Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2008 **15**(2) : 187–192
cimpa – ucr issn: 1409-2433

sobre el espectro del digrafo (h, j) adjunto de un multidigrafo k–regular

Teresa Braicovich* Elsa Osio†

Recibido/Received: 26 Sep 2007 — Aceptado/Accepted: 11 Jul 2008

Resumen

En este trabajo se vincula la Teoría de Matrices con la Teoría de Grafos, en particular se trabaja con polinomios característicos de matrices de precedencia y con el espectro de digrafos (h, j) adjuntos. El mismo tiene como objetivo enunciar y demostrar, mediante representaciones matriciales adecuadas, un teorema que permite determinar los autovalores de un digrafo (h, j) adjunto de un multidigrafo k–regular, dándose las respectivas multiplicidades y también la forma de los autovectores asociados.

Palabras clave: multidigrafos k–regulares, digrafos (h, j) adjuntos, matriz precedencia, espectro de un digrafo.

Abstract

In this paper we relate the Matrix Theory and the Graphs Theory, particularlly we work with the characteristic polynomial of precedence matrix with the spectrum of (h, j) adjoint digraphs. The object of this work is to enunciate and demonstrate, with adequate matrix representations, a theorem that allows to determinate the eigenvalues of an (h, j) adjoin digraph of a multidigraph k–regular, resulting the respective multiplicities and also the shape of the eigenvectors associated.

Keywords: Multidigraphs, (h, j) adjoin digraphs, precedence matrix, spectrum of digraphs.

Mathematics Subject Classification: 05C50.

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Economía, Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina. E-Mail: `tbraicov@uncoma.edu.ar`

†Misma dirección que T. Braicovich. E-Mail: `osioe@jetband.com.ar`

1 Introducción

Las matrices pueden ser utilizadas no sólo para describir la estructura de los grafos, sino también para operar con ellos y poder así resolver en forma algebraica problemas de la Teoría de Grafos. La interrelación existente entre esta última teoría y la Teoría de Matrices es sumamente fructífera, ya que permite reinterpretar resultados de una de ellas en la otra y viceversa. Esto, sin duda alguna, lleva a un enriquecimiento mutuo en ambos casos. A cada grafo, sea dirigido o no dirigido, se le pueden asociar diferentes matrices, no todas proveen la misma información, ya que reflejan las distintas características de los grafos en cuestión. Cabe aclarar que tanto el polinomio característico como el espectro muestran propiedades de los grafos asociados a ellos y plantean interesantes problemas aún no resueltos.

El desarrollo de este trabajo se basa en el concepto de (h, j) adjunción, el mismo fue presentado por el Dr. Raúl Chiappa en su trabajo "Palabras Circulares Equilibradas. Grafos adjuntos" [2], como extensión del concepto de grafo adjunto que había sido introducido en el año 1943 para el caso no dirigido y extendido en el año 1960 para el caso dirigido. Teniendo en cuenta el concepto antes mencionado y la publicación referida en [6] se demostrará el siguiente teorema: "La matriz de precedencia del digrafo (h, j) adjunto de un multidigrafo k–regular de n vértices, tiene como autovalores a k^{h-j} con multiplicidad $n \cdot k^j$ y a cero con multiplicidad $n \cdot k^j(k^h - 1)$". Previamente a esta demostración daremos en los apartados 2 y 3 una serie de definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo y por último, en el apartado 5, se dan las conclusiones y las perspectivas a futuro del mismo.

2 Definiciones

Debido a la falta de uniformidad existente en la designación de algunos conceptos básicos de la teoría de grafos, daremos las definiciones necesarias para el desarrollo de este trabajo.

- Un *multidigrafo* es una terna $G = (V, U, \phi)$ que consiste en dos conjuntos no vacíos y disjuntos, V y U, de elementos llamados *vértices* y *arcos* respectivamente, y de una función ϕ frecuentemente llamada *relación de incidencia*, que asocia a cada arco de G un par ordenado de vértices (no necesariamente distintos) de G. En caso que no existan arcos paralelos puede denominarse *digrafos* a los multidigrafos.

