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n + \lfloor m(x) \rfloor$, como $0 \leq m(x) < 1$ se concluye que

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \, . \tag{15}$$

La expresión 14 puede generalizarse para dos números complejos z_1 y z_2 como

$$\lfloor z_1 + z_2 \rfloor = \lfloor z_1 \rfloor + \lfloor z_2 \rfloor + \lfloor z_1 + z_2 - \lfloor z_1 \rfloor - \lfloor z_2 \rfloor \rfloor.$$

Otra versión para la igualdad 13 está dada por

$$\lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor \quad \text{o} \quad \lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 \, , \tag{16}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. La primera de ellas se cumple para $0 \leq m(x) < \frac{1}{k+1}$ siempre que $k \neq -1$. Mientras que la segunda es cierta para $\frac{1}{k+1} \leq m(x) < 1$. Téngase en cuenta que si $k = -1$ resulta la expresión $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ si $x \in \mathbb{Z}$, y $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ para cualquier real no entero.

3.2. Suma de partes enteras

De acuerdo con la igualdad 15 se puede demostrar una igualdad para la suma de las parte entera de un real x y la parte entera de su siguiente; tal relación depende del doble del número real x y se escribe como

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor = 1 + 2\lfloor x \rfloor. \tag{17}$$

Por medio de la igualdad 17 se hallará una serie para $\lfloor kx \rfloor$ que dependa de $\lfloor kx + i \rfloor$ para $i \in \mathbb{N}$. De acuerdo con la propiedad 17 es posible hallar expresiones para las sumas $\lfloor kx \rfloor + \lfloor kx + 1 \rfloor$ y $\lfloor kx + 1 \rfloor + \lfloor kx + 2 \rfloor$, que al combinarse las mismas, conduce a una relación entre kx, $kx + 1$ y $kx + 2$, dada por $\lfloor kx \rfloor = 2\lfloor kx + 1 \rfloor - \lfloor kx + 2 \rfloor$. Ya que $\lfloor kx + 2 \rfloor + \lfloor kx + 3 \rfloor = 1 + 2\lfloor kx + 2 \rfloor$, entonces $\lfloor kx \rfloor = 2\lfloor kx + 1 \rfloor - 2\lfloor kx + 2 \rfloor + \lfloor kx + 3 \rfloor - 1$. Procediendo en forma inductiva, se concluye la siguiente propiedad

$$\lfloor kx \rfloor = 2\lfloor kx + 1 \rfloor - 2\lfloor kx + 2 \rfloor + 2\lfloor kx + 3 \rfloor - 2\lfloor kx + 4 \rfloor + \ldots = 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\lfloor kx + i \rfloor \, . \tag{18}$$

Análogamente, se puede demostrar que

$$\lceil kx \rceil = 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\lceil kx + i \rceil. \tag{19}$$

Se presenta otra versión de la suma de partes enteras cuando tenemos fracciones con denominadores naturales. Ya que son ciertas las igualdades: $\lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{1} \rfloor = \left\lfloor \frac{2\lfloor x \rfloor}{1} \right\rfloor$ y $\lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{2} \rfloor = \left\lfloor \frac{3\lfloor x \rfloor}{2} \right\rfloor$, es posible establecer la siguiente generalización: si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+1)\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor \, . \tag{20}$$

Para demostrar dicha igualdad, se procede de acuerdo con el principio de inducción matemática. Si $n = 1$ la proposición se cumple ya que $\lfloor x \rfloor$ es un entero. Se supone que la proposición es cierta para $k \in \mathbb{N}$, se escribe

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor \, . \tag{21}$$

Mientras que la tesis inductiva, está dada por

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x\rfloor + \frac{\lfloor x\rfloor}{k+1} \right\rfloor .$$

