

ANÁLISIS MULTI OBJETIVO Y MODELOS DE REGRESIÓN. UNA APLICACIÓN PARA ANALIZAR EL BIENESTAR DE LOS ESTUDIANTES ESPAÑOLES

SANDRA GONZÁLEZ-GALLARDO

sandragg@uma.es

*Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas), Universidad de Málaga
Calle Ejido, 6, 29013, Málaga*

Recibido (31/03/2021)

Revisado (20/10/2021)

Aceptado (20/11/2021)

RESUMEN: En este trabajo se propone un nuevo entorno metodológico en el que se combinan técnicas econométricas y de optimización multiobjetivo con el propósito de resolver problemas socioeconómicos. Dicha metodología consta de dos etapas, la primera consiste en desarrollar un modelo de regresión a partir del cual, en la segunda etapa, se construye un problema de optimización multiobjetivo. Una ventaja de esta combinación es la posibilidad de introducir preferencias en la resolución del problema. En concreto, se aplica la metodología propuesta para analizar el bienestar de los estudiantes españoles usando cuatro índices (positividad, motivación, sentido de pertenencia y acoso escolar). El análisis del bienestar está tomando cada vez mayor relevancia por su relación con el rendimiento académico de los jóvenes. Para ello, se realizan cuatro regresiones (una por índice) en función de un conjunto de variables explicativas, con las que se construye un problema multiobjetivo para estudiar el conflicto entre dichos índices. Los resultados obtenidos mediante programación multiobjetivo intercalar no solo proporcionan información sobre cómo afecta la mejora de un índice del bienestar al resto de los mismos, sino que también nos permite conocer el perfil del estudiante que alcanza unos niveles óptimos y equilibrados entre los distintos índices.

Palabras Clave: Programación multiobjetivo intercalar; Análisis econométrico; Bienestar de los estudiantes; Economía de la educación.

ABSTRACT: In this work, a novel approach is proposed in which econometric and multiobjective optimization techniques are combined with the aim of analysing socio-economic problems. This approach consists of two stages. Firstly, a regression model is carried out, from which, in the second stage, a multiobjective optimization problem is defined. An advantage of this combination is the possibility of introducing preferences of decision makers -desired values- for solving the problem. Particularly, we apply this approach to analyse the well-being of Spanish students through four indexes (positive feelings, motivation, sense of belonging, and bullying). In recent years, studying the students well-being has become very relevant because of its relation with their academic performance. Thus, four regressions are obtained (one per index) with respect to a set of explanatory variables, from which the multiobjective optimization problem is built. The results obtained using interval multi-objective programming provide us information both about how the improvement of one index can affect the values of the remaining ones, and also about the student's profile who achieves an optimum balance among the well-being indexes.

Keywords: Multiobjective interval programming; Econometric analysis; Students well-being; Economics of education

1. Introduccin

La existencia de numerosas tcnicas matemticas permite la resolucin de problemas de distinta naturaleza desde diferentes enfoques. Particularmente, la econometra tiene la finalidad de proveer de contenido emprico a los modelos matemticos o econmicos, con el fin de predecir cmo le afecta a una variable los cambios de otras. En la prctica, se basa en estimaciones para cuantificar y verificar las predicciones de teoras matemticas y econmicas mediante un anlisis de regresin, que estudia la relacin existente entre las variables de respuesta y las variables explicativas. Con este anlisis podemos encontrar si existe cierto grado de conflicto entre las variables respuesta, es decir, que la mejora de una implique el empeoramiento de la otra. Sin embargo, este tipo de anlisis no puede aportar mucho ms que la naturaleza conflictiva de las variables, de forma que no puede aportar informacin de cmo alcanzar simultneamente valores ptimos para todas las variables de respuesta. Por lo tanto, la aplicacin de tcnicas de optimizacin multiobjetivo tras realizar un anlisis economtrico puede permitirnos obtener informacin ms all de la que nos aporta el anlisis estadstico.

La optimizacin multiobjetivo resuelve problemas con varios objetivos en conflicto dentro de un conjunto de posibilidades (conjunto factible). En estos problemas, debido al conflicto entre las funciones objetivo, es imposible obtener una solucin que alcance el ptimo de cada objetivo de forma simultnea. As, en las soluciones obtenidas a travs de la optimizacin ningn objetivo puede mejorar sin empeorar, al menos, uno de los restantes.

En este artculo proponemos un nuevo entorno de trabajo en el que se combinan metodologas economtricas y multiobjetivo para ayudar a los investigadores (o decisores si hablamos de un problema real) a tener una visin ms exhaustiva del problema sujeto a anlisis. El entorno propuesto est formado por dos etapas. La primera de ellas consiste en un anlisis economtrico con el objetivo de obtener estimaciones de la relacin existente entre las variables explicativas y las variables de decisin consideradas. La relacin de dependencia entre las variables puede obtenerse siguiendo varios modelos, como son lineal, polinmico, exponencial, etc. La segunda parte del entorno metodolgico pretende definir un problema de optimizacin multiobjetivo a partir del anlisis economtrico previo y las correlaciones entre las variables explicativas. De forma ms especfica, el anlisis de la primera etapa se usa para definir las funciones objetivo y delimitar el conjunto de posibles valores de las variables explicativas mediante restricciones. Seguidamente, se estudia el problema mediante tcnicas de optimizacin multiobjetivo desde un punto de vista de la decisin multicriterio.

Por lo tanto, con este enfoque permitimos definir un marco terico en el que los decisores tienen informacin sobre los valores que tienen que tomar las variables explicativas para que las variables respuesta alcancen el valor ptimo simultneamente. Los resultados de nuestra propuesta pueden sugerir estrategias para alcanzar ciertos valores en las variables explicativas mejorando a las variables respuesta tanto como sea posible.

El anlisis de optimizacin multiobjetivo del modelo economtrico propuesto puede ser de inters en diferentes situaciones. Por ejemplo, cuando los investigadores quieren saber qu combinacin de valores de las variables explicativas hara que las variables de decisin alcancen los mejores valores posibles simultneamente. Adems, el entorno propuesto nos puede arrojar informacin sobre cmo de sensible son los valores ptimos a posibles variaciones de las variables explicativas. Por otro lado, tambin podemos medir el impacto que tiene dar ms importancia a alguna de las variables respuesta (objetivos del problema), teniendo la informacin de cunto empeora el resto de las variables respuesta en dicha situacin.

En este sentido, nosotros proponemos un enfoque metodolgico aplicado a economa de la educacin en el que se combinan tcnicas economtricas y de optimizacin multiobjetivo, particularmente, de programacin multiobjetivo intervalar para as conocer cmo llegar a ciertos niveles outputs relacionados con el bienestar de los estudiante mediante variables explicativas del da a da relacionadas con el colegio como son, el uso de internet y dispositivos digitales, horas dedicadas a estudiar otro

idioma, además de otras variables sociodemográficas.

En los últimos años, el bienestar de los estudiantes está captando más atención por su relación con el rendimiento académico de los jóvenes (Korhonen *et al.*, 2014; Jogi *et al.*, 2015; Parhiala *et al.*, 2018). Hay muchos autores que afirman que la educación contribuye al crecimiento económico, y consecuentemente existe una fuerte relación entre la educación y el desarrollo de un país, ya que si el bienestar no es adecuado en la adolescencia, puede afectar a la productividad posterior como trabajadores (Warr, 1999). Además, existen evidencias afirmando que el rendimiento académico está influenciado por factores emocionales relacionados con el ámbito educativo tales como la motivación, el apoyo del profesorado, el acoso escolar entre otros (Scheerens y Hendriks, 2014; Baker *et al.*, 2004). Diferentes estudios muestran que aquellos programas educativos enfocados a mejorar el bienestar de los estudiantes mejoran los resultados académicos de los estudiantes. De esta forma, las políticas educativas deben centrarse en el estado de bienestar de los estudiantes con el objetivo de alcanzar mejor eficiencia y calidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, los sistemas educativos de las regiones con mayor rendimiento académico, como son los países del norte de Europa (Finlandia y Suecia) (OECD, 2019), hacen mucho hincapié en el desarrollo general de los estudiantes y en el aprendizaje socio-emocional de estos. Lo que sugiere que para obtener buen rendimiento académico no solo hay que tener en cuenta la materia impartida sino también otros aspectos de la vida de los estudiantes.

En este contexto, los últimos informes de PISA¹ reportan datos sobre el bienestar de los estudiantes y lo definen como un concepto multidimensional (OECD, 2017, 2019), en el que involucran cuatro dimensiones: psicológica, social, cognitiva y física. En este sentido, consideraremos los siguientes indicadores para medir el bienestar: índice de positividad, de motivación, de sentido de pertenencia al centro y de acoso escolar. Existen trabajos que respaldan el análisis del bienestar mediante estos indicadores. En cuanto al sentido de pertenencia, existen evidencias que encuentran relación entre la necesidad de sentirse integrado en el colegio con el comportamiento, la salud y el bienestar de los estudiantes (Ryan y Deci, 2018; Chinneck y Ramadan, 2000). Por otro lado, diferentes estudios observan el impacto de la motivación y el bienestar en el rendimiento académico de los estudiantes Parhiala *et al.* (2018); Jogi *et al.* (2015). Por último, la lacra del acoso escolar entre adolescente es un problema que concierne a nivel mundial y tiene graves consecuencias en la vida de los jóvenes, y también en su rendimiento escolar Strm *et al.* (2013).

