# La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las Conexiones Matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico

Karen Gisel Campo-Meneses y Javier García-García

*Se propone y se valora un marco de referencia para estudiar la comprensión a partir del establecimiento de conexiones matemáticas y algunos constructos del Enfoque Ontosemiótico. Para ello, se tomó el caso de 10 estudiantes mexicanos de bachillerato cuando resolvían tareas sobre las funciones exponencial y logarítmica. Se empleó la Entrevista Basada en Tareas para colectar los datos, los cuales fueron analizados utilizando el análisis temático y el análisis ontosemiótico. Como resultado se obtuvo que, de acuerdo con el establecimiento de la conexión de reversibilidad (conexión matemática central), se puede valorar el nivel de comprensión de los estudiantes respecto a las funciones objeto de estudio.*

*Palabras clave:* Comprensión matemática; Conexiones matemáticas; Función exponencial; Función logarítmica.

Understanding exponential and logarithmic functions: a look from Mathematical Connections and the Ontosemiotic Approach

*A frame of reference is proposed and valued to study the understanding from the establishment of mathematical connections and some constructs of the Ontosemiotic Approach. For this, the case of 10 Mexican high school students was taken when they solved tasks on the exponential and logarithmic functions. The Task Based Interview was used to collect the data, which were analyzed using thematic analysis and ontosemiotic analysis. As a result, it was obtained that, according to the establishment of the reversibility connection (central mathematical connection), the level of understanding of the students regarding the functions under study can be assessed.*

*Keywords:* Mathematical understanding; Mathematical connections; Exponential function; Logarithmic function.

Campo-Meneses, K. G. y García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las conexiones matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. *PNA 16*(1), 25-56. DOI: 10.30827/pna.v16i1.15817

# Introducción

El aprendizaje con comprensión es una de las necesidades e intereses actuales en la Educación Matemática. Incluso el NCTM (2014) basa sus Principios y Estándares en la idea de que los estudiantes aprendan las matemáticas con comprensión y afirman que lo ideal es que todos los estudiantes logren comprender las matemáticas de tal forma que puedan aplicarlas mediante el uso de conceptos, procedimientos y procesos.

La comprensión de diferentes conceptos matemáticos se ha estudiado desde diferentes perspectivas teóricas (por ejemplo, desde los registros de representación semiótica, la teoría APOE, teoría de los campos conceptuales, el Enfoque ontosemiótico, entre otros). En particular, el estudio de la comprensión respecto a la función exponencial o bien la función logarítmica, se ha realizado desde los registros de representación semiótica (Castro et al., 2017), la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (Sureda y Otero, 2013), la teoría APOE (Weber, 2002) y el razonamiento covariacional (Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan y Amidon, 2016; Ferrari-Escolá et al., 2016; Gruver, 2018; Kuper y Carlson, 2020; Trejo y Ferrari, 2018).

La mayoría de estas investigaciones se han enfocado en la función exponencial y de manera general, han reportado que el trabajo con estas funciones es complejo y que los estudiantes presentan dificultades para: trabajar con diferentes registros de representación y relacionarlos; establecer relaciones entre las propiedades; razonar de manera continua y no alcanzan un nivel alto de razonamiento covariacional; conceptualizar la función exponencial, entre otros.

Este panorama muestra la necesidad de seguir indagando al respecto, por los siguientes motivos: (1) al seguir existiendo dificultad en la comprensión de estas funciones es necesario proponer herramientas teóricas que se puedan usar en el diseño de actividades para el aula, de tal forma que se promueva la comprensión en los estudiantes y a su vez sirva para valorarla; (2) son escasos los trabajos que tienen como foco la comprensión de los estudiantes sobre estas funciones en nivel de bachillerato y, (3) son pocos los trabajos que abordan las funciones en conjunto priorizando la relación entre estas.

En ese sentido, una de las vías para realizar un estudio de la comprensión de los estudiantes sobre estas funciones, es desde las conexiones matemáticas (Campo-Meneses y García-García, 2020). Esto, porque se puede fomentar la conexión entre las dos funciones y al mismo tiempo las conexiones entre los objetos relacionados con cada una, lo cual es clave para la comprensión.

Como se reporta en la literatura en Educación Matemática, las conexiones tienen un papel importante en el desarrollo de la comprensión matemática de un sujeto (Mhlolo, 2012), pues se afirma que para que haya comprensión deben conectarse ideas, hechos y procedimientos y, que es necesario que los estudiantes empleen y conecten las diferentes formas de representar un objeto matemático (Hiebert y Carpenter, 1992).

Es por ello que las conexiones matemáticas han sido foco de interés de diversos investigadores en Educación Matemática (por ejemplo, Bingölbali y

Coşkun, 2016; Baki et al., 2009; Campo-Meneses y García-García, 2020; García-García y Dolores-Flores, 2020 y 2021; Dolores-Flores et al., 2019; Eli et al., 2013; Mhlolo, 2012) y son un punto clave en el currículo de diversos países como Estados Unidos (NTCM, 2013), Colombia (MEN, 1998), Turquía (Ministerio Nacional de Turquía, 2013) y Australia (ACARA, 2012), entre otros.

Las investigaciones realizadas en torno a las conexiones matemáticas se clasifican en cuatro enfoques: las que se centran en las conexiones matemáticas en general o en un concepto matemático particular (Bingölbali y Coşkun, 2016; Campo-Meneses y García-García, 2020; Dolores-Flores et al., 2019; Eli et al., 2013; Jaijan y Loipha, 2012); las que estudian las conexiones matemáticas entre diferentes representaciones semióticas (Elia et al., 2007; Moon et al., 2013); las que estudian las conexiones matemáticas que aparecen en problemas de aplicación o de modelado (Baki et al., 2009; Gainsburg, 2008) y las que estudian las creencias asociadas a las conexiones matemáticas (Ji-Eun, 2012).

De manera general, estas investigaciones reportan que las conexiones matemáticas son importantes porque (1) establecerlas contribuye a la comprensión de un concepto por parte de un sujeto, además que le permite desarrollar otras habilidades matemáticas y, (2) estudiar las conexiones matemáticas que un sujeto establece permite inferir su nivel de comprensión, lo cual es clave en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A pesar de que se afirma que es posible estudiar la comprensión matemática de un estudiante a través de las conexiones matemáticas que este realiza al resolver tareas específicas (Campo-Meneses y García-García, 2020; Mhlolo, 2012; Barmby et al., 2009), no existen trabajos que muestren cómo se hace. Por tanto, en esta investigación se emplean como referentes las conexiones matemáticas juntamente con algunos constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS a partir de ahora), con el objetivo de proponer y valorar un marco de referencia para estudiar la comprensión de los estudiantes respecto a las funciones exponencial y logarítmica.

En este sentido, esta investigación es importante porque aborda la comprensión de las funciones exponencial y logarítmica en conjunto utilizando dos referentes teóricos, se realiza teniendo en cuenta el nivel bachillerato (grado 12) y aporta un marco de referencia para estudiar la comprensión de los estudiantes sobre estas funciones a partir de las conexiones matemáticas que logran evidenciar. En este sentido, el aporte no es realizar un *networking* entre las conexiones matemáticas y el EOS, pues este ya está reportado en la literatura en Rodríguez-Nieto et al. (2021), sino que el aporte está en un marco de referencia que se propone para el estudio de la comprensión respecto a las funciones exponencial y logarítmica basado en dicho networking, lo cual no se ha hecho hasta el momento.