En primer lugar se asume que $x \geq 0$, en tal caso se presenta la desigualdad $\frac{x}{k+1} \leq \frac{x}{k}$, lo cual conduce a $\left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Como ambos términos son enteros, entonces existe un entero no negativo λ, para el cual $\left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \lambda$. Ya que $\lambda \in \mathbb{Z}$, se puede hacer uso de la propiedad 15 y hacer uso de propiedades algebraicas como sigue

$$\begin{aligned}
\lfloor x\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor &= \lfloor x\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \lambda = \left\lfloor \lfloor x\rfloor + \frac{\lfloor x\rfloor}{k} \right\rfloor - \lambda = \left\lfloor \lfloor x\rfloor + \frac{\lfloor x\rfloor}{k} - \lambda \right\rfloor ,\\
\lfloor x\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor &= \left\lfloor \lfloor x\rfloor + \frac{\lfloor x\rfloor}{k+1} + \frac{\lfloor x\rfloor}{k} - \frac{\lfloor x\rfloor}{k+1} - \lambda \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x\rfloor + \frac{\lfloor x\rfloor}{k+1} + \frac{\lfloor x\rfloor}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor .
\end{aligned}$$

Si se demuestra que $\lambda = \frac{\lfloor x\rfloor}{k(k+1)}$ entonces la tesis inductiva se cumple y por ende la igualdad 20 se satisface para todo $n \in \mathbb{N}$. Ya que $\left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} - \lambda \right\rfloor$, entonces se presenta la igualdad

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k+1} + \frac{x}{k} - \frac{x}{k+1} - \lambda \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k+1} + \frac{x}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor ,\\
\left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k+1} + \frac{\lfloor x\rfloor + m(x)}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k+1} + \frac{m(x)}{k(k+1)} + \frac{\lfloor x\rfloor}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor .\\
\Rightarrow 0 &= \left\lfloor m\left(\frac{x}{k+1}\right) + \frac{m(x)}{k+1} + \frac{\lfloor x\rfloor}{k(k+1)} - \lambda \right\rfloor .
\end{aligned}$$

Ahora bien como $\left\lfloor \frac{x}{n_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x\rfloor}{n_k} \right\rfloor$ para todo $n_k = 1, 2, 3, 4, ..., k \in \mathbb{N}$, se cumple que $m\left(\frac{x}{k}\right) + \frac{m(x)}{k} < 1$ y como $\frac{x}{k+1} < \frac{x}{k}$ entonces se cumple la desigualdad $0 \leq m\left(\frac{x}{k+1}\right) + \frac{m(x)}{k(k+1)} < 1$, luego $0 = \left\lfloor m\left(\frac{x}{k+1}\right) + \frac{m(x)}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor m\left(\frac{x}{k+1}\right) + \frac{m(x)}{k+1} + 0 \right\rfloor$, entonces solo resta que $\frac{\lfloor x\rfloor}{k(k+1)} - \lambda = 0$. Lo cual permite concluir la demostración.

Algunas consecuencias de la igualdad 20 son

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{(i+1)\lfloor x\rfloor}{i} \right\rfloor - n\lfloor x\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor , \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{(i+1)\lceil x\rceil}{i} \right\rceil - n\lceil x\rceil = \left\lceil \frac{x}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{x}{n} \right\rceil . \tag{23}$$

3.3. Parte entera de un múltiplo

Puesto que $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$ entonces la función parte entera satisface las propiedades

$$\lfloor 2x\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \text{y} \quad \lfloor 3x\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor ,$$

de acuerdo a esta secuencia, es posible establecer la siguiente generalización

$$\lfloor nx\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{i}{n} \right\rfloor . \tag{24}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Se demostrará esta propiedad por medio del principio de inducción matemática. La hipótesis inductiva tiene la forma

$$\lfloor kx \rfloor = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor . \tag{25}$$

Mientras que la tesis de inducción la cual ha de ser probada, puede ser planteada como

$$\lfloor (k+1)x \rfloor = \sum_{i=0}^{k} \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor .$$

De acuerdo con las ecuaciones presentadas en (16), se presentan dos casos

Caso 1 $\lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1,$ ***donde*** $\frac{1}{k+1} \leq m(x) < 1.$

Con base en la igualdad presentada en este primer caso y por la hipótesis inductiva se tiene

$$\begin{aligned} \lfloor (k+1)x \rfloor &= \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{k}{k} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{k} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor . \end{aligned}$$

Puesto que $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, entonces para cada uno de estos valores de i fijos, se satisface $0 \leq \frac{i}{k(k+1)} < \frac{i}{k+1} < 1$ y como $\frac{1}{k+1} \leq m(x) < 1$ entonces se tiene que $\left\lfloor \frac{i}{k} + m(x) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{i}{(k+1)} + m(x) \right\rfloor$ $\Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{i}{k} + m(x) \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{i}{(k+1)} + m(x) \right\rfloor, \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor = \left\lfloor x + \frac{i}{(k+1)} \right\rfloor$ lo que permite concluir para el caso 1 , que

$$\lfloor (k+1)x \rfloor = \sum_{i=0}^{k} \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor .$$