Teniendo en cuenta la naturaleza multidisciplinar del concepto de bienestar estudiantil, es adecuado utilizar técnicas de optimización multiobjetivo. El escenario ideal será alcanzar los mejores valores para cada indicador, teniendo en cuenta que los índices de sentimientos positivos, motivación y sentido de pertenencia deben alcanzar los valores más altos posibles mientras que el índice de acoso escolar debe de alcanzar el menor valor posible. Sin embargo, debido al grado de conflicto existente entre los índices, es imposible alcanzar el mejor valor para cada índice en una misma solución. Por lo tanto el resultado será el balance óptimo entre los cuatro indicadores, además del perfil de estudiante que alcanza dicho balance.

Por otro lado, es necesario identificar variables significativas en el proceso enseñanza-aprendizaje que permitan alcanzar los valores deseados para cada indicador. Las variables usadas también las proporciona PISA y están relacionadas con las características socio-demográficas de los alumnos, el uso de los dispositivos digitales e internet, el apoyo por parte del profesorado, entre otras.

Tras esta introducción, el resto del documento se estructura en 6 secciones. La primera sección recoge la notación y conceptos básicos de la econometría y la optimización multiobjetivo (Sección 2). La segunda sección, Sección 3, detalla la metodología propuesta en este artículo para analizar problemas

¹ *The Programme for International Student Assessment (PISA)*, es un estudio en el que se mide el rendimiento de los estudiantes de 15 años en los países de la OCDE.

socioeconmicos. A continuacin, en la Seccin 4 se desarrolla la forma de resolver un problema multiobjetivo intercalar. En la siguiente parte del articulo, Seccin 5, se muestran los resultados obtenido. Por ltimo, se presentan las conclusiones ms relevantes.

2. Notacin y conceptos bsicos

En esta seccin daremos los conceptos bsicos de las dos tcnicas que forman el entorno metodolgico propuesto.

2.1. *Econometra*

Supongamos que queremos estudiar una situacin socioeconmica y queremos encontrar la relacin de dependencia de un conjunto de variables que la representan (variables respuesta), denotadas por y_j para $j = 1, \dots, k$, con respecto a un conjunto de variables que la explican (variables explicativas), denotadas por x_i con $i = 1, \dots, n$. En este sentido queremos establecer una correspondencia entre los dos conjuntos de variables de la siguiente forma:

$$(x_1(r), \dots, x_n(r)) \rightarrow (y_1(r), \dots, y_k(r)), \text{ para } r = 1, \dots, l, \quad (1)$$

siendo l el nmero de observaciones. Para encontrar las dependencias entre los conjuntos de variables, se realiza un anlisis economtrico mediante la estimacin de un modelo regresin en el que se regresan las variables respuesta con las variables explicativas. Vamos a denotar un modelo de regresin de la siguiente forma:

$$y_j = \hat{y}_j(x_1, \dots, x_n) + \epsilon_j, \text{ para } j = 1, \dots, k, \quad (2)$$

donde \hat{y}_j es la prediccin de la variable respuesta y_j . Esta se predice mediante una funcin de las variables explicativas x_1, \dots, x_n ms el error de prediccin denotado por ϵ_j . Para simplificar la notacin, vamos a suprimir el parmetro r que denota el nmero de observacin. De esta forma, las variables explicativas y respuesta quedan denotadas como x_1, \dots, x_n y y_1, \dots, y_k . Las funciones \hat{y}_j , para $j = 1, \dots, k$, se denominan predictores de las variables respuesta, y pueden ser funciones de diferentes tipos: lineales, polinmicas, exponenciales, entre otras; dependiendo de la naturaleza de los datos y el modelo considerado. Para el caso lineal, la formulacin es la siguiente:

$$\hat{y}_j = \hat{\alpha}^j + \hat{\beta}_1^j x_1 + \dots + \hat{\beta}_n^j x_n + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (3)$$

donde $\hat{\beta}^j = (\hat{\beta}_1^j, \dots, \hat{\beta}_n^j)^T$ es el vector de coeficientes de regresin y $\hat{\alpha}^j$ es la constante de estimacin. Los coeficientes de regresin pueden estimarse mediante diferentes metodologas. En nuestro caso, los estimaremos mediante mnimos cuadrados ordinarios (Ordinary Least Squares - OLS).

2.2. *Optimizacin multiobjetivo*

Un problema de optimizacin multiobjetivo (MOP) se puede definir de la siguiente forma (Miettinen, 1999) ²:

$$\begin{aligned} \max \quad & \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{x} \in X, \end{aligned} \quad (4)$$

donde $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $j = 1, \dots, k$, son las k funciones objetivo en conflicto que queremos optimizar simultneamente y $X \in \mathbb{R}^n$ es la regin o conjunto factible formado por los vectores de

²Sin prdida de generalidad, definimos el problema multiobjetivo en sentido de mximo, pero si una o ms funciones objetivo quieren ser minimizadas, se multiplican por -1.

decisiones factibles denotados por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. La imagen de cada vector de decisión factible se denomina vector objetivo y se denotan por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f(x_1), \dots, f(x_n))^T$. Además, todos los vectores objetivo forman la región objetivo factible $F = \mathbf{f}(X) \subseteq \mathbb{R}^m$. A partir de ahora, suponemos que X es un conjunto no vacío y compacto de \mathbb{R}^k .

Desafortunadamente, debido al conflicto existente entre los objetivos es casi imposible encontrar una solución que optimice todos los objetivos al mismo tiempo. En este sentido, se definen las soluciones eficientes o Pareto óptimas. Se dice que un vector $\mathbf{x}^0 \in X$ es eficiente o Pareto óptimo del problema (4) si no existe otro vector $\mathbf{x} \in X$ de forma que $f_j(\mathbf{x}^0) \leq f_j(\mathbf{x})$ para cada $j = 1, \dots, k$ y $f_i(\mathbf{x}^0) < f_i(\mathbf{x})$ para al menos un índice i . Su correspondiente vector objetivo $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ se denomina vector objetivo Pareto óptimo. El conjunto formado por todas las soluciones eficientes o Pareto óptimas del espacio de decisión se denomina Pareto óptimo (E), mientras que su imagen en el espacio objetivo, se llama frontera Pareto óptima (PF) y la denotamos por $f(E)$.

Por la definición de solución Pareto óptima, un problema multiobjetivo, normalmente, tiene más de una solución de este tipo. Por lo tanto, es útil saber cuál es el rango de variación de las funciones objetivo en la frontera Pareto óptima. En primer lugar, las cotas inferiores constituyen el vector nadir $\mathbf{z}^{nad} = (z_1^{nad}, \dots, z_k^{nad})^T$, donde para cada $j = 1, \dots, k$, se define como $z_j^{nad} = \min_{\mathbf{x} \in E} f_j(\mathbf{x})$. Por otro lado, el vector ideal $\mathbf{z}^* = (z_1^*, \dots, z_k^*)$ define las cotas superiores, y se calcula $z_j^* = \max_{\mathbf{x} \in E} f_j(\mathbf{x})$, para cada $j = 1, \dots, k$. A veces, para facilitar la resolución de los problemas multiobjetivo es útil utilizar un vector que domine estrictamente a todas las soluciones Pareto óptimas. Para ello definimos el vector utopa, que se denota por $z_i^{**} = z_i^* + \epsilon$, donde $\epsilon > 0$ es un valor real pequeño, para cada $j = 1, \dots, k$.

Mientras que el vector ideal se puede calcular en cualquier caso, el vector nadir no es fácil de obtener y este puede ser estimado, por ejemplo, usando la matriz de pagos del problema, aunque esta aproximación no tiene por qué ser buena (para más detalles, ver Ehrgott y Tenfelde-Podehl (2003); Miettinen (1999)). En Deb y Miettinen (2010) proponen diferentes enfoques para estimar el vector nadir. En la práctica, estos vectores se utilizan con frecuencia para normalizar las funciones objetivo, dividiendo cada valor de la función objetivo por la diferencia entre los valores ideal y nadir.

3. Metodología

Analizando un modelo de regresión, podemos identificar la relación de dependencia entre las diferentes variables explicativas y respuesta. Además, a partir de estas dependencias, podemos extraer conclusiones sobre el problema a estudiar. Sin embargo, a veces es interesante estudiar cómo se pueden alcanzar los mejores valores para las variables respuesta, de forma simultánea, considerando todos los valores que las variables explicativas pueden tomar. Esta información permite apoyar las malas o buenas decisiones tomadas en relación con el problema estudiado mediante la identificación de los factores claves referentes a las variables explicativas que permitieran alcanzar simultáneamente dichos valores óptimos de las variables respuesta.

Teniendo en cuenta esta idea, si los datos analizados muestran cierto grado de conflicto entre las variables respuesta, podemos definir un problema de optimización multiobjetivo basándonos en ciertas estimaciones económicas previas. Una vez construido el problema multiobjetivo, que explicaremos de aquí en adelante, se podrán extraer interesantes conclusiones del problema estudiado. En este sentido, los decisores-investigadores, directivos, políticos, o la persona encargada del estudio- pueden expresar sus preferencias sobre el problema determinando, así como información sobre qué solución Pareto óptima se ajusta más a las expectativas definidas a través de las preferencias. En general, la principal novedad de esta combinación de técnicas es que la información que arrojan los resultados no se puede obtener solo haciendo el análisis económico de los datos.