- Un multidigrafo G es *k–regular* si para todo vértice v de G se tiene que $gr^+_G(v) = gr^-_G(v) = k$ y es *balanceado* si $gr^+(v) = gr^-(v)$ para todo vértice v del conjunto de vértices V.

- Un multidigrafo G es *fuertemente conexo* si es trivial o para cada par de vértices de G existe al menos un camino que los une y es simplemente *conexo* si su correspondiente multigrado sostén es conexo. En caso contrario, G es *disconexo*. Es claro que un multidigrafo disconexo consiste en dos o más multidigrafos conexos. Cada uno de estos submultidigrafos conexos se llama *componente conexa* de G.

- Dado un multidigrafo G , un *1–difactor* de G es un subdigrafo recubridor H de G tal que $gr_H^+(v) = gr_H^-(v) = 1$, cualquiera sea el vértice v de G.

- Se llama *matriz de precedencia* de un multidigrafo G de orden n, $n \geq 1$ a la matriz $P(G) = [p_{ij}]$ donde p_{ij} es el número de arcos de la forma (i, j), eventualmente $i = j$. La *matriz arco precedencia* del digrafo G es $P_a(G) = [a_{ij}]$, donde $a_{ij} = 1$ si el extremo final del arco i coincide con el extremo inicial del arco j y $a_{ij} = 0$ en caso contrario.

- Dado un multidigrafo $G = (V, U, \phi)$, su *digrafo adjunto* es el digrafo $G{*} = (U, \Gamma, \sigma)$ tal que $b \in \Gamma(a)$ $(a, b \in U$, no necesariamente $a \neq b)$ si y solamente si en G el extremo final del arco a incide en el mismo vértice que el extremo inicial del arco b.

- Dado el multidigrafo G y los enteros h, j tales que $h > j \geq 0$, se llama (h, j)*–adjunto de* G y se denota ${}^{h,j}G$ al digrafo cuyos vértices son los caminos de G (no necesariamente simples) de longitud h y cuya relación de precedencia ${}^{h,j}\sigma$ está definida por: $y \in {}^{h,j}\sigma(x)$ si y sólo si el j-subcamino final de x coincide con el j–subcamino inicial de y (no necesariamente $x \neq y$). En particular el digrafo adjunto se obtiene cuando $h = 1$ y $j = 0$.

Por último, enunciamos algunas definiciones y resultados inherentes al álgebra lineal.

- Sea F el cuerpo de los números Reales $(\mathbb{R})$ o de los números complejos $(\mathbb{C})$ y sea A una matriz cuadrada con componentes en F. Decimos que $\alpha \in F$ es un *autovalor* de A si existe un vector no nulo $\vec{v}$ tal que $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$, tal vector es llamado *autovector* de A asociado al autovalor α.

- El polinomio $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ es el *polinomio característico* de la matriz A. Los autovalores de A junto con sus multiplicidades conforman el *espectro* de A y será notado $E(A)$. Matrices con igual espectro son llamadas *coespectrales.*

- Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden con componentes en F, A y B son *matrices similares* en F, si existe una matriz inversible P con componentes en F tal que se tiene que $B = P^{-1}AP$. Dos matrices similares tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto el mismo espectro.

3 Resultados preliminares

En este punto presentamos los resultados necesarios para llevar a cabo la demostración del teorema que nos ocupa, algunos de ellos con sus respectivas demostraciones, las tres primeras proposiciones se encuentran desarrolladas en [6].