Caso 2 $\lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor,$ ***donde*** $0 \leq m(x) < \frac{1}{k+1}.$

Por la ecuación 16, se cumple que $\lfloor (k+1)x \rfloor = \lfloor kx + x \rfloor = \lfloor kx \rfloor + \lfloor x \rfloor$, sustituyendo la hipótesis inductiva en la anterior expresión y sabiendo que $0 \leq \frac{k}{k+1} < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, resulta

$$\begin{aligned} \lfloor (k+1)x \rfloor &= \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{k}{k+1} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{k} \left\lfloor x + \frac{i}{k+1} \right\rfloor . \end{aligned}$$

El lector puede notar que la propiedad dada en (24), permite expresar un número entero como una suma finita de partes enteras, por ejemplo, para el número 8 se hace $n = 4$ y $x = 2$ con lo cual se obtiene $8 = \lfloor 2 \rfloor + \left\lfloor 2 + \frac{1}{4} \right\rfloor + \lfloor 2 + \frac{2}{4} \rfloor + \lfloor 2 + \frac{3}{4} \rfloor$.

3.4. Suma de la parte entera de los múltiplos de un número

Sea $x \in \mathbb{R}$. El objetivo ahora es encontrar una expresión para la suma de la parte entera de los múltiplos de x hasta nx, donde $n \in N$

$$f(n, x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor . \tag{26}$$

Este primer análisis se lleva a cabo para $x \in [0,1)$ y para $n = 4$. Se halla primero $\lambda = m.c.m.(1,2,3,4)$ que es el valor que determina el número de intervalos en que se subdivide al intervalo $[0,1)$, donde $m.c.m.(1,2,3,4) = 12$. A continuación se presenta dicha subdivisión y en cada entrada de la tabla 4 se coloca el resultado que admite $\lfloor ix \rfloor$ para $i = 1,2,3,4$ en cada subintervalo.

Tabla 4: $f(4,x)$ para $x \in [0,1)$

Subintervalos	$\lfloor x \rfloor$	$\lfloor 2x \rfloor$	$\lfloor 3x \rfloor$	$\lfloor 4x \rfloor$	Suma
$\left[0, \frac{1}{12}\right)$	0	0	0	0	0
$\left[\frac{1}{12}, \frac{2}{12}\right)$	0	0	0	0	0
$\left[\frac{2}{12}, \frac{3}{12}\right)$	0	0	0	0	0
$\left[\frac{3}{12}, \frac{4}{12}\right)$	0	0	0	1	1
$\left[\frac{4}{12}, \frac{5}{12}\right)$	0	0	1	1	2
$\left[\frac{5}{12}, \frac{6}{12}\right)$	0	0	1	1	2
$\left[\frac{6}{12}, \frac{7}{12}\right)$	0	1	1	2	4
$\left[\frac{7}{12}, \frac{8}{12}\right)$	0	1	1	2	4
$\left[\frac{8}{12}, \frac{9}{12}\right)$	0	1	2	2	5
$\left[\frac{9}{12}, \frac{10}{12}\right)$	0	1	2	3	6
$\left[\frac{10}{12}, \frac{11}{12}\right)$	0	1	2	3	6
$\left[\frac{11}{12}, 1\right)$	0	1	2	3	6

Algunas conclusiones en la Tabla 4, en la primera columna todos los valores son ceros. En la segunda, se divide 12 entre dos, la primer mitad son ceros y la segunda mitad 1. Para la tercer columna se hace $12 \div 3 = 4$, se coloca 0, 1 y 2 cada 4 subintervalos. Finalmente, para la cuarta columna los números se distribuyen en 0, 1, 2 y 3 cada $12 \div 4 = 3$ elementos. Por ejemplo, si $x = 0.41$, éste se encuentra en el quinto intervalo, es decir, $x \in \left[\frac{4}{12}, \frac{5}{12}\right)$ y por ende $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor = 2$.