En lo que sigue, vamos a describir en detalle cómo podemos hacer la combinación de dichas técnicas con datos reales referentes a economía de la educación.

3.1. *Anlisis Econometrico*

En esta seccin, se describen la base de datos que usamos, las caractersticas de la misma, las variables de decisin y explicativas, as como las estimaciones realizadas para obtener las funciones objetivo y las restricciones del problema multiobjetivo que vamos a construir.

3.1.1. *Datos*

Los datos utilizados en este artculo son de la base de datos de PISA 2018 (OECD, 2019), estos datos ofrecen una amplia informacin personal y acadmica de los estudiantes. PISA 2018 (OECD, 2019) evala los conocimientos en ciencias, matemticas y lectura en 80 pases y est dirigido aproximadamente a 612,000 estudiantes de 15 aos.

La evaluacin acadmica se realiza mediante diferentes test, compuestos por preguntas de mltiple respuesta y preguntas en las que los estudiantes tienen que construir la respuesta, incluyendo cuestiones de las tres competencias anteriormente citadas (ciencias, matemticas y lectura). PISA también incluye medidas de competencias transversales como la resolucin de problemas colaborativos. Especialmente, PISA est diseado para enfatizar las habilidades funcionales que los estudiantes han adquirido a medida que se acercan al final de la enseanza secundaria obligatoria. Concretamente, los estudiantes de 15 aos rellenan un cuestionario general que nos da informacin sobre ellos, sus casas y su experiencia en el proceso de aprendizaje. En algunos pases como es el caso de Espaa, los alumnos responden dos cuestionarios adicionales. El primero de ellos relacionado con las Tecnologas de la Informacin y Comunicacin (TICs), y el segundo relacionado con el bienestar de los estudiantes en algunos aspectos escolares y de la vida. Basndose en este cuestionario, PISA reporta informacin del bienestar a travs de los siguientes ndices: ndice de positividad, ndice de motivacin, ndice de sentido de pertenencia e ndice de acoso escolar. As, estos ndices se construyen mediante anlisis factorial haciendo uso de las siguientes preguntas del cuestionario:

- ndice de positividad: Con qu frecuencia (“nunca”, “rara vez”, “a veces”, “siempre”) te sientes feliz, alegre o animado?
- ndice de motivacin: En qu medida est usted de acuerdo o en desacuerdo (“muy en desacuerdo”, “en desacuerdo”, “de acuerdo”, “muy de acuerdo”) con las siguientes afirmaciones?: “Me satisface trabajar lo mximo posible”; “Una vez que empiezo una tarea, persisto hasta que la termino”; “Si no soy bueno en algo, prefiero seguir trabajando hasta dominarlo en lugar de hacer otra cosa en lo que soy bueno”.
- ndice de sentido de pertenencia: En qu medida est usted de acuerdo o en desacuerdo (“muy en desacuerdo”, “en desacuerdo”, “de acuerdo”, “muy de acuerdo”) con las siguientes afirmaciones?: “Me siento como un extrao (o excluido de las cosas) en el colegio; Hago amigos fcilmente en el colegio”; “Siento que pertenezco al colegio”; “Me siento incmodo y fuera de lugar en mi colegio”; “Parece que les caigo bien a otros compaeros”; “Me siento solo en el colegio”.
- ndice de acoso escolar: Con qu frecuencia (“nunca o casi nunca”, “algunas veces al ao”, “algunas veces al mes”, “una vez a la semana o ms”) has tenido las siguientes experiencias en la escuela?: “Otros estudiantes me dejaron fuera de las cosas a propsito”; “Otros estudiantes se burlaron de m”; “Fui amenazado por otros estudiantes”; “Otros estudiantes me quitaron o destruyeron mis cosas”; “Fui golpeado o empujado por otros estudiantes”.

El sentido de los ndices de positividad, motivacin y sentido de pertenencia es el siguiente: un valor ms alto significa que el alumno reporta mayor positividad, motivacin y sentido de pertenencia. Sin embargo, un valor alto en el ndice de acoso escolar indica que el estudiante estuvo ms expuesto a acoso, mientras que un valor bajo significa que el estudiante ha sufrido menos acoso escolar.

Específicamente, 35.943 estudiantes de 1089 colegios españoles cumplieron dicha evaluación. De este análisis excluimos a los estudiantes matriculados en colegios privados, de esta forma, solo consideramos alumnos de colegios públicos y concertados. Además, consideramos solo a estudiante no repetidores. La muestra también se ve reducida debido a los datos *missing* de las variables consideradas. Por lo tanto, las regresiones finales utilizan 12,169 observaciones en total.

La Tabla 1 y 2 reportan la descripción de las variables explicativas usadas en el modelo y los correspondientes estadísticos descriptivos de todas las variables, respectivamente. Después de analizar estos datos, podemos afirmar que en la muestra seleccionada el 29.5% de los colegios son concertados mientras que el 70.5% son públicos. En cuanto a género, existe aproximadamente el mismo número de chicos que de chicas. En media, los estudiantes españoles empiezan a utilizar dispositivos digitales cuando tienen 7 años. Las variables apoyo del profesorado y ambiente escolar son variables obtenidas mediante análisis factorial de una serie de preguntas del cuestionario de PISA. En este punto, es importante notar, que cuanto menor sea el valor de la variable apoyo del profesorado significa que se ha recibido más apoyo. Sin embargo, cuanto menor sea el valor de la variable ambiente escolar, peor es el ambiente escolar percibido por los estudiantes. Por último, los estudiantes españoles emplean 4.25 horas de media en aprender otro idioma.

Tabla 1. Descripción de las variables explicativas

Nombre	Notación	Variable	Tipo
escs	x_1	Nivel socioeconómico	Continua
concertado	x_2	Tipo de colegio (Concertado 1 - público 0)	Binaria
género	x_3	Chico (0) o chica (1)	Binaria
horasInternet	x_4	Horas de internet fuera del colegio	Continua
dispositivosDigitales	x_5	Edad de inicio de uso de dispositivos digitales	Continua
apoyoProfesorado	x_6	Apoyo del profesorado	Continua
ambienteEscolar	x_7	Ambiente escolar	Continua
idiomas	x_8	Horas dedicadas a aprender otro idioma	Continua

Tabla 2. Estadísticos descriptivos de las variables

Nombre	Notación	Media	Desviación típica	Mínimo	Máximo
índice de positividad	y_1	0.0370	0.8795	-4.0655	0.9016
índice de motivación	y_2	0.0633	0.7944	-3.3026	1.2486
índice de sentido de pertenencia	y_3	-0.0150	0.8740	-2.8899	1.2096
índice de acoso escolar	y_4	-0.0801	0.7831	-0.4818	5.4689
Nivel socioeconómico	x_1	0.0338	0.9466	-4.316	3.717
Tipo de colegio	x_2	0.2955	0.4563	0.0000	1.0000
Género	x_3	0.5445	0.4980	0.0000	1.0000
Horas de Internet fuera del colegio	x_4	3.6811	2.0533	0.0000	7.0000
Edad de uso de dispositivos digitales	x_5	7.5441	2.7196	4.5000	14.5000
Apoyo del profesorado	x_6	0.0194	0.9231	-0.9720	2.4555
Ambiente escolar	x_7	0.0349	0.9653	-2.1020	1.4652
Horas dedicadas a aprender otro idioma	x_8	4.2554	1.3111	3.0000	7.0000

3.1.2. Estimaciones econométricas

En esta sección vamos a describir el modelo de regresión que hemos utilizado para posteriormente construir el problema multiobjetivo. Se consideran como variables explicadas o respuesta los cuatro índices descritos previamente (sentimientos positivos, motivación, sentido de pertenencia y acoso escolar). Cada uno de estos índices se estima mediante un conjunto de ocho variables explicativas, descritas en la Tabla 1, utilizando mínimos cuadrados ordinarios. La idea que sustenta esta técnica es minimizar el ruido estadístico, denotado por ϵ , lo máximo posible. Además, esta metodología asume que dicho error está normalmente distribuido.

Suponiendo que los estudiantes estn denotados por r , y cada uno de los ndices se denota por j , el modelo de regresin se puede representar como sigue:

$$W^j(r) = \alpha^j + \beta_1^j escs(r) + \beta_2^j concertado(r) + \dots + \beta_8^j idiomas(r) + \epsilon^j(r) \quad (5)$$

donde $j = 1, \dots, 4$ (uno para cada ndice), $r = 1, \dots, 12,169$ (estudiantes en la muestra), $W^j(r)$ es la prediccin de cada ndice del bienestar j para cada estudiante r ; $escs(r)$, $colegio(r)$, \dots , $idiomas(r)$ son el conjunto de variables explicativas, $\epsilon^j(s)$ es el trmino de error, β^j es el vector de coeficientes y α^j la constante de la estimacin.