Proposición 3.1 *Si G un multidigrafo k–regular de n vértices y ${}^{h,j}G$ su digrafo (h, j) adjunto entonces el número de vértices de ${}^{h,j}G$ es igual a $n \cdot k^h$.*

Proposición 3.2 *Si G un multidigrafo k–regular de n vértices y ${}^{h,j}G$ su digrafo (h, j) adjunto, entonces el digrafo ${}^{h,j}G$ es k^{h-j}–regular.*

Proposición 3.3 *Si G es un multidigrafo k–regular de n vértices y ${}^{h,j}G$ su digrafo (h,j) adjunto entonces el número de arcos de ${}^{h,j}G$ es igual a $n \cdot k^{2h-j}$.*

Proposición 3.4 *Si G es un multidigrafo k–regular de n vértices, la matriz precedencia P del digrafo ${}^{h,j}G$ tiene k^{h-j} elementos iguales a uno por fila y la misma cantidad de dichos elementos en cada columna, los restantes son todos ceros.*

DEMOSTRACIÓN: Surge de la regularidad del digrafo ${}^{h,j}G$ demostrada en la proposición 3.2. ■

Proposición 3.5 *Si P' es una matriz diagonal en bloques que surge de un reordenamiento de las filas de la matriz de precedencia P del digrafo ${}^{h,j}G$ entonces el número de bloques de P' es igual al número de vértices del multidigrafo G, si $j = 0$ y es igual a $n \cdot k^j$ si $j \neq 0$, y el orden de cada bloque es k^{h-j}.*

DEMOSTRACIÓN: Sea P' la matriz que surge de P al reordenarse sus filas, es decir:

$$P' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix}$$

Cada bloque es una submatriz cuadrada $A = (a_{ij})$ cuyo elemento $a_{ij} = 1$ cualquiera sea i, j en el rango que corresponda. Si no existe superposición entre los caminos considerados ($j = 0$), el número de bloques A de la matriz P' coincide con el número de vértices del multidigrafo G, ya que cada bloque es generado por uno de los vértices de G.

En caso de que exista superposición entre los caminos ($j \neq 0$), la condición de regularidad del dígrafo ${}^{h,j}G$ permite afirmar que el número de bloques de P' es el cociente entre el número de vértices de ${}^{h,j}G$ y su regularidad , es decir: $(n \cdot k^h)/k^{h-j} = n \cdot k^j$ bloques.

El número de arcos de cada uno de los bloques es el cociente entre el número total de arcos del digrafo ${}^{h,j}G$ y el número total de bloques , es decir: $(n \cdot k^{2h-j})/n \cdot k^j = k^{2(h-j)}$, por lo tanto el orden de cada submatriz A es k^{h-j}. ■

Proposición 3.6 *Los polinomios característicos de P y P' coinciden.*

DEMOSTRACIÓN: debido a que la matriz P' surge de la matriz P al aplicar un número finito de operaciones elementales resulta que P y P' son similares, luego sus polinomios característicos son iguales. ■

Proposición 3.7 *Si $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_m$ son las componentes conexas de un digrafo G, entonces el polinomio característico de la matriz precedencia de dicho digrafo es igual al producto de los polinomios característicos de las matrices precedencia de las componentes conexas H_i ($1 \leq i \leq m$).*

Resultado presentado en [3], obtenido a partir de los conceptos de 1–difactores existentes en un digrafo y el permanente de la matriz precedencia del mismo.

4 Resultado principal

Teorema 4.1 *La matriz precedencia del digrafo* ${}^{h,j}G$*, con* G *un multidigrafo* k*–regular de* n *vértices, tiene como autovalores a* k^{h-j} *con multiplicidad* $n \cdot k^j$ *y a cero con multiplicidad* $n \cdot k^j(k^{h-j} - 1)$*.*

DEMOSTRACIÓN: Para su demostración se tiene en cuenta las representaciones matriciales P y P' definidas anteriormente.

Debido a que la matriz P' es simétrica, se puede afirmar que sus autovalores son reales y puede determinarse una base ortonormal formada por los autovectores asociados a dichos autovalores.

Se probará que cada bloque A de orden k^{h-j} de la matriz P' tiene como autovalores a cero con multiplicidad $k^{h-j} - 1$ y a k^{h-j} con multiplicidad uno.