## Referentes Teóricos

### Conexiones matemáticas

En esta investigación, se asume el Modelo Ampliado de Conexiones Matemáticas de Businskas (2008) propuesto por García (2018) y García-García y Dolores-

Flores (2018), en el que se define las conexiones matemáticas como un proceso mediante el cual una persona establece una relación verdadera entre dos o más ideas, conceptos, definiciones o teoremas entre sí, con otras disciplinas o con la vida real, y son exteriorizadas a través de los argumentos escritos, orales o gestuales que los estudiantes evidencian en el momento en que resuelven las tareas que se les han propuesto. En este modelo se consideran las siguientes tipologías de conexiones matemáticas.

*Procedimental*: es de la forma A es un procedimiento utilizado cuando se trabaja con el objeto B. En esta se usa de manera razonable las reglas, algoritmos o fórmulas establecidas dentro de un registro semiótico. Esta conexión matemática incluye todo medio que sirva para llegar a un resultado.

*Representaciones diferentes*: es la relación entre dos registros semióticos diferentes referidos al mismo concepto matemático, pero también la relación entre dos formas distintas de representar este concepto en un mismo registro.

*Parte-todo*: se refiere a las relaciones lógicas establecidas entre conceptos matemáticos realizadas por los estudiantes. Estas pueden ser de generalización (entre casos generales y particulares) o de inclusión (un concepto matemático contenido en otro).

*Significado*: es la relación entre un concepto matemático y el sentido que los estudiantes le atribuyen en tanto lo que para ellos es (que lo hace diferente de otro) y lo que representa. Puede incluir la definición que ellos han construido para estos conceptos y su contexto de uso.

*Reversibilidad*: se refiere a las relaciones bidireccionales entre dos operadores matemáticos, es decir, se puede partir de un concepto A para llegar a B y a su vez invertir el proceso partiendo de B para regresar al A. Esto exige que los estudiantes puedan partir de un punto final y seguir el curso de un razonamiento hasta llegar a un punto inicial y viceversa.

*Característica*: es la relación establecida por los estudiantes entre un concepto matemático y sus atributos invariantes que lo distinguen de otros. También se incluyen elementos comunes entre dos o más conceptos, procedimientos o representaciones distintas.

*Implicación*: A implica B, un objeto lleva a otro de forma lógica y suelen ser de la forma *si… entonces…*.

En este enfoque se resalta, también, el término conexión matemática central, que de acuerdo con García-García y Dolores-Flores (2018), es aquella que está ligada directamente con el objeto de estudio y que su establecimiento es evidencia, de alguna manera, de la comprensión del objeto por parte del sujeto y exige a su vez, el establecimiento de las otras conexiones matemáticas. Esta conexión se caracteriza porque permite derivar otras conexiones matemáticas una vez que se ha establecido. En este estudio la conexión matemática central es la de reversibilidad, ya que se está trabajando con dos funciones que matemáticamente son inversas.

## Comprensión matemática

La comprensión se puede entender de dos formas según Godino, Batanero y Font (2007), una fijada en la mente el sujeto, donde la comprensión se interpretaría como un proceso mental y la otra centrada en la esfera pública donde ocurren los procesos de instrucción, en la que la comprensión se entiende como competencia. Nos basamos en esta última perspectiva para proponer una interpretación de la comprensión matemática en la que se tiene en cuenta el establecimiento de conexiones.

*La comprensión desde un enfoque pragmatista*

La comprensión es entendida como competencia, es decir como la capacidad que tiene el estudiante para usar el contenido matemático en diferentes prácticas. Esto implica que este es capaz de reconocer las propiedades, representaciones y características de un objeto matemático, relacionarlo con los objetos matemáticos restantes y usar este en diferentes situaciones problemáticas propuestas en el aula (Font, 2007).

Desde esta idea, Font (2007) afirma que un sujeto en un momento determinado alcanzará una comprensión parcial y no una comprensión nula o completa, en tanto que los signos que se manipulan en el aula adquieren un significado para cada estudiante de acuerdo con el contexto de uso. Esto implica que se analice la comprensión desde la actividad matemática realizada por el estudiante para resolver una tarea. Por otra parte, la actividad matemática se analiza en términos de prácticas y de objetos matemáticos que intervienen o emergen de estas prácticas y de las relaciones que el sujeto establece entre ellos.

Desde esta perspectiva comprender un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con él. Esta concepción, que se puede considerar pragmatista, nos da una perspectiva “sistémica”, ya que se considera que la comprensión de un objeto matemático es el conjunto de prácticas matemáticas en las que el uso de este objeto es determinante para su realización. En el EOS se aplica la dualidad elemental sistémica a la noción de comprensión. La mirada elemental lleva a entender la comprensión de un objeto matemático como entender su definición. Ahora bien, si nos preguntamos en qué consiste la comprensión de una definición, la respuesta desde el EOS es que, para comprender la definición, un estudiante tiene que poner en funcionamiento una trama de funciones semióticas. La mirada sistémica lleva a entender la comprensión de un objeto matemático (función exponencial y función logarítmica en este caso) como el uso que se hace de este (Godino et al., 2007).

Si entendemos la comprensión en términos de uso, diremos que una persona comprende (sabe, entiende el significado de, etc.) un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas matemáticas. A su vez, en estas prácticas matemáticas intervienen diferentes objetos primarios: problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. El conjunto de estos objetos, que un sujeto moviliza para resolver un problema específico, se le llama configuración cognitiva de objetos primarios (Pino-Fan, Godino y Font, 2018). Estos objetos se relacionan entre sí mediante funciones semióticas, las cuales se conciben, de manera metafórica, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial), un plano de contenido (objeto final) y un criterio o regla de correspondencia (Godino et al., 2007). En este sentido, el EOS también interpreta la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X en términos de las funciones semióticas que puede establecer en unas circunstancias fijadas en las que pone en juego un objeto O como expresión o contenido (Ortiz y Font, 2011).

## Comprensión y conexiones matemáticas

Como se observa en el networking realizado por Rodríguez-Nieto et al. (2021), la teoría sobre las conexiones matemáticas y el EOS se complementan para realizar un análisis detallado de las conexiones matemáticas. Entre las diferentes complementariedades que evidencian estos autores, se resalta la noción de función semiótica desde el EOS (pues es clave en la definición de comprensión) y la noción de conexiones matemáticas.

En la práctica, ambas nociones pueden ser consideradas como equivalentes, en cuanto a que se trata de una relación entre un antecedente y un consecuente. Sin embargo, la noción de función semiótica es más general y de acuerdo como se conciben las conexiones matemáticas, pueden ser consideradas como casos particulares de las funciones semióticas (Rodríguez-Nieto et al., 2021).

Para fines prácticos, en esta investigación se asume la idea de Rodríguez-Nieto et al. (2021) de que las nociones de función semiótica y conexión matemática son equivalentes, no obstante, a diferencia de las funciones semióticas, las conexiones matemáticas solo se establecen entre cuatro (procedimientos, definiciones, proposiciones y representaciones) de los seis objetos primarios, ya que las *tareas* son las que permiten la emergencia de las conexiones matemáticas y los *argumentos*, los que sustentan el establecimiento de dichas conexiones.

En este sentido, teniendo en cuenta la definición de conexiones matemáticas planteada por García-García y Dolores-Flores (2018) y la definición de comprensión desde el EOS de Ortiz y Font (2011), se puede interpretar en términos de conexiones matemáticas que, un sujeto X comprende un objeto O cuando realiza prácticas de las que emergen objetos, logra establecer la conexión central entre dichos objetos, lo cual le permite resolver las tareas propuestas consistentemente (usa el objeto de manera competente) y a su vez es capaz de justificar tal conexión (figura 1).