En la Tabla 3 se muestran las cotas superiores e inferiores de los intervalos de confianza de los coeficientes de cada estimacin. Cabe notar que se muestran los coeficientes de las variables explicativas que son significativas al 10 %, 5 % y 1 %, aquellas variables que no son significativas tienen como coeficiente 0 . Las cotas superiores e inferiores de los coeficientes corresponden con los intervalos de confianza al 95 % obtenidos de las estimaciones.

Tabla 3. Cotas inferiores y superiores de los coeficientes de estimacin

Variables		Positividad		Motivacin		Sentido de pertenencia		Acoso escolar	
		Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior
Nivel socioeconmico	x_1	0,0006	0,0554	0,0087	0,0603	0,0159	0,0661	0	0
Tipo de colegio	x_2	0	0	0	0	0,0395	0,1508	0	0
Gnero	x_3	-0,0980	-0,0138	0,1274	0,2164	-0,1006	-0,0202	-0,1707	-0,0781
Horas de Internet fuera del colegio	x_4	0	0	-0,0413	-0,0209	0,0117	0,0341	-0,0009	0,0250
Edad de uso de dispositivos digitales	x_5	0,0013	0,0160	0,0083	0,0218	0	0	0	0
Apoyo del profesorado	x_6	-0,1131	-0,0614	-0,1622	-0,1111	-0,1408	-0,0803	0,0370	0,0843
Ambiente escolar	x_7	0,0284	0,0835	0,0084	0,0500	0,0367	0,0876	-0,1278	-0,0767
Horas dedicadas a aprender otro idioma	x_8	0	0	0,0087	0,0429	0	0	0	0
Constante	α	-0,0903	0,1106	-0,2298	-0,0383	-0,2944	-0,0391	-0,1050	0,1258
Observaciones	N	12169	12169	12169	12169	12169	12169	12169	12169
R-cuadrado	R^2	0,0181	0,0181	0,0555	0,0555	0,0319	0,0319	0,0329	0,0329

Empezando con el ndice de positividad, la variable explicativa ndice socioeconmico tiene un efecto positivo sobre este ndice, lo que significa que los estudiantes con mayor nivel socioeconmico reportarn un mayor ndice de positividad. En cuanto a gnero, las estimaciones sugieren que los chicos muestran mayor positividad que las chicas. Las variables apoyo del profesorado y ambiente escolar tambin tienen un efecto positivo en el ndice de positividad. Analizando la edad con la que empiezan a utilizar dispositivos digitales, se intuye que cuanto ms mayores empiecen ms alto ser el ndice de positividad de los estudiantes.

Siguiendo con el ndice de motivacin, parece claro que los estudiantes aventajados socioeconmicamente muestran mayor motivacin. De acuerdo con Yu *et al.* (2020), el anlisis econmtrico sugiere que las nias reportan mayor motivacin que los nios. El uso de internet fuera del colegio afecta de forma negativa en la motivacin estudiantil, tal y como se muestra en Demir y Kutlu (2018). Adems, el anlisis parece mostrar que cuanto mejor sea el ambiente escolar mayor ser la motivacin de los estudiantes, esto va en concordancia con los resultados de Fan y Williams (2018). Por ltimo, y como muestra Yldrm (2012), aquellos estudiantes que tienen ms apoyo por parte del profesorado son propensos a tener ms motivacin.

En cuanto al ndice de sentido de pertenencia, como en otros estudios (OECD, 2019) los chicos tienen mayor sentido de pertenencia al colegio que las chicas, y tambin aquellos que tienen mayor nivel socioeconmico. Por otro lado, es posible percibir que el apoyo del profesorado y el ambiente

escolar afectan positivamente al sentido de pertenencia de los estudiantes al colegio (Allen *et al.*, 2018; OECD, 2017).

En lo que respecta al índice de acoso escolar, de acuerdo con Veenstra *et al.* (2005), las chicas están menos implicadas en casos de acoso que los chicos. Además, los resultados sugieren que aquellos estudiantes que usan más horas Internet fuera del colegio, reportan mayor índice de acoso. Estos resultados están en concordancia con Athanasiou *et al.* (2018), donde demuestran que cuanto más tiempo usando internet y redes sociales mayor es el riesgo de sufrir acoso escolar. Por otro lado, y coincidiendo con Mischel y Kitsantas (2020), los resultados afirman que los estudiantes que tienen mayor apoyo de los profesores tienen menos riesgo de ser acosados. Además, el ambiente escolar afecta negativamente al índice de acoso, lo que significa que un buen ambiente escolar reduce el índice de acoso en los colegios (Mischel y Kitsantas, 2020).

Por lo tanto, los resultados indican que el modelo estimado tiene coherencia ya que se apoyan otros trabajos previamente publicados (Yu *et al.*, 2020; Yldrm, 2012; Mischel y Kitsantas, 2020; Demir y Kutlu, 2018). Por ello, el problema multiobjetivo que se propone en la Sección 3.2 recoge la realidad presente en los colegios.

3.2. Problema de optimización multiobjetivo intervalar

En esta sección, basándonos en el análisis econométrico del apartado anterior (primera etapa), vamos a construir un problema de optimización multiobjetivo. Para ello, definimos las variables de decisión, las restricciones y las funciones objetivo.

3.2.1. Variables de decisión

Las variables explicativas, x_1, \dots, x_k , consideradas como variables clave en el modelo econométrico, constituyen las variables de decisión del problema de optimización multiobjetivo. Dependiendo del problema socioeconómico estudiado, las variables explicativas pueden ser continuas, enteras o binarias, por lo tanto, las variables de decisión serán de la misma naturaleza.

En nuestro caso, no tendremos variables binarias categóricas, pero sí variables binarias y continuas. Las variables binarias son las variables referidas al tipo de centro (público o concertado) y al género (chico o chica). El resto son variables continuas: nivel socioeconómico, horas de uso de internet fuera del colegio, edad con la que empieza a utilizar dispositivos digitales, apoyo del profesorado, ambiente escolar y horas dedicadas a aprender otro idioma.

3.2.2. Restricciones

En lo que sigue, vamos a definir el conjunto factible del problema de optimización multiobjetivo a través de restricciones, teniendo en cuenta el significado de las variables de decisión (explicativas) y la dependencia existente entre ellas.

En el caso que haya variables binarias categóricas, se definen una serie de restricciones técnicas para controlar los diferentes valores que estas pueden tomar. En primer lugar, debemos asegurar que en el problema de optimización formulado, las variables binarias categóricas referidas al mismo aspecto no tomen el valor 1 simultáneamente. Así, en el problema de optimización multiobjetivo se incluye una restricción de este tipo $\sum_{i \in H} x_i = 1$, donde $H \subset \{1, \dots, k\}$ es el conjunto de subíndices de las variables que no pueden tomar el valor 1 a la vez. En segundo lugar, cuando no podemos considerar la variable de referencia como variable de decisión, la restricción anterior pasa a ser una restricción de desigualdad, es decir, $\sum_{i \in H} x_i \leq 1$. En nuestro caso, al no tener variables binarias categóricas, el problema multiobjetivo no tendrá restricciones de este tipo.

Por otro lado, para definir de forma realista el conjunto factible, se considera un conjunto de restricciones basadas en las dependencias existentes entre las variables de decisión. Es posible que

existan variables explicativas que muestren fuertes dependencias, por lo tanto, deben controlarse mediante restricciones. Estas se pueden construir a partir de un análisis de regresión mediante intervalos de confianza. Normalmente, se consideran los intervalos de confianza al 95 %.

En el problema de optimización multiobjetivo que estamos estudiando se considerarn restricciones de este tipo. En este caso, se estudia la dependencia del nivel socioeconómico (x_1) y el género (x_3) con las variables: horas de uso de internet fuera del colegio (x_4), edad con la que empiezan a usar dispositivos digitales (x_5) y horas dedicadas a aprender otro idioma (x_8). Por ejemplo, consideremos la dependencia entre x_1 y x_3 con x_4 . En este caso, x_4 se puede aproximar con x_1 y x_3 mediante una regresión por mínimos cuadrados ordinarios como sigue:

$$x_4 = \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_3 + \hat{b} \quad (6)$$

donde $\hat{a}_1 \in [\hat{a}_1^l, \hat{a}_1^u]$, $\hat{a}_2 \in [\hat{a}_2^l, \hat{a}_2^u]$ y $\hat{b} \in [\hat{b}^l, \hat{b}^u]$ son los intervalos de confianza obtenidos de la regresión. De esta forma, siguiendo (6), la variable x_4 puede tomar valores entre las siguientes cotas:

$$\hat{a}_1^l x_1 + \hat{a}_2^l x_3 + \hat{b}^l \leq x_4 \leq \hat{a}_1^u x_1 + \hat{a}_2^u x_3 + \hat{b}^u$$

Transformando esta desigualdad obtenemos dos restricciones para el problema de optimización multiobjetivo que estamos construyendo.

$$\begin{aligned} x_4 - (\hat{a}_1^l x_1 + \hat{a}_2^l x_3 + \hat{b}^l) &\geq 0 \\ x_4 - (\hat{a}_1^u x_1 + \hat{a}_2^u x_3 + \hat{b}^u) &\leq 0 \end{aligned}$$

En la Tabla 4 se muestran los valores de los intervalos de confianza de las restricciones consideradas para el problema.