¿Cómo encontrar el valor de $f(n,x)$ sin recurrir a la tabla? Sea $\lambda = m.c.m.(1,2,3,\ldots,n)$, número que determina el número de subintervalos. Dado x, es necesario saber en cuál de los λ subintervalos estará, para ello se encuentra el número $w = x\lambda$, cuya parte entera determina el subintervalo, ya que $\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \leq x < \frac{\lfloor w \rfloor + 1}{\lambda}$. Se hallan los múltiplos de los extremos del intervalo $i\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda}$ para $i = 1,2,\ldots,n$, se obtienen las parte enteras de estos resultados y se suma.

$$f(n,x) = \left\lfloor \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor + \left\lfloor 2\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor + \left\lfloor 3\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor n\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor , \tag{27}$$

equivalente a $f(n,x) = f\left(n, \left\lfloor \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor\right)$ que depende del extremo izquierdo del intervalo que contiene a x. El valor máximo que puede tomar la suma definida en (26), para $x \in [0,1)$ es $1 + 2 + \ldots + n - 1$; es por ello que

$$0 \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor \leq \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{si } x \in [0,1) . \tag{28}$$

Sea x un número real arbitrario, el cual se puede escribir como un número entero y un decimal entre 0 y 1, se escribe $x = N + m$, donde $N = \lfloor x \rfloor$ y $m = m(x)$. Por la expresión 15 se tiene

$\lfloor nx \rfloor = \lfloor nN + nm \rfloor = nN + \lfloor nm \rfloor$, aplicando esto para cada valor de n resulta

$$\begin{aligned} f(n,x) &= \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor = (N + \lfloor m \rfloor) + (2N + \lfloor 2m \rfloor) + \ldots + (nN + \lfloor nm \rfloor) \\ &= (N + 2N + 3N + \ldots + nN) + (\lfloor m \rfloor + \lfloor 2m \rfloor + \ldots + \lfloor nm \rfloor) = f(n,N) + f(n,m) \\ &= N \sum_{i=1}^{n} i + f(n,m) = \frac{Nn(n+1)}{2} + f(n,m) \, . \end{aligned} \tag{29}$$

A modo de ejemplo, se considera a $x = 4.82$. La idea es hallar la suma de los múltiplos de x hasta $9x$, es decir, $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 9x \rfloor$. El número x se puede descomponer como la suma $x = 4 + 0.82$, luego $N = 4$ y $m = 0.82$. Se halla el mínimo común múltiplo de los números consecutivos hasta el 9, $\lambda = m.c.m.(1,2,3,4,5,6,7,8,9) = 2520$, que es el número de subintervalos en que se divide $[0,1)$. Se encuentra el extremo izquierdo del intervalo en que se encuentra m, donde $w = m\lambda = 2066.4$ y $\lfloor w \rfloor = 2066$. El extremo izquierdo de este intervalo es $\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} = \frac{2066}{2052}$, la parte entera de los nueve múltiplos de estos extremos son

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor = 0 \, , \quad \left\lfloor 2\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor = 1 \, , \quad \left\lfloor 3\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor = 2 \, , \quad \left\lfloor 4\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor = 3 \, , \quad \left\lfloor 5\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor = 4 \, , \\ &\left\lfloor 6\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor = 4 \, , \quad \left\lfloor 7\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor = 5 \, , \quad \left\lfloor 8\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor = 6 \quad \text{y} \quad \left\lfloor 9\frac{\lfloor w \rfloor}{\lambda} \right\rfloor = 7 \, . \end{aligned}$$

Sumando estos resultados se tiene que $f(9, 0.82) = 32$, se sustituye $N = 4$ y $n = 9$ en la expresión 29 para concluir $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 9x \rfloor = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10}{2} + 32 = 212$.

3.5. Suma de las raíces de los naturales consecutivos

En esta sección se pretende acotar la suma $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}$. Se denotará la suma parcial como R_n, la cual está dada por $R_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \ldots + \sqrt{n}$, donde $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ es una serie divergente. A continuación se encontrarán dos sucesiones a_n y b_n tales que $a_n < R_n < b_n$ y se encontrará un valor aproximado para $\lfloor R_n \rfloor$. Sea $w = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ para $n \in \mathbb{N}$. Si n es 1, 2 o 3 entonces $w = 1$ ya que la raíz no supera las dos unidades. En la Tabla 5 se presenta la relación entre w y n.