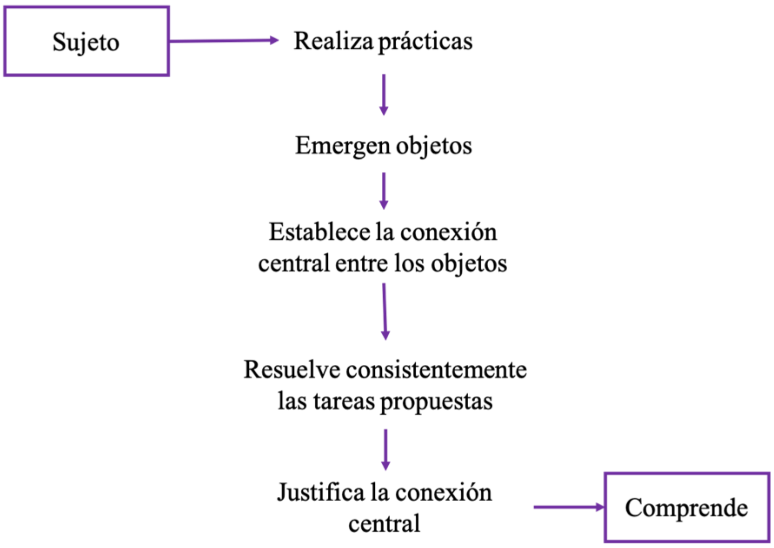



*Figura 1*. Comprensión matemática desde le EOS y las conexiones matemáticas

# METODOLOGÍA

La investigación es de carácter cualitativa, particularmente es un estudio de casos, en la que se empleó la entrevista basada en tareas (Goldin, 2000) para recolectar datos, ya que permitió la interacción entre el entrevistador y el participante a través de la formulación de preguntas que llevaron a los estudiantes a justificar las conexiones matemáticas realizadas.

## Contexto y participantes

Los cuestionarios junto con las entrevistas fueron aplicados a 10 estudiantes mexicanos que cursaban cuarto semestre de bachillerato (particularmente Cálculo Diferencial), en una preparatoria de la ciudad de Chilpancingo, Guerrero, México. Los estudiantes participaron por voluntad propia, manifestaron estar de acuerdo con que sus datos fueran usados en esta investigación, tenían una actitud positiva hacia las matemáticas y afirmaron tener un nivel bueno y regular en dicha asignatura según sus calificaciones.

Las edades de los estudiantes oscilaban entre 16 y 17 años. Se aseguró que ya hubiesen visto las funciones exponenciales y logarítmicas, teniendo en cuenta el objetivo de esta investigación. En adelante, nos referiremos a ellos como E1, E2, E3, ..., E10.

## Instrumento

El instrumento (cuestionario y protocolo de la entrevista) fue validado por expertos en conexiones matemáticas (triangulación de expertos) y mediante una prueba piloto realizada a cuatro estudiantes de bachillerato. Como resultado, se generó una segunda versión del cuestionario y el protocolo de la entrevista.

Particularmente la tarea 1 tenía como objetivo que los estudiantes establecieran conexiones matemáticas con los elementos de la función exponencial y que de alguna manera establecieran la conexión de reversibilidad entre esta función y la función logarítmica, aunque la tarea se podía resolver sin establecer esta conexión (figura 2).

1. Completa la siguiente tabla y explica la estrategia usada.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | -2 | | 0 | 1 | 2 | 3 | | 5 | | 7 | | 9 |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | | | | |

a. Encuentra una expresión matemática que relacione el término de la segunda fila con el términ de la primera fila.

b. ¿Qué términos de la primera fila se corresponde con 1024 y $\frac{1}{6384}$ de la segunda?

*Figura 2.* Tarea 1 del cuestionario

La figura 3 muestra la tarea 2, que tenía como objetivo que los estudiantes analizaran a partir de la gráfica otras representaciones de la función exponencial y establecieran conexiones entre estas, además de establecer la conexión de significado relacionado con uno de los contextos de uso de esta función, y otras de las tipologías de conexiones matemáticas. La conexión de reversibilidad entre estas funciones era necesaria aquí para responder algunos ítems.

2. Una enfermedad infecciosa comienza a esparcirse en un grupo de 10,000 estudiantes en ur Universidad. Después de $t$ días, el número de personas infectadas se modela mediante la funciór

$$v(t) = \frac{10000}{5 + 1245e^{-kt}}$$

Donde $t$ significa tiempo medido en días y $k$ una constante

a. ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente?

b. Si después de 2 días hay 54 personas infectadas (Sugerencia: con este dato puedes encontrar valor de k). Considerando el valor de k que encontraste, ¿Cuántas personas estarán infectad: en 5 días?

c. Considerando $k = 1$, la gráfica que modela el número de personas infectadas es la que : muestra enseguida. Observa la gráfica (ver Figura 2) y responde las preguntas que se plantea

- ¿En cuánto tiempo habrá 1000 personas infectadas?
- ¿Cuál es el dominio de la función v(t)? ¿Cuál es el dominio que tiene sentido en situación planteada?
- ¿Durante qué días la infección se propaga lentamente?
- ¿Durante qué días la infección se propaga con mayor rapidez?

*Figura 3.* Tarea 2 de cuestionario

En la tarea 3 (figura 4), se esperaba que los estudiantes identificaran elementos de cada función, los conectaran entre sí y a su vez establecieran la conexión de reversibilidad en los diferentes registros de representación.

3. La relación de Ehrenberg $\ln w = ln\, 2.4 + (1.84)h$ es una fórmula empírica que relaciona la altu h (en metros) con el peso promedio w (en kilogramos) para niños entre 5 y 13 años.

Si una niña de 8 años pesa 28.8 kg ¿Cuál es su estatura promedio?

a. ¿Cuál es el peso promedio de un niño de 10 años cuya altura es de 1.5 metros?

b. ¿Cuál es la función que permite conocer el peso promedio para cualquier niño cuya edad vai entre 5 y 13 años? Grafique la función.

c. ¿Cuál es la función que permite conocer la estatura promedio para cualquier niño cuya ed varía entre 5 y 13 años? Grafique la función.

*Figura 4*. Tarea 3 del cuestionario

Finalmente, la figura 5 presenta la tarea 4 que buscaba indagar principalmente sobre la conexión de significado.

4. Define qué es función exponencial y función logarítmica. ¿Existe alguna relación entre ella: ¿Cuál?

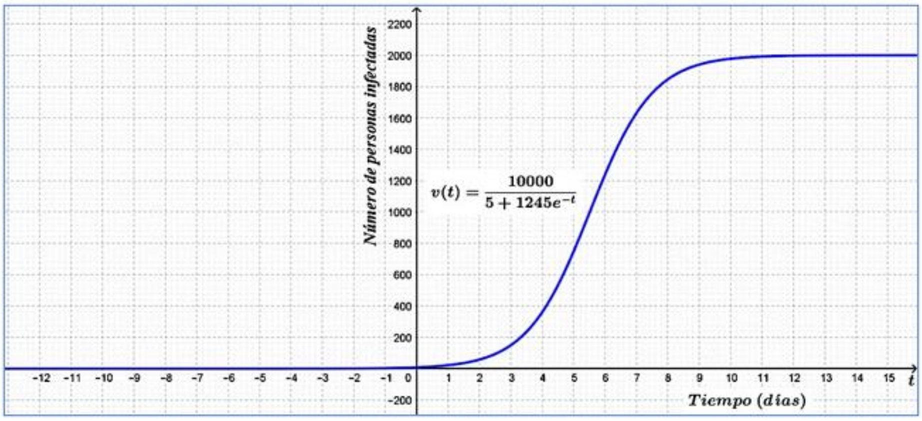



*Figura 5*. Tarea 4 del cuestionario

Para el diseño de estas tareas se tuvo en cuenta el establecimiento de la conexión central (conexión de reversibilidad), de acuerdo con la interpretación de comprensión que se propuso en los referentes teóricos. A medida que avanzan en las tareas se va exigiendo más el establecimiento de esta conexión y su debida justificación.