Tabla 4. Valores de los coeficientes para las restricciones del problema

Restricciones		
Horas de Internet fuera del colegio (x_4)	$a_{x_i}^l$	$b_{x_i}^u$
Nivel socioeconómico (x_1)	-0.3070	-0.1906
Género (x_3)	0.1443	0.3677
Constante (α)	3.4583	3.6419
Edad de uso de dispositivos digitales (x_5)	$a_{x_i}^l$	$b_{x_i}^u$
Nivel socioeconómico (x_1)	-0.38520	-0.24790
Género (x_3)	0.39436	0.65323
Constante (α)	7.17126	7.36786
Horas dedicadas a aprender otro idioma (x_8)	$a_{x_i}^l$	$b_{x_i}^u$
Nivel socioeconómico (x_1)	0.06013	0.17244
Género (x_3)	0.03272	0.17420
Constante (α)	4.11997	4.27029

Además, el mínimo y el máximo de cada una de las variables de decisión alcanza en la base de datos se usan para definir restricciones en forma de cotas. El mínimo se asocia como cota inferior de la variable y el máximo como cota superior de la variable. De esta forma, para cada $i = 1, \dots, 8$, tendremos dos restricciones adicionales, $x_i \geq l_i$ y $x_i \leq u_i$. En la Tabla 5 se presentan dichos valores, que formarn el resto de restricciones del problema.

Tabla 5. Cota inferior y superior de las variables de decisión

Variables		Cotas $[l_i, u_i]$
Nivel socioeconómico	x_1	$[-4,316, 3,717]$
Tipo de colegio	x_2	0 or 1
Género	x_3	0 or 1
Horas de Internet fuera del colegio	x_4	$[0,7]$
Edad de uso de dispositivos digitales	x_5	$[4,5,14,5]$
Apoyo del profesorado	x_6	$[-0,972,2,455]$
Ambiente escolar	x_7	$[-2,102,1,465]$
Horas dedicadas a aprender otro idioma	x_8	$[3,7]$

De esta forma, las restricciones que delimitan el conjunto factible del problema son las siguientes:

$$\begin{aligned}
-0,3070 \cdot x_1 + 0,1443 \cdot x_3 - x_4 &\leq -3,4583 & (C1) \\
0,1906 \cdot x_1 - 0,3677 \cdot x_3 + x_4 &\leq 3,6419 & (C2) \\
-0,3852 \cdot x_1 + 0,3944 \cdot x_3 - x_5 &\leq -7,1713 & (C3) \\
0,2479 \cdot x_1 - 0,6532 \cdot x_3 + x_5 &\leq 7,3679 & (C4) \\
0,0601 \cdot x_1 + 0,0327 \cdot x_3 - x_8 &\leq -4,1200 & (C5) \\
-0,1724 \cdot x_1 - 0,1742 \cdot x_3 + x_8 &\leq 4,2703 & (C6) \\
l_i \leq x_i \leq u_i &\text{ for all } i = 1, \dots, 8 & (C7-C14)
\end{aligned} \tag{7}$$

3.2.3. Funciones objetivo

La idea principal de un problema de programación multiobjetivo es optimizar simultáneamente varias funciones objetivo (dos o más). Como el análisis econométrico nos ha permitido expresar los índices relacionados con el bienestar (variables respuesta) en función de un conjunto de variables significativas y se percibe cierto conflicto en las regresiones, ya que existen diferencias en los signos de los coeficientes, es adecuado definir un problema multiobjetivo. Las funciones objetivo serán denotadas por $f_j(x_1, \dots, x_8)$ con $j = 1, \dots, 4$, y los coeficientes se definen a partir de los intervalos de confianza obtenidos por las estimaciones y mostrados en la Tabla 3. Por lo tanto, las funciones objetivo se expresan como sigue:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, \dots, x_8) &= [0,0006, 0,0554] \cdot x_1 + [-0,0980, -0,0138] \cdot x_3 + \dots + [-0,0903, 0,1106] \\
f_2(x_1, \dots, x_8) &= [0,0087, 0,0603] \cdot x_1 + [0,1274, 0,2164] \cdot x_3 + \dots + [-0,2298, -0,0383] \\
f_3(x_1, \dots, x_8) &= [0,0159, 0,0661] \cdot x_1 + [0,0395, 0,1508] \cdot x_2 + \dots + [-0,29443, -0,0391] \\
f_4(x_1, \dots, x_8) &= [-0,1707, -0,0781] \cdot x_3 + [-0,1707, -0,0781] \cdot x_4 + \dots + [-0,1050, 0,1258]
\end{aligned} \tag{8}$$

Así, el problema multiobjetivo que hemos diseñado está formado por cuatro funciones objetivo, tres de ellas a maximizar (índice de positividad, motivación y sentido de pertenencia) y la última a minimizar (índice de acoso escolar). Además, el conjunto factible está delimitado por catorce restricciones, de las cuales ocho son cotas. Así, el problema tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\max \quad & f_1 = [0,0006, 0,0554] \cdot x_1 + \dots + [-0,0903, 0,1106] \\
\max \quad & f_2 = [0,0087, 0,0603] \cdot x_1 + \dots + [-0,2298, -0,0383] \\
\max \quad & f_3 = [0,0159, 0,0661] \cdot x_1 + \dots + [-0,29443, -0,0391] \\
\min \quad & f_4 = [-0,1707, -0,0781] \cdot x_3 + \dots + [-0,1050, 0,1258] \\
\text{sujeto a} \quad & -0,3070 \cdot x_1 + 0,1443 \cdot x_3 - x_4 \leq -3,4583 & (C1) \\
& 0,1906 \cdot x_1 - 0,3677 \cdot x_3 + x_4 \leq 3,6419 & (C2) \\
& -0,3852 \cdot x_1 + 0,3944 \cdot x_3 - x_5 \leq -7,1713 & (C3) \\
& 0,2479 \cdot x_1 - 0,6532 \cdot x_3 + x_5 \leq 7,3679 & (C4) \\
& 0,0601 \cdot x_1 + 0,0327 \cdot x_3 - x_8 \leq -4,1200 & (C5) \\
& -0,1724 \cdot x_1 - 0,1742 \cdot x_3 + x_8 \leq 4,2703 & (C6) \\
& l_i \leq x_i \leq u_i \text{ for all } i = 1, \dots, 8 & (C7-C14)
\end{aligned} \tag{9}$$

4. Resolución del problema de optimización multiobjetivo

Los problemas de programación multiobjetivo deben tener en cuenta explícitamente el tratamiento de la incertidumbre inherente a los coeficientes del modelo ³. La programación intervalar o programación por intervalos es uno de los enfoques utilizados para tratar la incertidumbre en los problemas de programación multiobjetivo. A diferencia de la programación estocástica o de la programación difusa, que parten de la especificación o la ausencia de distribuciones probabilísticas y distribuciones posibilistas, respectivamente, la programación por intervalos solo requiere información sobre el rango de variación de algunos (o todos) los coeficientes del problema (Oliveira y Antunes, 2007). En esta sección, se presenta un nuevo enfoque para resolver problemas de programación multiobjetivo por intervalos en los que los coeficientes de las funciones objetivo son intervalos, como el problema que hemos definido en la sección anterior. El nuevo enfoque permite generar las denominadas soluciones posibles y necesariamente eficientes, si existen, sin requerir un esfuerzo computacional considerable y utilizando técnicas de optimización de un solo objetivo.

4.1. Conceptos y notación

Sin pérdida de generalidad, vamos a considerar el siguiente problema de programación multiobjetivo con intervalos en los coeficientes de las funciones objetivo:

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & F_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n [c_{kj}^L, c_{kj}^U] x_j, \quad k = 1, \dots, p, \\
\text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m, \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{10}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ es el vector de variables de decisión y $X = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ es la región factible del problema.

Es evidente que para cada uno de los coeficientes $c_{kj} \in [c_{kj}^L, c_{kj}^U]$ es un valor real, entonces el problema (10) es un problema de optimización multiobjetivo como el siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & \bar{F}_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_k x_j, \quad k = 1, \dots, p, \\
\text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m, \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{11}$$

donde $\bar{c}_k \in [c_{kj}^L, c_{kj}^U]$ para todo $k = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$.

El concepto de valor ideal en programación multiobjetivo, pasa a ser intervalo ideal en programación intervalar. De forma que, la cota inferior del intervalo ideal corresponde con el valor

³Nos referimos con coeficientes del modelo, a los coeficientes de las funciones objetivo y de las restricciones.

ideal cuando consideramos la cota inferior de los intervalos en las funciones objetivos, y, de forma análoga, la cota superior del intervalo ideal está formada por el valor ideal cuando consideramos la cota superior de los intervalos en las funciones objetivo. Así, para cada función objetivo $F_k(x)$, se resuelven los siguientes problemas lineales (Chinneck y Ramadan, 2000):

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } F_k^U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j, \\ & \text{sujeto a } \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m, \\ & \quad \quad \quad x_j \geq 0 \quad \quad \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

y

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } F_k^L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j, \\ & \text{sujeto a } \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m, \\ & \quad \quad \quad x_j \geq 0 \quad \quad \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

denotando a las soluciones óptimas de (12) and (13) como \mathbf{x}_k^U y \mathbf{x}_k^L , respectivamente, y a los correspondientes valores objetivo como:

$$F_k^{U*} = F_k^U(\mathbf{x}_k^U), \quad k = 1, \dots, p, \quad (14)$$

$$F_k^{L*} = F_k^L(\mathbf{x}_k^L), \quad k = 1, \dots, p. \quad (15)$$

De esta forma, los intervalos ideales son $[F_k^{L*}, F_k^{U*}]$ para $k = 1, \dots, p$ y representan las cotas de la solución ideal intervalar (Oliveira y Antunes, 2007).