Tabla 5: Valores de $w = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

$w = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$	Valores para n	Total
1	$1,2,3$	3
2	$4,5,6,7,8$	5
3	$9,10,11,12,13,14,15$	7
4	$16,17,18,19,20,21,22,23,24$	9

De acuerdo con la tabla se sabe que estas partes enteras se presentan a través de una cantidad impar de términos. Dado n, la pretensión está en determinar cuántos bloques de números impares hay antes de él y cuántos términos faltan por manipular. Por ejemplo, si $n = 18$ se puede decir que $w = \lfloor \sqrt{18} \rfloor = 4$ y $3 + 5 + 7 + 3 = 18$, es decir, en la suma $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{17} + \sqrt{18}$ hay tres términos cuya parte entera es 1, hay 5 cuya parte entera es 2 y hay 7 cuya parte entera es 3, y hay 3 cuya parte entera es 4. En general, se puede considerar la expresión

$$3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + f + k = n, \tag{30}$$

donde f es un número impar que representa la cantidad de raíces que tendrán la misma parte entera, mientras que k es el valor que le falta a dicha suma para obtener los n términos. El valor de f se puede encontrar como $f = 2(w-1)+1$, por lo que la igualdad 30 se escribe como $3+5+7+\ldots+(2(w-1)+1)+k=n$. Ya que la suma de números impares consecutivos es un número cuadrado entonces $[w-1+1]^2-1+k=n$. De donde se deduce que

$$k = n+1-w^2 = n+1-\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor^2. \tag{31}$$

Se considera de nuevo el caso en que $n=18$ ($w=4$ y $k=3$) se puede establecer que la sucesión R_n está acotada de la siguiente manera

$$1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot 3 \leq 1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{17}+\sqrt{18} \leq 2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 7+5\cdot 3. \tag{32}$$

Sean a_n y b_n dos sucesiones tales que $a_n < R_n < b_n$, con base en las multiplicaciones que se presentaron en (32) es posible hallar expresiones para estas sucesiones, por ejemplo

$$\begin{aligned}
a_n &= 1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+(w-1)f+wk,\\
a_n &= 1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+(w-1)[2(w-1)+1]+wk,\\
a_n &= 2\sum_{i=1}^{w-1} i^2+\sum_{i=1}^{w-1} i+wk,\\
a_n &= \frac{1}{6}[w(w-1)(4w+1)]+wk.
\end{aligned} \tag{33}$$

Regresando a la desigualdad presentada en (32), es posible hallar una expresión para la sucesión b_n donde

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\cdot 2+3\cdot 5+4\cdot 7+\ldots+wf+(w+1)k,\\
b_n &= 2\cdot 2+3\cdot 5+4\cdot 7+\ldots+w[2(w-1)+1]+(w+1)k,\\
b_n &= 2\sum_{i=1}^{w-1} i(i+1)+\sum_{i=2}^{w} i+(w+1)k,\\
b_n &= \frac{1}{6}[w(w+1)(4w-1)]+kw+(k-1).
\end{aligned} \tag{34}$$

En las expresiones 33 y 34 se hallaron cotas para la suma $R_n = 1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$. Sin embargo, a medida que n crece, la diferencia entre estas dos sucesiones aumenta también, se calcula $b_n - a_n$ para tener

$$\begin{aligned}
b_n - a_n &= \left[\frac{1}{6}[w(w+1)(4w-1)]+kw+(k-1)\right] - \left[\frac{1}{6}[w(w-1)(4w+1)]+wk\right],\\
&= \frac{w}{6}[4w^2-w+4w-1-4w^2-w+4w+1]+k-1 = w^2+k-1 = n,
\end{aligned} \tag{35}$$

es decir, mientras n crece, la diferencia entre ambas sucesiones aumenta. En la Tabla 6, se presenta esta situación, donde se halla también el término $\frac{a_n+b_n}{2}$ y su parte entera para mostrar que es una mejor aproximación para $\lfloor R_n \rfloor$ que $\lfloor a_n \rfloor$ o $\lfloor b_n \rfloor$ en forma independiente.