## ANÁLISIS DE LOS DATOS

Para analizar los datos se emplearon dos métodos de análisis: el análisis temático y el análisis ontosemiótico propuesto por el EOS. El análisis temático permitió identificar las tipologías de conexiones matemáticas que los estudiantes evidenciaron en su actividad matemática y el análisis ontosemiótico permitió visualizar la compleja trama de funciones semióticas que el estudiante debía realizar para que globalmente se pueda considerar que establece una conexión matemática.

Como se menciona en Rodríguez-Nieto et al. (2021), estos dos métodos de análisis son complementarios, pues, aunque básicamente, ambos son un tipo de análisis de contenido, el nivel de detalle es diferente en cada uno. Con el análisis temático se obtiene una lista de conexiones matemáticas que el estudiante ha establecido en la actividad matemática y con el análisis ontosemiótico, en el que se utilizan diversas herramientas (prácticas, objetos matemáticos, SF, procesos, etc.), se analiza por qué se establece (o no) una conexión matemática (identificada a través del análisis temático) y además se detalla qué objetos matemáticos específicamente han sido conectados. A continuación, se explica en qué consiste cada método de análisis y se ilustra con un ejemplo.

**Análisis temático**

El análisis temático propuesto por Clarke y Braun (2013) consta de seis fases, que se describen a continuación.

*Fase 1. Familiarización de los datos*. Consistió en la lectura detallada de las producciones verbales, escritas o gestuales de los estudiantes, con el fin de familiarizarse con el lenguaje que ellos empleaban y comprender la forma en que estaban razonando.

*Fase 2. Generación de códigos iniciales*. Para codificar la información se empleó la codificación teórica basada en el marco conceptual (tabla 1). Para ello, en las narrativas se identificaron frases o palabras que hicieran referencia a las conexiones matemáticas realizadas por los estudiantes.

Tabla 1

*Codificación de los datos en relación con las Conexiones Matemáticas*

| Extracto | Código |
|---|---|
| *Entrevistador*: Explica cómo llenaste la fila de arriba. | C1. La secuencia -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …9 va de uno en uno. |
| *E1*: Es que va de uno en uno desde -3 a 9 y nada más faltaban 4 espacios y los fui llenando como si fuera de uno en uno. | C2. La secuencia $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, …512 se forma encontrando el doble del término anterior. |
| *Entrevistador*: ¿Y la segunda? | |
| *E1*: Porque va lo doble cada vez empieza en $\frac{1}{8}$ sigue en $\frac{1}{4}$ y va la mitad aquí (señala las fracciones) y ya de aquí va lo doble, 2, 4, 8… (Escribe la relación en la hoja). | |
| *Entrevistador*: Revisa y mira qué relación hay. | C3. Las dos secuencias se relacionan mediante la expresión $2^x$. |
| *E1*: (El estudiante empieza a escribir cómo obtener los números de abajo a partir del 2, y así obtiene que 16 es $2^4$) ya encontré la relación de que este dos elevándolo al número de arriba me da el número de abajo. | |

Tabla 1

*Codificación de los datos en relación con las Conexiones Matemáticas*

| Extracto | Código |
|---|---|
| *Entrevistador*: Para encontrar el número que le corresponde a 11 en la fila de abajo ¿cómo hago? | |
| *E1*: Sería $2^{11}$. | |
| *Entrevistador*: (lee la *b*) Eso que me acabas de decir cómo se puede expresar matemáticamente. | |
| *E1*: Sería $2^{x}$. | |
| *Entrevistador*: ¿Qué sería entonces la función logarítmica? | C4. Una función logarítmica es una función que tiene $ln$ o $log$. |
| *E7*: Es cuando se le agrega *ln*, *log* y todo eso. | |

*Fase 3. Búsqueda de temas o subtemas*. Se revisaron los códigos para identificar áreas de similitud, se agruparon aquellos que tenían algún rasgo en común para formar grupos, se describieron las características particulares de cada uno y se asignó un tema o subtema a cada agrupación. Para fines de esta investigación se adoptó como convención que cada conexión matemática prevista en el marco teórico era un tema, mientras que las conexiones matemáticas específicas asociadas a las funciones exponencial y logarítmica que se construyeron con los datos se asumieron como subtemas (tabla 2).

Tabla 2

*Creación de subtemas empleando los códigos de la fase 2*

| Código | Subtemas |
|---|---|
| C1. La secuencia -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …9 va de uno en uno. | Las parejas ordenadas… $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, (0,1), (1,2), ... representan la expresión $2^{x}$. |
| C2. La secuencia $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, …512 se forma encontrando el doble del término anterior. | |
| C3. Las dos secuencias se relacionan mediante la expresión $2^{x}$. | |
| C4. Una función logarítmica es una función que tiene *ln* o *log*. | Una función logarítmica es una función que tiene *ln* o *log*. |

*Fase 4. Revisión de temas y subtemas*. Se recodificó y se descubrieron nuevos temas (tabla 3) estableciendo un límite. Para ello se realizó una lectura de los temas y subtemas establecidos y de los códigos agrupados, para analizar si el tema

propuesto era útil en relación con la pregunta de investigación, si guardaba coherencia y asegurar si la agrupación realizada era correcta.

Tabla 3
*Subtemas modificados*

| Código | Subtemas | Subtema modificado |
|---|---|---|
| C1. La secuencia -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …9 va de uno en uno.<br>C2. La secuencia $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, …512 se forma encontrando el doble del término anterior.<br>C3. Las dos secuencias se relacionan mediante la expresión $2^x$. | Las parejas ordenadas …, $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, (0, 1), (1,2), ... representan la expresión $2^x$. | La expresión $2^x$ representa a las parejas ordenadas $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$, $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, (0, 1), (1,2), …, (9, 512). |

*Fase 5. Definición y denominación de temas y subtemas*. Consistió en establecer jerarquías de acuerdo con la identificación de los datos. Para fines de la investigación los temas corresponden con las tipologías de conexiones matemáticas establecidas en el marco conceptual. En este sentido, se analizaron los subtemas y de acuerdo con la información evidenciada en cada uno se decidió qué tipo de conexión matemática se establecía (tabla 4).

Tabla 4
*Ejemplo de asociación de subtemas con los temas*

| Subtemas | Temas |
|---|---|
| La expresión $2^x$ representa a las parejas ordenadas…, $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, (0, 1), (1,2), ... | Conexión matemática parte-todo. |
| Una función logarítmica es una función que tiene $ln$ o $log$. | Conexión matemática de significado. |

*Fase 6. Redacción del informe*. Consistió en una narrativa sustentada en la comprensión e interpretación de la información recogida, que permitió la escritura de los resultados para darle respuesta a la pregunta de investigación.

**Análisis ontosemiótico**

El análisis ontosemiótico propuesto por el EOS para analizar la actividad matemática del estudiante, se realiza considerando cinco fases, las cuales se ilustran tomando como ejemplo las respuestas a la tarea 1 por parte de E1.

*Fase 1.* Se transcriben las entrevistas, se organizan las producciones escritas y se revisan.

*Fase 2.* Se hace una narrativa "matemática" temporal de la producción de cada estudiante, en la que se hallan implícitamente las prácticas matemáticas realizadas por el estudiante y los objetos primarios (llamados los personajes principales de la narrativa).