Además, el concepto de eficiencia en programación multiobjetivo (Miettinen, 1999), definición 1, también se adapta a la programación multiobjetivo intervalar (Bitran, 1980) en las siguientes definiciones (2) y (3).

Definición 1 Una solución $x' \in X$ es eficiente para el problema (11) si y solo si no existe otra solución $x \in X$ de forma que $\bar{F}_k(\mathbf{x}') \leq \bar{F}_k(\mathbf{x})$ para cada objetivo $k = 1, \dots, p$ cumpliendo, al menos, una desigualdad estricta.

Definición 2 Una solución $\mathbf{x}' \in X$ es necesariamente eficiente para el problema (10) si y solo si es eficiente para el problema (11) para cualquier $\bar{c}_{kj} \in [c_{kj}^L, c_{kj}^U]$ con $k = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$. El conjunto de soluciones necesariamente eficientes se denota por N_E .

Definición 3 Una solución $\mathbf{x}' \in X$ es posiblemente eficiente para el problema (10) si es eficiente para (11) para al menos un $\bar{c}_{kj} \in [c_{kj}^L, c_{kj}^U]$ con $k = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$. El conjunto de soluciones posiblemente eficientes se denota como P_E .

Con estas definiciones, es trivial que $N_E \subseteq P_E$. Cualquier solución adecuada para un problema multiobjetivo intervalar podrá escogerse de los conjuntos N_E o P_E . Sin embargo, debido a que estos conjuntos pueden contener infinitos elementos, se requiere un método para obtener soluciones.

Existen diferentes formas de introducir preferencias en la resolución de un problema multiobjetivo. Una de ellas es mediante un punto de referencia $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_p)^T$, y consiste en dar valores de referencia o valores deseados para las funciones objetivo.

Una de las funciones comúnmente usadas para incorporar preferencias es la función de logro propuesta por (Wierzbicki, 1980):

$$s(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mu) = \max_{k=1, \dots, p} \{ \mu_k (f_k(\mathbf{x}) - q_k) \} + \rho \sum_{k=1}^p \mu_k (f_k(\mathbf{x}) - q_k), \quad (16)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))$ es el vector de funciones objetivo, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$ es el vector de pesos, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_p)^T$ es el punto de referencia y $\rho > 0$ se denomina coeficiente de aumento. Esta funcin debe ser minimizada en la la region factible:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in X} \max_{k=1, \dots, p} \{ \mu_k (f_k(\mathbf{x}) - q_k) \} + \rho \sum_{k=1}^p \mu_k (f_k(\mathbf{x}) - q_k), \\ \text{sujeto a : } \mathbf{x} \in X \end{aligned} \quad (17)$$

Para este tipo de problemas escalarizados, es necesario considerar un problema multiobjetivo determinista como (11). En este caso, $f_k(x) = \bar{F}_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_{kj} x_j$ para todo $k = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$.

Se demuestra que cada solucin de (17) es una solucin Pareto ptima de (11) y, ademns, cualquier solucin Pareto ptima se obtiene resolviendo el problema (17) utilizando como punto de referencia el punto ideal (o cualquier vector objetivo que domine a este, como el punto utopa), y variando el vector de pesos en todo el espacio de vectores de pesos (Wierzbicki, 1980; Miettinen, 1999). Por otro lado, se demuestra que cualquier solucin Pareto ptima se puede obtener resolviendo el problema (17) fijando un vector de peso y variando el punto de referencia (Miettinen, 1999).

En lo que sigue, vamos a describir brevemente, algunos problemas escalarizados para obtener soluciones posiblemente eficientes de (10) propuestas en (Henriques *et al.*, 2019). Vamos a considerar que queremos minimizar la peor distancia posible entre el intervalo de la funcin objetivo con el intervalo deseado. Si consideramos el intervalo de las funciones objetivo:

$$F_k(\mathbf{x}) = \left[F_k^L(\mathbf{x}) = \sum_j^n c_{kj}^L x_j, F_k^U(\mathbf{x}) = \sum_j^n c_{kj}^U x_j \right]$$

y queremos minimizar la distancia a un intervalo deseado $T_k = [t_k^L, t_k^U]$, podemos definir el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & S(e_1^L, \dots, e_p^L, e_1^U, \dots, e_p^U) \\ \text{sujeto a } & \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j + e_k^L = t_k^L, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j + e_k^U = t_k^U, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (18)$$

donde las variables son x_j, e_k^L y e_k^U con $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$. Estas ltimas (e_k^L y e_k^U) representan las desviaciones de los intervalos y $S(e_1^L, \dots, e_p^L, e_1^U, \dots, e_p^U)$ es una funcin de logro de dichas desviaciones.

Si consideramos que T_k est definido por las cotas de la solucin intervalar ideal, es decir, $T_k = [F_k^{L*}, F_k^{U*}]$, tenemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & S(e_1^L, \dots, e_p^L, e_1^U, \dots, e_p^U) \\ \text{sujeto a } & \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j + e_k^L = F_k^{L*}, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j + e_k^U = F_k^{U*}, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

donde las variables de desviacin e_k^L, e_k^U , son positivas o cero.

El problema (19) puede resolverse considerando un procedimiento optimista (el lmite inferior de la desviacin necesaria) o un procedimiento pesimista (el lmite superior de la desviacin necesaria). El

segundo enfoque permite obtener la menor distancia con respecto al objetivo considerado (Oliveira y Antunes, 2007; Inuiguchi y Kume, 1991).

Si consideramos la siguiente función de logro:

$$S(e_1^L, \dots, e_p^L, e_1^U, \dots, e_p^U) = \max_{k=1, \dots, p} \{\mu_k^L e_k^L + \mu_k^U e_k^U\} \quad (20)$$

el problema (19) viene dado por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \max_{k=1, \dots, p} \{\mu_k^L e_k^L + \mu_k^U e_k^U\} \\ & \text{sujeto a } \begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j + e_k^L = F_k^{L*}, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j + e_k^U = F_k^{U*}, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0 & j = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

y se intenta alcanzar las cotas de la solución ideal intervalar mediante un enfoque minimax usando un término aditivo para cada intervalo.

Por un lado, está demostrado en Henriques *et al.* (2019) que si la solución del problema

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } v \\ & \text{sujeto a } \begin{cases} \mu_k^L (F_k^{L*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j) + \mu_k^U (F_k^{U*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j) \leq v, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0 & j = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

es óptima, entonces es una solución posiblemente eficiente de (10).

Se puede demostrar que cada solución de (21) es también una solución de (22). Así, tenemos que, si la solución de (21) es óptima, entonces es una solución posiblemente eficiente de (10). Consideremos $v^* = \max_{k=1, \dots, p} \{\mu_k^L e_k^{*L} + \mu_k^U e_k^{*U}\}$. Teniendo en cuenta las restricciones del problema (21):

$$\begin{aligned} e_k^{*L} &= F_k^{L*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j^*, & k = 1, \dots, p, \\ e_k^{*U} &= F_k^{U*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j^*, & k = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

Vamos a probar que $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ y v^* es también una solución óptima de (22). Supongamos que $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ y v^* no es una solución óptima de (22). Sean $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$ y \bar{v} una solución óptima de (22). Por lo tanto, tenemos que $\bar{v} < v^*$ y en consecuencia:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \max_{k=1, \dots, p} (\mu_k^L (F_k^{L*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^L \bar{x}_j) + \mu_k^U (F_k^{U*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^U \bar{x}_j)) < \\ &< \max_{k=1, \dots, p} (\mu_k^L (F_k^{L*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j^*) + \mu_k^U (F_k^{U*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j^*)) = v^* \end{aligned} \quad (23)$$

Considerando de nuevo las restricciones del problema (21):

$$\begin{aligned} \bar{e}_k^L &= F_k^{L*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^L \bar{x}_j, & k = 1, \dots, p, \\ \bar{e}_k^U &= F_k^{U*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^U \bar{x}_j, & k = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

y sustituyendo esto en lo anterior (23), se obtiene:

$$\max_{k=1, \dots, p} \{\mu_k^L \bar{e}_k^L + \mu_k^U \bar{e}_k^U\} < \max_{k=1, \dots, p} \{\mu_k^L e_k^{*L} + \mu_k^U e_k^{*U}\}$$

Esto es una contradicción con que $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$, e_k^{*U} , e_k^{*L} , con $k = 1, \dots, p$ es solución óptima de (21).