Tabla 6: Sucesiones a_n y b_n para $n = 1, 2, \ldots, 11$

n	w	k	a_n	bn	$b_n - a_n$	R_n	$\lfloor R_n \rfloor$	$\frac{a_n+b_n}{2}$	$\left\lfloor \frac{a_n+b_n}{2} \right\rfloor$
1	1	1	1	2	1	1	1	1.5	1
2	1	2	2	4	2	2.4142	2	3	3
3	1	3	3	6	3	4.14626	4	4.5	4
4	2	1	5	9	4	7.8783	7	7	7
5	2	2	7	12	5	10.1143	10	9.5	9
6	2	3	9	15	6	12.56387	12	12	12
7	2	4	11	18	7	15.20962	15	14.5	14
8	2	5	13	21	8	18.03805	18	17	17
9	3	1	16	25	9	21.03805	21	20.5	20
10	3	2	19	29	10	24.2003	24	24	24
11	3	3	22	33	11	27.51695	27	27.5	27

Si $n = 45$, entonces $R_{45} \approx 204.2398545$ y es por ello que $\lfloor R_{45} \rfloor = 204$. A través de las sucesiones a_n y b_n tenemos que $w = \lfloor \sqrt{45} \rfloor = 6$ y $k = 45 + 1 - 6^2 = 10$, con estos valores de w y k la sucesión a_n en (33) es equivalente a $a_{45} = 185$ y b_n en (34) es $b_{45} = 230$, donde $b_{45} - a_{45} = 230 - 185 = 45$ que es una gran diferencia entre ambas sucesiones; el valor promedio es $\frac{a_{45}+b_{45}}{2} = 207.5$ y es por ello que $\left\lfloor \frac{a_{45}+b_{45}}{2} \right\rfloor = 207$, que es una mejor aproximación para $\lfloor R_{45} \rfloor = 204$.

3.6. Suma de las raíces de los recíprocos de los naturales consecutivos

Considere la sucesión $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ y sea $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ la sucesión de sumas parciales de a_n, donde la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente por el criterio de la p-serie. A continuación se hallarán cotas para S_n y $\lfloor S_n \rfloor$.

En [8], Korovkin presenta una cota para S_n, para ello demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisface la desigualdad

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}\,. \tag{36}$$

Desigualdad que acota el término $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de la sucesión de sumas parciales en el intervalo $[n, n+1]$ para la expresión de la izquierda y $[n-1, n]$ es el intervalo para el lado derecho. En los dos casos se está trabajando con intervalos de una unidad de longitud. A partir de (36) se tienen cotas para S_n de la forma

$$2\sqrt{n} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1\,, \tag{37}$$

de allí que $\lfloor 2\sqrt{n} - 2 \rfloor \leq \lfloor S_n \rfloor \leq \lfloor 2\sqrt{n} - 1 \rfloor$. En la desigualdad 37, nótese que S_n está acotada entre dos sucesiones a_n y b_n tales que $b_n - a_n = 1$, es decir, en el intervalo $[a_n, b_n]$ debe existir por lo menos un entero; en el caso en que $a_n \in \mathbb{N}$ entonces $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor a_n \rfloor$, si $a_n \notin \mathbb{N}$ entonces $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor b_n \rfloor$. Por ejemplo, si $n = 8$ entonces $a_8 = 3.656\ldots$ y $b_8 = 4.656\ldots$, mientras que $S_8 = 4.371\ldots$, se cumple así que $\lfloor S_8 \rfloor = \lfloor b_8 \rfloor = 4$ ya que $a_8 \notin \mathbb{N}$. Si $n = 25$ entonces $a_{25} = 8$ y $b_{25} = 9$, en tanto $S_{25} = 8.6393\ldots$, de allí que $\lfloor S_{25} \rfloor = \lfloor a_{25} \rfloor = 8$, donde $a_{25} \in \mathbb{N}$. Se deja como ejercicio al lector demostrar que $\lfloor S_n \rfloor = \lfloor a_n \rfloor$ para todo $n = 4, 9, 16, 25..., k^2 + 2k + 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se procura ahora encontrar una mejor cota para la parte entera de la sucesión S_n. Para ello se propone un intervalo de la forma $[n, n+b]$ con $0 < b \leq 1$ que minimice la diferencia entre S_n y a_n, donde $a_n \leq S_n$. De igual manera se pretende minimizar la diferencia entre S_n y b_n para los cuales $S_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se hace el análisis sobre la primera situación, para ello se hará $a'_n = \sqrt{n+b} - \sqrt{n} = \frac{b}{\sqrt{n+b}+\sqrt{n}}$ y se define la función

$$f(n,b) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{b}a'_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+b}+\sqrt{n}} \,. \tag{38}$$