Primero se propone la tarea de completar una tabla que consta de una progresión aritmética en la primera fila y una progresión geométrica en la segunda. E1 completa la tabla y frente a esto se le pide que explique lo que ha hecho. Respecto a esta pregunta E1 explica que la primera fila va de uno en uno desde -3 a 9 y que nada más faltaban 4 espacios y los fue llenando y que la segunda va el doble cada vez, empieza en $\frac{1}{8}$ sigue en $\frac{1}{4}$ y va la mitad aquí (señala las fracciones) y ya de aquí va lo doble, 2, 4, 8…

Cuando se le pregunta que, si la expresión que encontró representa una función, E1 responde que $2^x$ es una función exponencial, y al pedirle que explique por qué es exponencial, manifiesta elementos que hacen parte de la definición…

*Fase 3.* Se identifican y se describen las prácticas registradas en la narrativa, donde las siglas P1T1 significa práctica 1 de la tarea 1 y así para las prácticas correspondientes a cada tarea.

- P1T1. Completa la tabla.
- P2T1. Explica la regla de las progresiones de la tabla.
- P3T1. Realiza operaciones aritméticas para encontrar los términos que el entrevistador le pregunta.
- P4T1. Encuentra la expresión que representa la tabla.
- P5T1. Identifica $2^x$ como un ejemplo de función exponencial.
- …

*Fase 4.* Se confecciona la configuración cognitiva (Godino et al., 2007) de objetos primarios (definiciones, representaciones, procedimientos, proposiciones y argumentos) que se activan (o emergen) en las prácticas matemáticas (ver tabla 5).

Tabla 5
*Configuración cognitiva de objetos primarios.*

| Objetos | Tarea 1 |
|---|---|
| Definiciones | D1: progresión, D2: variable, D3: potencia, D4: exponente, D5: función, D6: función exponencial. |
| Representaciones | Simbólica 1: tabla que relaciona una progresión aritmética de diferencia 1 con una progresión geométrica de razón 2.<br>Simbólica 2: $2^x$<br>Simbólica 3: $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$<br>Lenguaje natural: función exponencial |
| Procedimientos | Pr1: cálculos aritméticos para completar la tabla (suma y multiplica). |
| Proposiciones | Proposición 1: la progresión de la primera fila sigue la forma $n + 1$. |

Tabla 5
*Configuración cognitiva de objetos primarios.*

| Objetos | Tarea 1 |
|---|---|
| | Proposición 2: la progresión de la segunda fila se forma encontrando el doble del término anterior.<br>Proposición 3: las progresiones se relacionan mediante la expresión $2^x$.<br>Proposición 4: $2^x$ es una función exponencial.<br>Proposición 5: la función exponencial tiene como base un número y como exponente una literal.<br>Proposición 6: las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$ tienen como imagen a 1 cuando el valor de x es cero. |
| Argumentos | Argumento 1:<br>Tesis: proposición 4<br>Razón: proposición 5 |

*Nota*. D=definición; Pr=Procedimiento.

*Fase 5*. Se establecen las relaciones entre los objetos primarios de la configuración, analizando qué funciones semióticas se establecen entre ellos (figura 6).

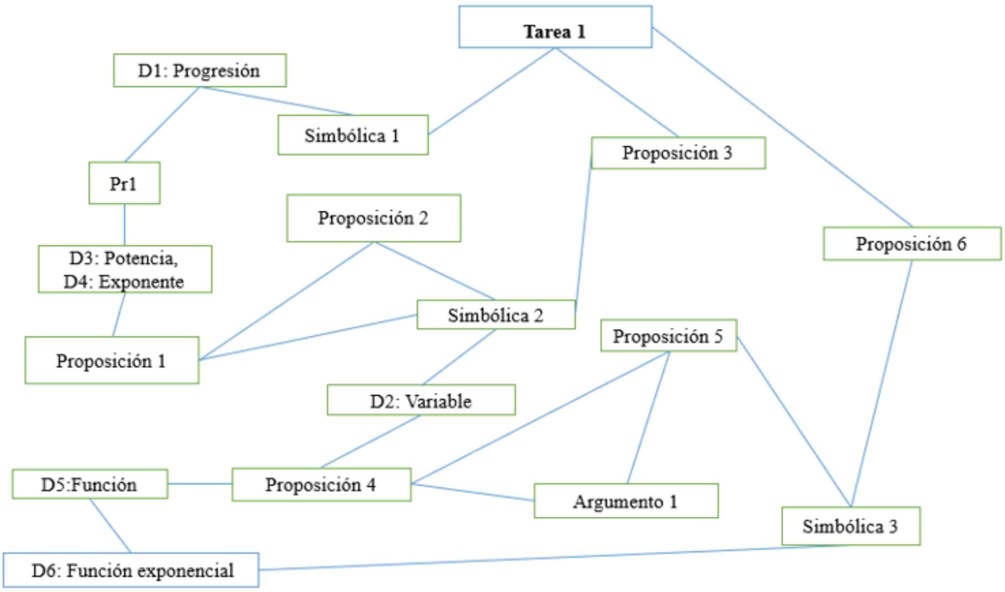



*Figura 6.* Trama de funciones semióticas de la tarea 1 por E1

Para dar lectura a figuras como esta, se debe tener en cuenta que, si las líneas que unen los rectángulos son azules y continuas, es porque las relaciones (funciones semióticas) establecidas entre los objetos son correctas. Mientras que si la línea es roja y discontinua es porque se estableció una función semiótica errónea.

# RESULTADOS

Los resultados de la presente investigación se exponen en dos momentos. Primero, se muestran las conexiones matemáticas identificadas de acuerdo con cada tarea. Para ello se tomará como base al caso E10 (para las tareas 1, 3 y 4) y E3 (para la tarea 2), ya que fueron quienes realizaron completamente esas tareas, y a partir de sus respuestas se comparan los resultados de los demás estudiantes. En un segundo momento se analiza la comprensión de los estudiantes de acuerdo con las conexiones establecidas.

## Conexiones matemáticas identificadas

A continuación, se muestra las conexiones matemáticas identificadas en cada una de las tareas.

### *Tarea 1*

Una vez realizado el análisis temático, se identificó en esta tarea el uso de las conexiones matemáticas: característica, procedimental, parte-todo y representaciones diferentes. Estas se sustentan en una trama de funciones semióticas (ver figura 7) necesarias para su establecimiento, y especificarlas permite explicar detalladamente el por qué se estableció cada conexión matemática. Estas funciones semióticas se derivan a partir del análisis ontosemiótico, que parte de una narrativa matemática hasta una configuración cognitiva de objetos primarios (ver tabla 6) y su respectiva relación mediante funciones semióticas.

Tabla 6

*Configuración cognitiva de objetos primarios de E10 respecto a la tarea 1*

| Objetos | Tarea 1 |
|---|---|
| Definiciones | D1: potenciación; D2: función. |
| Representaciones | Tabular 1: tabla que relaciona una progresión aritmética de diferencia 1 con una progresión geométrica de razón 2.<br>Simbólica 1: $f(x) = 2^x$.<br>Lenguaje natural 1: función exponencial.<br>Gráfica 1: representación gráfica de $f(x) = 2^x$. |
| Procedimiento | Pr1: cálculo mental para encontrar los términos de la tabla. |
| Proposiciones | Proposición 1: $f(x) = 2^x$ es una función exponencial.<br>Proposición 2: la función exponencial tiene la variable $x$ está en el exponente. |
| Argumentos | Argumento 1<br>Tesis: proposición 1<br>Razón: proposición 2 |