Con el objetivo de no requerir la unicidad de la solución, se puede añadir un término de aumento a la función de logro de las desviaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& S(e_1^L, \dots, e_p^L, e_1^U, \dots, e_p^U) \\
& = \max_{k=1, \dots, p} \{ \mu_k^L e_k^L + \mu_k^U e_k^U \} + \rho \sum_{k=1}^p (\mu_k^L e_k^L + \mu_k^U e_k^U)
\end{aligned} \tag{24}$$

donde $\rho > 0$ se denomina término de aumento. Por lo tanto, el problema a minimizar viene dado ahora por:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } \max_{k=1, \dots, p} \{ \mu_k^L e_k^L + \mu_k^U e_k^U \} + \rho \sum_{k=1}^p (\mu_k^L e_k^L + \mu_k^U e_k^U) \\
& \text{sujeto a } \begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j + e_k^L = F_k^{L*}, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j + e_k^U = F_k^{U*}, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, m, \\ x_j, e_k^L, e_k^U \geq 0 & j = 1, \dots, n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{25}$$

Est demostrado en Henriques *et al.* (2019) que la solución del problema:

$$\begin{aligned}
& \text{minimize } v + \rho \sum_{k=1}^p (\mu_k^L (F_k^{L*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j) + \mu_k^U (F_k^{U*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j)) \\
& \text{sujeto a } \begin{cases} \mu_k^L (F_k^{L*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j) + \mu_k^U (F_k^{U*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j) \leq v, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0 & j = 1, \dots, n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{26}$$

es siempre una solución posiblemente eficiente de (10).

Por otro lado, se puede demostrar que si el valor óptimo v del problema (21) es cero, la solución x^* es también una solución necesariamente eficiente. Es decir, sea $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$, e_k^{*L}, e_k^{*U} con $k = 1, \dots, p$ la solución óptima de (21), donde $\mu_k^L, \mu_k^U > 0$ y $\mu_k^L + \mu_k^U = 1$ para todo $k = 1, \dots, p$.

Supongamos que x^* no es una solución necesariamente eficiente del problema (10), por lo tanto $x^* \notin N_E$, y consideramos $x^1 \in N_E$ una solución necesariamente eficiente. De esta forma, para cualquier coeficiente de las funciones objetivo, no existe otra solución que domine a x^1 . Lo que significa que si consideramos, por ejemplo, los coeficientes c_{kj}^L para $k = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$ y teniendo en cuenta que x^* es una solución factible, existe al menos un k_0 que cumple lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^n c_{k_0 j}^L x_j^* < \sum_{j=1}^n c_{k_0 j}^L x_j^1 \tag{27}$$

Si tenemos en cuenta las definiciones de F_k^{U*} y F_k^{L*} en (14) y (15) respectivamente, para cada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in X$:

$$F_k^{L*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j \geq 0 \text{ y } F_k^{U*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j \geq 0 \text{ para todo } k = 1, \dots, p.$$

Como tenemos que $v^* = 0$ para \mathbf{x}^* y $\mu_k^L, \mu_k^U > 0$ para todo $k = 1, \dots, p$, es verifica:

$$F_k^{L*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j^* = 0 \text{ y } F_k^{U*} - \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j^* = 0 \text{ para todo } k = 1, \dots, p.$$

Entonces, para cada $\mathbf{x} \in X$:

$$\sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j \leq \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j^* \text{ and } \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j \leq \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j^* \text{ for all } k = 1, \dots, p.$$

Particularmente para \mathbf{x}^1 :

$$\sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j^1 \leq \sum_{j=1}^n c_{kj}^L x_j^* \text{ and } \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j^1 \leq \sum_{j=1}^n c_{kj}^U x_j^* \text{ for all } k = 1, \dots, p.$$

Pero esto se contradice con (27), así obtenemos que $\mathbf{x}^* \in N_E$.

Esta nueva propuesta de problema escalarizado (26) nos permite generar las denominadas soluciones posiblemente eficientes (incluso necesariamente eficientes si $v^* = 0$) teniendo en cuenta la distancia ponderada a los valores ideales inferior y superior. De esta forma, el problema de optimización multiobjetivo intervalar definido en la sección anterior (Sección 3), será resuelto utilizando la formulación del problema (26) y teniendo en cuenta los resultados teóricos descritos en esta sección.

5. Resultados

En esta sección, vamos a resolver el problema anteriormente definido mediante un análisis económico (9):

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f_1 = [0,0006, 0,0554] \cdot x_1 + \dots + [-0,0903, 0,1106] \\
 \max \quad & f_2 = [0,0087, 0,0603] \cdot x_1 + \dots + [-0,2298, -0,0383] \\
 \max \quad & f_3 = [0,0159, 0,0661] \cdot x_1 + \dots + [-0,29443, -0,0391] \\
 \min \quad & f_4 = [-0,1707, -0,0781] \cdot x_3 + \dots + [-0,1050, 0,1258] \\
 \text{sujeto a} \quad & -0,3070 \cdot x_1 + 0,1443 \cdot x_3 - x_4 \leq -3,4583 \quad (C1) \\
 & 0,1906 \cdot x_1 - 0,3677 \cdot x_3 + x_4 \leq 3,6419 \quad (C2) \\
 & -0,3852 \cdot x_1 + 0,3944 \cdot x_3 - x_5 \leq -7,1713 \quad (C3) \\
 & 0,2479 \cdot x_1 - 0,6532 \cdot x_3 + x_5 \leq 7,3679 \quad (C4) \\
 & 0,0601 \cdot x_1 + 0,0327 \cdot x_3 - x_8 \leq -4,1200 \quad (C5) \\
 & -0,1724 \cdot x_1 - 0,1742 \cdot x_3 + x_8 \leq 4,2703 \quad (C6) \\
 & l_i \leq x_i \leq u_i \text{ for all } i = 1, \dots, 8 \quad (C7-C14)
 \end{aligned}$$

En este problema pretendemos optimizar simultáneamente los índices de positividad, motivación, sentido de pertenencia y acoso escolar. Para ello vamos a seguir la formulación (26) propuesta en la sección anterior (Sección 4). Así, en primer lugar, tenemos que obtener los valores óptimos de cada una de las funciones objetivo usando la cota superior e inferior de los coeficientes. Esto se corresponde con la resolución de los problemas, (12) y (13), respectivamente. Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Valores ideales de cada objetivo para las cotas inferiores y superiores

Función objetivo	Valor ideal inferior	Valor ideal superior
índice de positividad	0,0717	0,6020
índice de motivación	0,1184	0,9872
índice de sentido de pertenencia	0,0292	0,6637
índice de acoso escolar	-0,7406	-0,0838

Una vez obtenidos los valores ideales para las cotas superiores e inferiores, estos se utilizan en la resolución del problema aplicando la formulación del problema escalarizado (26).

Como adelantamos en las secciones previas, la resolución de este tipo de problemas, da información sobre el perfil de estudiante que alcanza el equilibrio óptimo entre los objetivos (Tabla 7) y el valor de cada función objetivo en el óptimo en ambos casos, cotas superiores y cotas inferiores (Tabla 8).

Analizando los valores obtenidos por las variables de decisión, podemos obtener varias conclusiones del perfil de estudiante que alcanzara el balance óptimo entre los índices del bienestar. En primer lugar, el estudiante deberá alcanzar un nivel socioeconómico de 3,7171. Además, este balance lo alcanzan las chicas matriculadas en centros concertados. Siguiendo con las variables de decisión, estos estudiantes deberán emplear 2,4616 horas de uso de Internet fuera del colegio y empezar a utilizar dispositivos digitales a los 7 años. El apoyo por parte del profesorado y el ambiente escolar

Tabla 7. Solucin del problema multiobjetivo de programacin intervalar

Variabes		Valor en la solucin
Nivel socioeconmico	x_1	3,7171
Tipo de colegio	x_2	1
Gnero	x_3	1
Horas de Internet fuera del colegio	x_4	2,4616
Edad de uso de dispositivos digitales	x_5	7,0996
Apoyo del profesorado	x_6	-0,9723
Ambiente escolar	x_7	1,4652
Horas dedicadas a aprender otro idioma	x_8	5,0855

Tabla 8. Valor de las funciones objetivo en la solucin

Funciones objetivo	Peor escenario	Mejor escenario
ndice de positividad	-0,0256	0,5987
ndice de motivacin	0,1016	0,9050
ndice de sentido de pertenencia	-0,0769	0,6275
ndice de acoso escolar	-0,0829	-0,6737

deberan alcanzar su mejor valor. Por ltimo, estos estudiantes deberan dedicar aproximadamente 5 horas aprendiendo otro idioma.

Los valores alcanzados por los ndices se dan tanto para el peor y mejor escenario (utilizando la cota inferior (respectivamente superior) del intervalo en el caso que el ndice sea a minimizar y superior (respectivamente inferior) en el caso que el ndice sea a maximizar. Para el peor escenario, los ndices de positividad y sentido de pertenencia empeoran sus correspondientes medias en la muestra. Sin embargo, los ndices de motivacin y acoso escolar mejoran sus medias, este ltimo obteniendo un valor muy prximo a ella. En El mejor escenario, todos los ndices mejoran su media.

Tabla 9. Distancia de la solucin al ideal

Funciones objetivo	$d(F_k^*, F_k(x))$
ndice de positividad	0,0973
ndice de motivacin	0,1082
ndice de sentido de pertenencia	0,1061
ndice de acoso escolar	0,0669

Con el objetivo de medir cmo de cerca estn las soluciones obtenidas del intervalo ideal (Tabla 6), se calculan las siguientes distancias (Tabla 9):

$$d(F_k^*, F_k(x)) = \max_{k \in \{1,2,3,4\}} (|F_k^{L*} - F_k^L(x)|, |F_k^{U*} - F_k^U(x)|). \quad (28)$$

Por lo tanto, cuando la distancia est cerca de cero, el intervalo de soluciones est ms cerca de su correspondiente intervalo ideal.