Como $\sqrt{n+b} > \sqrt{n}$ entonces $\frac{2}{\sqrt{n+b}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$; de allí que

$$\frac{2}{b}\left[\sqrt{n+b} - \sqrt{n}\right] \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{b}\left[\sqrt{n} - \sqrt{n-b}\right] \,. \tag{39}$$

Expresión que puede ser escrita como $\frac{2}{b}a'_n \leq S_n \leq \frac{2}{b}b'_n$ donde $b'_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-b}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y cuyas sumas conduce a $\frac{2}{b}\sum\limits_{i=1}^{n} a'_i \leq S_n \leq \frac{2}{b}\sum\limits_{i=1}^{n} b'_i$. En el caso en que $b = 1$ se obtiene la desigualdad de Korovkin presentada en (37) y las sumas parciales se transforman en telescópicas. A medida que $b \to 0$ la función $f(n,b)$ definida en (38) se minimiza y por ende es posible encontrar una mejor aproximación para S_n y $\lfloor S_n \rfloor$. En la Tabla 7, se presentan las imágenes de $f(n,b)$ para valores particulares de b, a medida que $b \approx 0$ entonces $f(n,b)$ se minimiza.

Tabla 7: Valores de $f(n,b)$ si $b \to 0$

$n \in \mathbb{N}$	$b = 1$	$b = \frac{1}{10}$	$b = \frac{1}{100}$
1	$f(1,1) \approx 0.1715$	$f\left(1, \frac{1}{10}\right) \approx 0.02$	$f\left(1, \frac{1}{100}\right) \approx 0.00248$
2	$f(2,1) \approx 0.071$	$f\left(2, \frac{1}{10}\right) \approx 0.0086$	$f\left(2, \frac{1}{100}\right) \approx 0.00088$
3	$f(3,1) \approx 0.041$	$f\left(3, \frac{1}{10}\right) \approx 0.00047$	$f\left(3, \frac{1}{100}\right) \approx 0.00048$

A modo de ejemplo, se considera el caso en que $b = \frac{1}{2}$, la desigualdad (39) se escribe como

$$4\left[\sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n}\right] < \frac{1}{\sqrt{n}} < 4\left[\sqrt{n} - \sqrt{n-\frac{1}{2}}\right].$$

Se toman valores de n y se suman las desigualdades encontradas

$$\begin{aligned}
n &= 1 \qquad & 4\left[\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{1}\right] \leq 1 \leq 4\left[\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right],\\
n &= 2 \qquad & 4\left[\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{2}\right] \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 4\left[\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right],\\
n &= 3 \qquad & 4\left[\sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{3}\right] \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leq 4\left[\sqrt{3} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Se continúa este proceso hasta el n-ésimo término. Se suman logrando la desigualdad

$$4\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2i+1}{2}} - \sqrt{i}\right)\right] \leq S_n \leq 4\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{i} - \sqrt{\frac{2i-1}{2}}\right)\right],$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i}\right)\right] \leq S_n \leq \frac{4}{\sqrt{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2i} - \sqrt{2i-1}\right)\right]. \tag{40}$$

Nótese que cada sumatoria tiene $2n$ términos donde se está sumando la diferencia entre las raíces de un número impar y uno par consecutivos o al contrario. Al expandir la suma del lado izquierdo en (40) y reorganizar los términos se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2i+1}-\sqrt{2i}\right) &= \sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{7}-\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\,,\\
&= \left[1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\ldots-\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}\right]-1\,,\\
&= \sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i+1}\sqrt{i}-1\,.
\end{aligned}$$

La expresión 40 se escribe como

$$2\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i+1}\sqrt{i}-1\right) \leq S_n \leq 2\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i}\sqrt{i}\right)\,, \tag{41}$$

$$\left\lfloor 2\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i+1}\sqrt{i}-1\right)\right\rfloor \leq \lfloor S_n\rfloor \leq \left\lfloor 2\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i}\sqrt{i}\right)\right\rfloor\,. \tag{42}$$

En el caso en que $n = 25$ se tiene que $S_n = 8.6393\ldots$ y $\lfloor S_n\rfloor = 8$. La suma del lado izquierdo en (41) equivale a 8.3956 que es más aproximada y su parte entera es la misma que la de S_n.