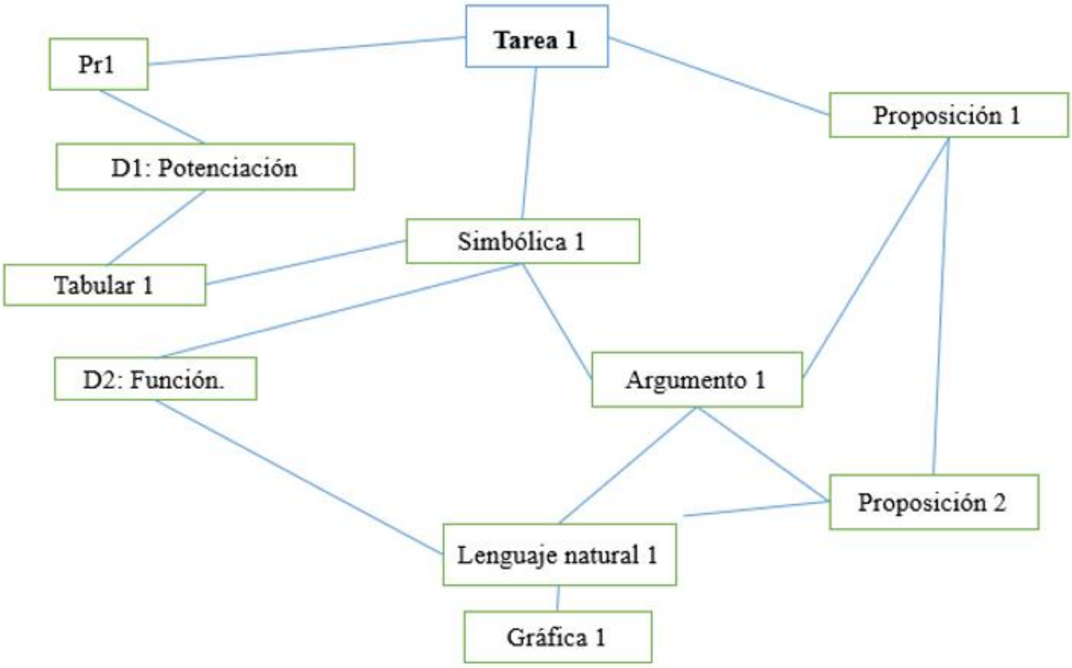



*Figura 7.* Trama de funciones semióticas de la tarea 1 por E10.

Respecto a la conexión matemática característica, los 10 estudiantes emplearon parte de la definición de la función exponencial para sustentar que la expresión encontrada era una función exponencial. Algunos cuando realizaron la gráfica esbozaron una característica sobre el acercamiento al eje $x$, como se muestra en este subtema: *la gráfica de $f(x) = 2^x$ se acerca al eje x, pero no lo toca.*

Particularmente, E1 estableció una conexión característica entre una representación simbólica y una proposición (ver figura 8). Esta conexión alude a que en las funciones de la forma $f(x) = a^x$ se cumple que $f(0) = 1$. Esto evidencia que el estudiante fue capaz de reconocer una propiedad que tienen en común las dos funciones ($f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$).

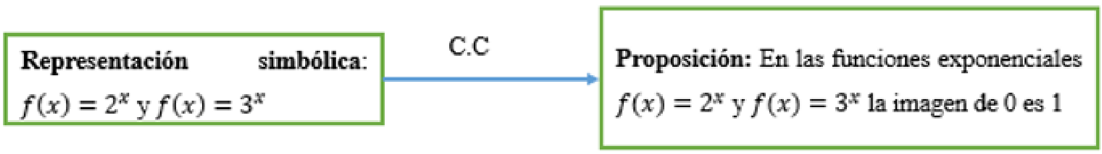



*Figura 8.* Conexión característica por E1

La conexión matemática de representaciones diferentes entre el registro simbólico y el registro lenguaje natural (extracto de E8) y entre la representación tabular 1 y la simbólica 1, fue establecida por todos los estudiantes. Para ello emplearon su conocimiento de la definición de función (definición 2 de la figura 7). Solo E4, E5, E6, E7, E8, E9 y E10 establecieron a su vez la conexión de representaciones diferentes entre una representación simbólica 1 y una gráfica 1. Esto es evidente en el siguiente extracto de E8 y la figura 9.

| | |
|---|---|
| *E8*: | La expresión sería <u>$f(x) = 2^x$ exponencial</u>. Ahora voy a poner $2^x$ y voy a sustituir el cero, el 1, el 2… y me va dando el resultado. En la siguiente sería 10. |
| *Entrevistador*: | Al colocar $f(x)$ ¿estas asumiendo que es una función? |
| *E8*: | Si es una función porque es un vínculo entre dos conjuntos y un elemento da a otro, <u>entonces esta función sería una función</u> |

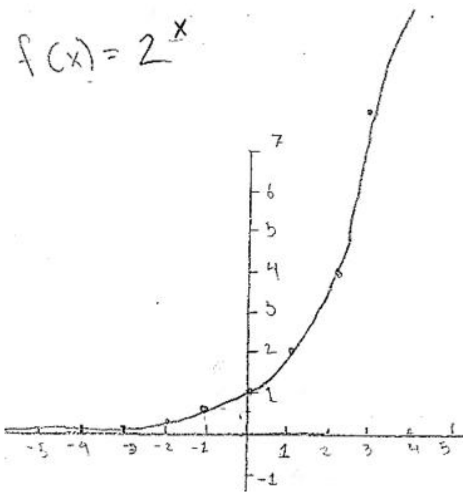



*Figura 9.* Conexión de representaciones diferentes realizada por E6 en tarea 1

La conexión procedimental fue establecida por los 10 estudiantes en el momento de completar la tabla empleando el procedimiento 1 y la definición 1. De la misma manera establecieron la conexión matemática parte-todo, usando la representación simbólica 1 y la proposición 1, pues afirmaron que la expresión encontrada era un caso particular de la familia de funciones exponenciales a través del argumento 1.

*Tarea 2*

El análisis temático mostró que algunos estudiantes establecieron las conexiones matemáticas de tipo procedimental, de reversibilidad, característica y parte-todo en el desarrollo de los incisos de esta tarea. La trama de funciones semióticas (de acuerdo con la Tabla 7) que sustenta estas conexiones se muestran en la figura 10.

Tabla 7

*Objetos primarios identificados en las producciones de E3 respecto a la tarea 2*

| Objetos | Tarea 2 |
|---|---|
| Representaciones | Gráfica 1: parte de la gráfica de la función $$v(t) = \frac{10000}{5 + 1245e^{-kt}}$$ Gráfica 2: gráfica extendida.<br>Simbólica 1: $v(t) = \frac{10000}{5+1245e^{-kt}}$<br>Simbólica 2: $f(x) = \ln x$.<br>Simbólica 3$f(x) = e^x$. |

Tabla 7
*Objetos primarios identificados en las producciones de E3 respecto a la tarea 2*

| Objetos | Tarea 2 |
|---|---|
| Procedimientos | Pr 1: procedimiento algebraico para encontrar $v(t)$ para $t = 0$.<br>Pr 2: procedimiento algebraico para encontrar $k$.<br>Pr 3: procedimiento algebraico para encontrar v(t) para $t = 5$.<br>Pr 4: procedimiento visual para encontrar $t$.<br>Pr 5: procedimiento visual para encontrar el dominio de la función $v(t)$. |
| Proposiciones | Proposición 1: la infección empieza a propagarse con un tiempo inicial de cero.<br>Proposición 2: inicialmente hay 8 personas infectadas.<br>Proposición 3: $f(x) = \ln x$ es la inversa de $f(x) = e^x$.<br>Proposición 4: en 5 días hay aproximadamente 700 personas infectados.<br>Proposición 5: cuando hay 1000 personas infectadas han pasado aproximadamente 6 días.<br>Proposición 6: el dominio de la función $v(t)$es $(-\infty, \infty)$ y el que tiene sentido es $[0, \infty)$.<br>Proposición 7: del día 4 al 8 la enfermedad aumenta y a partir del 9 se mantiene constante. |
| Argumentos | Argumento 1<br>Tesis: proposición 5<br>Razón: procedimiento 4<br>Argumento 2<br>Tesis: proposición 6<br>Razón: procedimiento 5 |