Centrndonos en las funciones objetivo, podemos decir que los ndices de positividad y acoso estn ms cercanos a su ideal que los ndices de motivacin y sentido de pertenencia. Eso lo podemos ver comparando las Tablas 6 y 8, adems de observando las distancias. En trminos de nuestro problema, podemos concluir que, si deseamos alcanzar simultneamente valores para los cuatro indicadores lo ms cerca posible de sus correspondientes niveles ideales ptimos, los mejores resultados se alcanzan cuando los niveles de los ndices de positividad y acosos se acerca a su intervalo ideal, a expensas

de un sacrificio en los índices de motivación y sentido de pertenencia.

6. Conclusiones

En este artículo se propone un entorno metodológico en el que se combinan técnicas econométricas y de optimización multiobjetivo que pueden resultar muy útiles para investigadores y decisores. Utilizando esta combinación, es posible identificar qué valores de las variables explicativas, ajustándose a los datos observados, alcanzan simultáneamente valores óptimos de las variables que consideramos como objetivo o variables respuesta.

La metodología propuesta es muy útil cuando existe cierto grado de conflicto entre las variables explicativas consideradas. En esta situación, se sugiere aplicar la combinación de técnicas propuestas en este artículo. Para ello, definimos un problema multiobjetivo a partir de las regresiones en las que se basa el análisis econométrico considerando incertidumbre. Posteriormente, este problema se resuelve utilizando técnicas de programación multiobjetivo intervalar pudiendo así sacar conclusiones sobre el tema que estamos estudiando.

Con el resultado obtenido de la resolución del problema, los decisores/investigadores pueden sugerir políticas con el objetivo de mejorar las variables explicativas tanto como sea posible para poder alcanzar, simultáneamente, valores deseados en los objetivos. Además, podemos prever cómo afectar la mejora de alguno de los objetivos en el resto de ellos. Este tipo de información es imposible obtenerla haciendo solo un análisis econométrico del problema, por lo que el enfoque combinado que aquí se propone constituye una aportación de investigación muy relevante.

Particularmente, en este trabajo se propone estudiar un problema referido al bienestar de los estudiantes españoles, ya que cada vez son más las evidencias encontradas en las que se relaciona el rendimiento académico, y por consiguiente su rendimiento posterior como persona adulta, con el bienestar de los adolescentes en el colegio. Para ello, hemos diseñado un problema multiobjetivo en el que se optimizan, de forma simultánea, cuatro índices que componen el bienestar de los estudiantes (positividad, motivación, sentido de pertenencia y acoso escolar) en función de un conjunto de variables explicativas relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los resultados obtenidos en este problema permiten arrojar luz al desarrollo de políticas educativas orientadas con el objetivo de alcanzar niveles óptimos del bienestar. Además, las conclusiones alcanzadas permitirán a los responsables políticos anticiparse, a efectos prácticos, de la mejora de todos estos indicadores (positividad, motivación, sentido de pertenencia y acoso) al mismo tiempo. Así, esta aplicación demuestra los beneficios de nuestra propuesta en la práctica. Creemos que las posibilidades de aplicar este marco entorno a otros contextos pertenecientes a diferentes campos de investigación (como, por ejemplo, la industria, arquitectura o la ingeniería) y merecen futuros trabajos de investigación.

Agradecimientos

Este trabajo está respaldado por el Ministerio de Economía y Competitividad (proyecto ECO2017-88883-R) y por la Consejera de Economía, Conocimiento y Bienestar de la Junta de Andalucía (grupo PAI SEJ-532 y UMA18-FEDERJA-024). Además, la autora del trabajo, Sandra González-Gallardo, es beneficiaria de un contrato de investigación dentro del “Sistema Nacional de Garantía Juvenil y del Programa Operativo de Empleo Juvenil 2014-2020 - Fondos FEDER”.

Referencias

Allen, K., Kern, M. L., Vella-Brodrick, D., Hattie, J., y Waters, L. (2018). What schools need to know about fostering school belonging: a meta-analysis. *Educational Psychology Review*, 30:1–34.

- Athanasidou, K., Melegkovits, E., Andrie, E., Magoulas, C., Tzavara, C. K., Richardson, C., Greydanus, D., Tsolia, M., y Tsitsika, A. (2018). Cross-national aspects of cyberbullying victimization among 1417-year-old adolescents across seven european countries. *BMC Public Health*, 18.
- Baker, D. P., Fabrega, R., Galindo, C., y Mishook, J. (2004). Instructional time and national achievement: Cross-national evidence. *PROSPECTS*, 34:311–334.
- Bitran, G. R. (1980). Linear multiple objective problems with interval coefficients. *Management Science*, 26(7):694–706.
- Chinneck, J. y Ramadan, K. (2000). Linear programming with interval coefficients. *Journal of the Operational Research Society*, 51.
- Deb, K. y Miettinen, K. (2010). Nadir point estimation using evolutionary approaches: Better accuracy and computational speed through focused search. En Ehrgott, M., Naujoks, B., Stewart, T. J., y Wallenius, J., editores, *Multiple Criteria Decision Making for Sustainable Energy and Transportation Systems*, pp. 339–354, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- Demir, Y. y Kutlu, M. (2018). Relationships among internet addiction, academic motivation, academic procrastination and school attachment in adolescents. *International Online Journal of Educational Sciences*, (5):315–322.
- Ehrgott, M. y Tenfelde-Podehl, D. (2003). Computation of ideal and nadir values and implications for their use in mcdm methods. *European Journal of Operational Research*, 151(1):119–139.
- Fan, W. y Williams, C. (2018). The mediating role of student motivation in the linking of perceived school climate and achievement in reading and mathematics. *Frontiers in Education*, 3:50.
- Henriques, C., Luque, M., Marcenaro-Gutierrez, O., y Lopez-Agudo, L. (2019). A multiobjective interval programming model to explore the trade-offs among different aspects of job satisfaction under different scenarios. *Socio-Economic Planning Sciences*, 66:35–46.
- Inuiguchi, M. y Kume, Y. (1991). Goal programming problems with interval coefficients and target intervals. *European Journal of Operational Research*, 52(3):345 – 360.
- Jogi, A.-L., Kikas, E., Lerkkanen, M.-K., y Mgi, K. (2015). Cross-lagged relations between math-related interest, performance goals and skills in groups of children with different general abilities. *Learning and Individual Differences*, 39:105–113.
- Korhonen, T., Lavonen, J., Kukkonen, M., Sormunen, K., y Juuti, K. (2014). *The Innovative School as an Environment for the Design of Educational Innovations*, pp. 99–113. SensePublishers, Rotterdam.
- Miettinen, K. (1999). *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Mischel, J. y Kitsantas, A. (2020). Middle school students' perceptions of school climate, bullying prevalence, and social support and coping. *Social Psychology of Education*, 23:51–72.
- OECD (2017). *PISA 2015 Results (Volume III)*.
- OECD (2019). *PISA 2018 results in focus*. OECD Publishing.
- Oliveira, C. H. y Antunes, C. H. (2007). Multiple objective linear programming models with interval coefficients an illustrated overview. *European Journal of Operational Research*, 181(3):1434–1463.
- Parhiala, P., Torppa, M., Vasalampi, K., Eklund, K., Poikkeus, A.-M., y Aro, T. (2018). Profiles of school motivation and emotional well-being among adolescents: Associations with math and reading performance. *Learning and Individual Differences*, 61:196–204.
- Ryan, R. M. y Deci, E. L. (2018). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, 55(1):68–78.
- Scheerens, J. y Hendriks, M. (2014). *State of the Art of Time Effectiveness*, pp. 7–29. Springer International Publishing, Cham.
- Strm, I. F., Thoresen, S., Wentzel-Larsen, T., y Dyb, G. (2013). Violence, bullying and academic achievement: A study of 15-year-old adolescents and their school environment. *Child Abuse &*

- Neglect*, 37(4):243–251.
- Veenstra, R., Lindenberg, S., Oldehinkel, A. J., De Winter, A. F., Verhulst, F. C., y Ormel, J. (2005). Bullying and victimization in elementary schools: A comparison of bullies, victims, bully/victims, and uninvolved preadolescents. *Developmental Psychology*, 41(4):672–682.
- Warr, P. (1999). *Well-being and the Workplace*, pp. 392–412. New York: Russell Sage Foundation.
- Wierzbicki, A. P. (1980). The use of reference objectives in multiobjective optimization. En Fandel, G. y Gal, T., editores, *Multiple Criteria Decision Making, Theory and Applications*, pp. 468–486. Springer.
- Yldrm, S. (2012). Teacher support, motivation, learning strategy use, and achievement: A multi-level mediation model. *The Journal of Experimental Education*, 80(2):150–172.
- Yu, J., McLellan, R., y Winter, L. (2020). Which boys and which girls are falling behind? Linking adolescents gender role profiles to motivation, engagement, and achievement. *Journal of Youth and Adolescence*, 50:336–352.