4. Conclusiones

Se puede concluir que la función parte entera está presente en muchos contextos propios de las matemáticas y en situaciones cotidianas donde se suelen hacer aproximaciones al entero más próximo. A lo largo de la presentación de este escrito, se pudo evidenciar la importancia de la interpretación geométrica de algunas de las propiedades que fueron estudiadas. En esta misma línea, hacer el estudio como función de dos variables o hacer la reducción al intervalo $[0, 1]$, fue muy enriquecedor. El campo de aplicación de la función parte entera es muy diverso, desde los números complejos hasta la suma de partes enteras, desde las teselaciones hasta los puntos red. La estructura presentada busca fomentar estudios similares sobre la búsqueda de propiedades y relaciones matemáticas mediante la inferencia funcional para números reales u otros conceptos matemáticos. Para futuros trabajos se tiene la posibilidad de explorar otros campos de aplicación de la función parte entera.

Referencias

[1] Albis Gonzáles O., *Análogos en $F_q[X]$ de conjeturas famosas de la teoría de los números*, Rev. Acad. Colomb. Cienc. pag 489-504. ISSN 0370-3908. 1990.

[2] Blanco L. *Probabilidad*, Universidad Nacional, pag. 1-451, ISBN 978-958-719-576-7. 2010.

[3] Dickson L.E. *History of the Theory of Numbers*, Carnegie Institution of Washington, Volumen 1, pag. 263, num.1. 1919.

[4] Eisele P. and Hadeler K-P. *Game of cards, dynamical systems, and a characterization of the floor and ceiling functions*, The american mathematical monthly, Vol.97, pag. 466–477, num.6. 1990, Published online 2018.

[5] Eremin, G. *Legendre's formula and p-adic analysis*, arXiv preprint arXiv:1907.11902, Preprint, online 2019.

[6] Isgur A., Kuznetsov V. and Tanny S. *Nested recursions with ceiling function solutions*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol.18, Nº 6 pag. 1015-1026, 2012.

[7] Kim J., Zhang, G., Stillinger F. and Torquato S. *Inversion problems for Fourier transforms of particle distributions*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. N.11, pag. 1-21, 2018.

[8] Korovkin P.P. *Lecciones populares de matemáticas: Desigualdades*, Editorial Mir (Moscú), edición traducida al español, pag 1-76. 1976.

[9] Lennerstad, H. and Lundberg L. *Generalizations of the floor and ceiling functions using the Stern-Brocot tree*, Research report. N.02, pag. 1–25, 2006.

[10] Hiren Maharaj and Gretchen L. M. *On the floor and the ceiling of a divisor*, Journal Finite Fields and Their Applications, Vol.12, Number 1. pag. 38–55, 2006. Issn: 1071-5797.

[11] Nyblom, M.A *Some curious sequences involving floor and ceiling functions*, The American mathematical monthly, Vol.109, pag. 559–564, 2002.

[12] Nyblom, M.A *A summation formula for sequences involving floor and ceiling functions*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics, pag. 1595-1602, 2006.

[13] Shah D., Sahni M. and Sahni R. *Novel Results on Series of Floor and Ceiling Functions*, arXiv:1910.03469, pag. 1–16, 2020.

[14] Tellez Acosta G. *Métodos Matemáticos*, Universidad de los Andes, departamento de Física, ISSBN 958-695-130-8, pag. 1-185, 2004.

[15] Weinstein I.A *Family of prime-representing constants: use of the ceiling function*, arXiv:2101.00094, pag. 1-6, 2020.

Sobre los autores:

Nombre: Juan Carlos Arango Parra
Correo electrónico: jarang53@eafit.edu.co
Institución: Universidad EAFIT
Orcid: orcid.org/0000-0002-8862-7478

Nombre: Yeisson Alexis Acevedo Agudelo
Correo electrónico: yaceved2@eafit.edu.co
Institución: Universidad EAFIT
Orcid: orcid.org/0000-0002-1640-9084