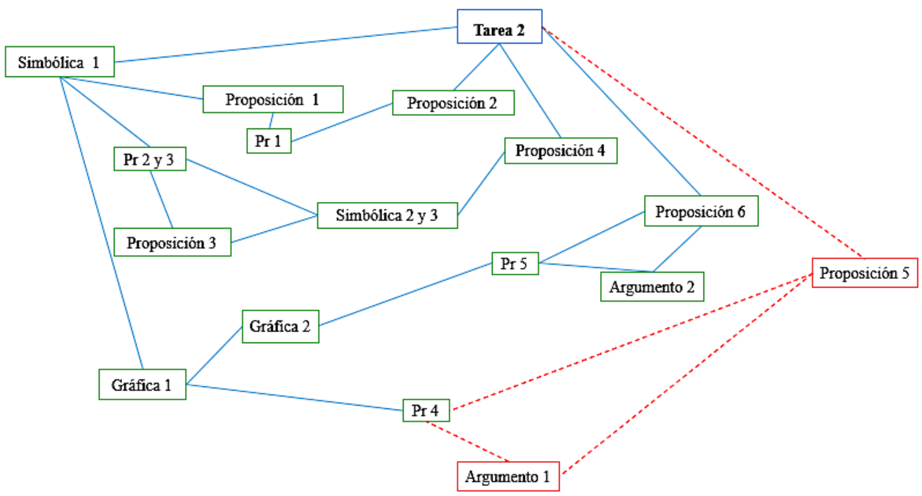



*Figura 10*. Trama de funciones semióticas de la tarea 2 por E3

El análisis ontosemiótico mostró que en el inciso $a$, E2, E3, E4, E5, E6, E8 y E10 reconocieron las condiciones planteadas. De esta manera, identificaron cuál era la variable por reemplazar y evaluaron la función para $t = 0$ consistentemente (ver figura 11). Por su parte, E1, E7 y E9, de acuerdo con el análisis temático, no establecieron la conexión matemática procedimental dado que tuvieron dificultad en la proposición 1, al reconocer qué significaba la palabra “inicialmente” en la tarea.

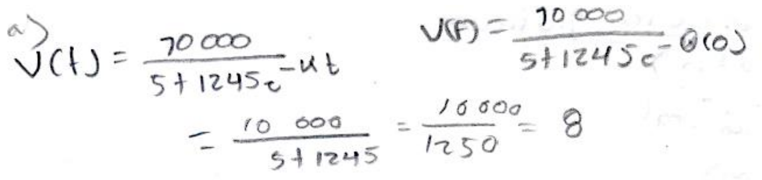


*Figura 11*. Respuesta de E8 al inciso *a* de la tarea 2.

El inciso $b$ fue resuelto solo por E3 quien evidenció haber establecido la conexión matemática procedimental y de reversibilidad (figura 12) que es considerada una condición necesaria ( $\ln(e^t) = t$ ) para establecer la primera (conexión procedimental).

En el inciso $c$ todos los estudiantes lograron establecer la conexión matemática característica, al reconocer una relación entre la función (simbólica 1) y los intervalos del dominio y el rango a través de la información que proporcionaba la representación gráfica de dicha función, como se muestra en la figura 13. Esto a su vez exigía realizar las conexiones parte-todo y procedimental.

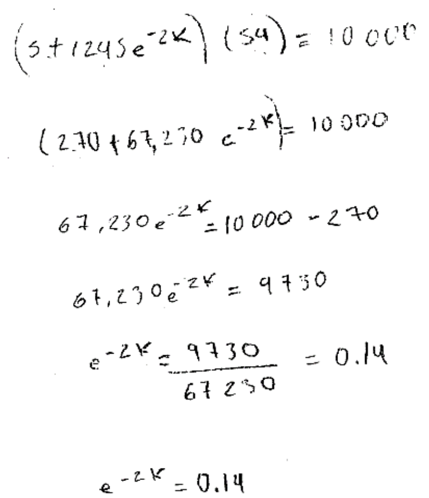


*Figura 12.* Respuesta de E3 al inciso *b* de la tarea 2

Sin embargo, E10 no tuvo en cuenta que el tiempo es continuo, respondiendo parte del inciso $c$ de manera inconsistentemente (representado con una línea discontinua en la figura 10). El estudiante E3 falló en el establecimiento de la conexión característica, ya que al no realizar bien el procedimiento 4 no logró establecer la proposición 5 y el argumento 1, pues para responder este inciso solo tomó en cuenta los números enteros para hablar de días, dejando de lado el significado de números decimales en la magnitud tiempo.

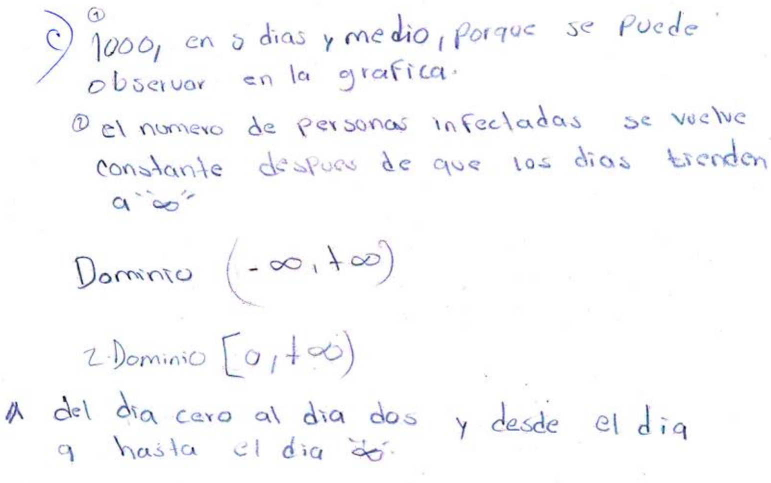

c) ① 1000, en 5 dias y medio, porque se puede observar en la grafica.
① el numero de personas infectadas se vuelve constante despues de que los dias tienden a "∞"
Dominio $(-\infty, +\infty)$
2. Dominio $[0, +\infty)$
A del dia cero al dia dos y desde el dia 9 hasta el dia ∞.

*Figura 13.* Respuesta de E4 al inciso *c* de la tarea 2

*Tarea 3*

El análisis temático indicó que en esta tarea se identificaron las conexiones matemáticas de tipo: procedimental, parte-todo, representaciones diferentes, implicación, característica y de reversibilidad. Las funciones semióticas que las sustentan se distribuyeron en cuatro (una trama para cada inciso), ya que hacer una sola trama implicaba una figura muy densa y de difícil lectura. En este sentido, se muestra la configuración cognitiva de objetos primarios (tabla 8) y la trama de funciones semióticas (figura 14) correspondiente para el inciso *a* y se describe de manera general algunos resultados de los otros incisos.