En efecto, por definición 0 es autovalor de A si existe un vector $\vec{X} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{X} = 0\vec{X}$ o su equivalente $(A - 0I)\vec{X} = \vec{0}$ sistema homogéneo cuya representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k^{h-j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Debido a que las columnas de la matriz $(A - 0I)$ son linealmente dependientes, el sistema es compatible indeterminado y en consecuencia tiene soluciones no triviales, entonces cero es un valor propio de A, siendo la solución general de dicho sistema de la forma:

$$S_G = (-x_2 - x_3 - \ldots x_{k^{h-j}}, x_2, x_3, \ldots, x_{k^{h-j}}).$$

Por lo tanto, puede afirmarse que el orden de multiplicidad del autovalor 0 es $k^{h-j} - 1$, ya que el espacio propio E_0 tiene dicha dimensión.

Además, la k^{h-j}upla $\vec{X} = (1, 1, \ldots, 1)$ es vector propio de A, pues se cumple que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$.

En efecto:

$$\begin{aligned} A\vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1+1+\cdots+1 \\ 1+1+1+1+\cdots+1 \\ \vdots \\ 1+1+1+1+\cdots+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k^{h-j} \\ k^{h-j} \\ \vdots \\ k^{h-j} \end{pmatrix} = k^{h-j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, $\vec{X}$ es un vector propio de A asociado al valor propio k^{h-j} y el orden de multiplicidad es 1, esto debido al orden de multiplicidad hallado para el autovalor 0 y/o a la dimensión del subespacio $E_{k^{h-j}}$.

Una base de la matriz A es:

$$B_A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si bien la matriz P' no es la matriz precedencia de ${}^{h,j}G$, sí podría ser matriz precedencia de un digrafo cuyas componentes conexas estarían representadas por cada uno de los bloques A. Además P y P' por ser matrices similares tienen el mismo polinomio característico y son coespectrales.

Por proposición 3.7. se puede afirmar que el polinomio característico de la matriz P' es igual al producto de los polinomios característicos de los $n \cdot k^j$ bloques A. Es decir:

$$P_P(\lambda) = P_{P'}(\lambda) = D(P' - \lambda I) = D(A - \lambda I)^{nk^j}.$$

Por proposición 3.5, como en total existen $n \cdot k^j$ bloques A, resulta que la matriz de precedencia del digrafo ${}^{h,j}G$ tiene como autovalores a:

- 0 con multiplicidad $n \cdot k^j(k^{h-j} - 1)$
- k^{h-j} con multiplicidad $n \cdot k^j$.

Con respecto a la base de la matriz P' puede observarse que cada uno de sus vectores, de orden $n \cdot k^h - j \times 1$, se obtiene a partir de los vectores de la base de A, de orden $k^{h-j} \times 1$, completando con ceros los elementos que faltan por encima y/o por debajo según la ubicación en P' del bloque al cual pertenece dicho vector.

A partir de esta base de P' puede ser obtenida una base de P, realizando en cada uno de los vectores que forman la primera, las mismas operaciones elementales por fila que fueran realizadas para obtener la matriz P' a partir de la matriz P. ■

Corolario 4.1 *Si $h = 1$ y $j = 0$ entonces el digrafo ${}^{h,j}G$ es el digrafo adjunto cuya matriz de precedencia tendrá como autovalores a cero con multiplicidad $n(k-1)$ y a k con multiplicidad n.*

En este caso, simplemente hemos reemplazado los valores de h y de j presentados en el teorema anterior por 1 y 0, respectivamente.

Por último en esta sección se ejemplifica el resultado obtenido. Previamente, cabe aclarar que para hallar grafos coespectrales de cierto grafo regular G, basta limitarse a los regulares de igual grado y orden que G, no implicando esto isomorfismo.

Consideraremos un multidigrafo G que sea 3–regular y tenga 6 vértices, hallaremos los autovalores del digrafo (h, j) adjunto para distintos valores de h y de j. Tomaremos en primer caso que la diferencia entre ambos valores sea igual a 1 y en otro caso que la misma sea distinta de 1.

Caso I

Sea un multidigrafo G 3–regular y de orden 6, hallaremos los autovalores de su digrafo $(3, 2)$ adjunto:

Por proposición 3.1 tenemos que el número de vértices del digrafo ${}^{3,2}G$ es igual a 162, valor que se obtiene al hacer $n \cdot k^h = 6 \cdot 3^3 = 162$ y por proposición 3.2 tenemos que la regularidad del digrafo ${}^{3,2}G$ es igual a 3, valor que se obtiene al hacer $k^{h-j} = 3^{3-2} = 3$.

Podemos agregar que la cantidad de arcos es igual al producto que se obtiene entre 162 y 3, es decir el digrafo ${}^{3,2}G$ tiene 486 arcos.

Con respecto a los autovalores de este grafo, por el teorema 4.1 se tiene que:

- El autovalor 3, obtenido al hacer $k^{h-j} = 3^{3-2} = 3$, tiene multiplicidad 54, ya que $n \cdot k^j = 6 \cdot 3^2 = 54$.
- El autovalor 0 tiene multiplicidad 108, valor que se obtiene al hacer $n \cdot k^j \cdot (k^{h-j} - 1) = 6 \cdot 3^2 \cdot (3^1 - 1) = 108$.

Se puede verificar que la suma de ambas multiplicidades da 162, que es el orden de la matriz precedencia del digrafo en cuestión.

Caso II

Sea un multidigrafo G 3–regular y de orden 6, hallaremos los autovalores de su digrafo $(3, 1)$ adjunto. Repetimos el planteo realizado en el caso anterior y obtenemos que el digrafo ${}^{3,1}G$ tiene 162 vértices (la cantidad de vértices no depende del valor j), es 9 regular y tiene, por lo tanto, 1458 arcos. Sus autovalores son:

- El autovalor 9, obtenido al hacer $k^{h-j} = 3^{3-1} = 9$ tiene multiplicidad 18, ya que $n \cdot k^j = 6 \cdot 3^1 = 18$.
- El autovalor 0 tiene multiplicidad 144, valor que se obtiene al hacer $n \cdot k^j \cdot (k^{h-j} - 1) = 6 \cdot 3^1 \cdot (3^2 - 1) = 144$.

Nuevamente, como en el caso anterior, se puede verificar que la suma de ambas multiplicidades es igual a 162, que es la cantidad de vértices del digrafo ${}^{3,1}G$.

5 Conclusiones y perspectivas

Hasta aquí hemos hallado, mediante representaciones matriciales adecuadas, los autovalores de la matriz precedencia de los digrafos (h, j) adjuntos de multidigrafos k–regulares y hemos presentado la forma que tienen los autovectores asociados a los mismos.

Nuestro objetivo futuro es analizar, por un lado y en base al mismo tipo de representaciones matriciales, el espectro de los digrafos (h, j) adjuntos de multidigrafos balanceados. Por otro lado, también nos interesa poner especial énfasis en los autovalores y autovectores de las matrices arco-precedencia de multidigrafos k–regulares y balanceados.

Por último, nos encontramos trabajando para determinar la relación existente entre los espectros de digrafos k–regulares sin bucles, los digrafos (h, j) adjuntos de estos y los digrafos complementarios de ambos.

Referencias

[1] Beineke, W.; Harary, F. (1966) "Binary matrices with equal determinant and permanent", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica I*: 179–183.

[2] Chiappa, R.A. (1982) "Palabras circulares equilibradas. Grafos adjuntos". INMABB-CONICET.

[3] Chiappa, R.A.; Sanza, C. (1999) *Grafos y Matrices*. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.

[4] Chung, F.R. (1997) *Spectral Graph Theory*, Regional Conference Series in Mathematics No. 92. American Mathematical Society, Providence RI.

[5] Hemminger, R.; Beineke, L. (1978) "Line graphs and line digraphs", in: L.W. Beineke & R.J. Wilson (Eds.) *Selected Topics in Graph Theory*, Ch. 10. Academic Press, New York: 271–305.

[6] Osio, E.; Braicovich, T.; Bernardi, C.; Costes, C. (2003) "Sobre digrafos adjuntos y (h, j) adjuntos de multidigrafos k–regulares", *Revista Colombiana de Matemática* **37**: 81–86.