Tabla 8

*Objetos primarios identificados en las producciones de E10 respecto a la tarea 3*

| Objetos | Tarea 3. Inciso *a*. |
|---|---|
| Definiciones | D1: Fórmula, D2: Magnitudes D3: Parámetro, D4: Variable, D5: Logaritmo, D6: Ecuación de primer grado. |
| Representaciones | Simbólica 1: La relación de Ehrenberg $\ln w = ln\, 2.4 + (1.84)h$.<br>Simbólica 2: $h$ como altura y $w$ como peso.<br>Simbólica 3: $ln 28.8 = ln 2.4 + 1.84h$.<br>Simbólica 4: $3.360 = 0.875 + 1.84h$.<br>Simbólica 5: expresiones equivalentes a la Simbólica 4 obtenidas por transposición de términos. |
| Procedimientos | Pr1: Evalúa variables.<br>Pr2: Calcula logaritmos (con calculadora).<br>Pr3: Resolver ecuaciones de primer grado por transposición de términos. |

Tabla 8

*Objetos primarios identificados en las producciones de E10 respecto a la tarea 3*

| Objetos | Tarea 3. Inciso *a*. |
|---|---|
| Proposiciones | Proposición 1: la estatura promedio de una niña de 8 años que pesa 28,8 kg es 1m 35 cm. |
| Argumentos | Argumento 1:<br>Tesis: Proposición 1<br>Razón: procedimiento 3 |

El análisis temático mostró que en el inciso *a* de la tarea 3, E3, E5, E6 y E10 establecieron la conexión procedimental, reconociendo la expresión simbólica 1 como una fórmula en la que hay parámetros y magnitudes variables (siendo el ln 28.8 un parámetro y $h$ y $w$ la representación de las magnitudes estatura y peso). El procedimiento 1 les permitió evaluar la expresión simbólica 1 para el valor $w = 28.8$ y así obtener la expresión simbólica 4, a la cual le aplicaron el procedimiento 3 obteniendo el valor de la estatura (proposición 1), que fue la respuesta al inciso *a*. Particularmente E10, ante la pregunta del entrevistador, justificó que obtuvo el resultado de este inciso aplicando los procedimientos 1, 2 y 3, sin embargo, estableció una FS de tipo extensivo/intensivo errónea, ya que reconoció la expresión simbólica 3 como una ecuación logarítmica (representada con una línea discontinua en la figura 14).

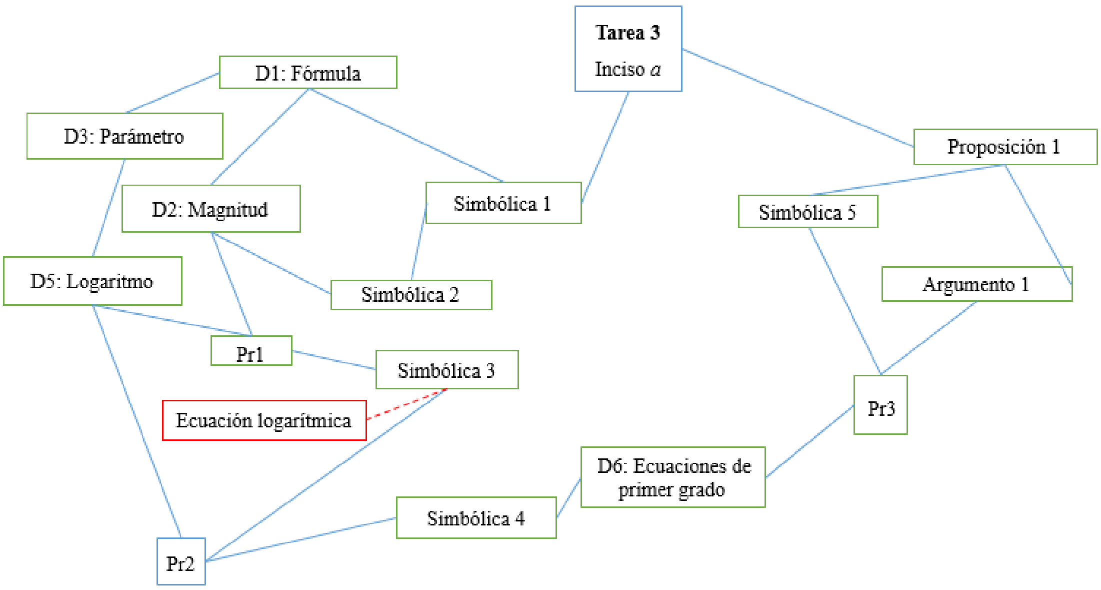



*Figura 14*. Trama de funciones semióticas para el inciso *a* de la tarea 3 por E10

Por su parte, E1 y E4 no pudieron obtener la expresión simbólica 5 porque cometieron errores en la transposición de términos que permitía obtener ecuaciones equivalentes a la expresión simbólica 4. E9 no aplicó bien la jerarquía de operaciones en la expresión simbólica 4 (figura 15). Error también cometido por E8, pero en la expresión simbólica 3, así como no poder definir lo que era un logaritmo. En cambio, a E2 y E7 les falló el establecimiento de toda la trama de funciones semióticas.

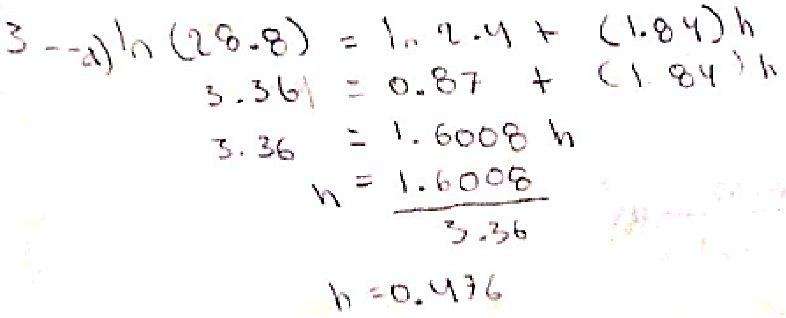
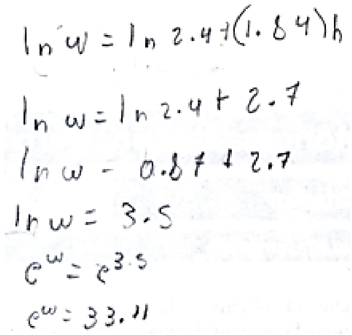
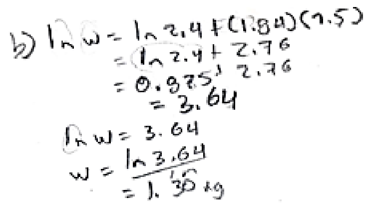



*Figura 15.* Respuesta de E9 al inciso *a* de la tarea 3

En el inciso *b*, establecer la relación de reversibilidad era una condición necesaria para usar la conexión procedimental. Solo 3 de los 10 estudiantes (E3, E4 y E10) establecieron esta última y la conexión de reversibilidad en el registro simbólico ($e^{\ln w} = w$). Los demás estudiantes presentaron dificultad para establecer estas conexiones y responder la pregunta. Por ejemplo, E1, aunque manifestó el uso de la exponencial como proceso inverso del logaritmo, no empleó bien tal condición para resolver ecuaciones logarítmicas, pues eleva *e* a los términos de la ecuación, pero obvia el *ln*, con lo que confunde la potencia con el exponente (ver figura 16). E8 por su parte, cometió errores para resolver la ecuación pues no empleó consistentemente la relación de reversibilidad entre potencia y logaritmo (ver figura 16).




Respuesta de E1 al inciso *b*




Respuesta de E8 al inciso *b*

*Figura 16.* Respuesta de E1 y E8 al inciso *b* de la tarea 3

Las personas E6 y E9 tampoco mostraron evidencias de la conexión de reversibilidad, ya que solo llegaron hasta la expresión simbólica 7. Luego, E6 y E9 se limitaron a hacer los cuatro primeros pasos de la respuesta de E1. Y, E2, E5 y E7 no respondieron el inciso *b* y manifestaron no tener conocimiento sobre cómo despejar una variable que se encontraba en el argumento de un logaritmo. En el inciso *c*, el análisis temático arrojó como resultado que E3, E4 y E10 lograron establecer las conexiones matemáticas de tipo procedimental (para encontrar la expresión simbólica de la función, el dominio y rango y para hacer la gráfica);

parte-todo (cuando asumieron que la función que modela el peso es exponencial); de reversibilidad ($e^{\ln w} = w$); característica (cuando establecieron el dominio y rango) y representaciones diferentes (relaciones entre la expresión simbólica, lenguaje natural y gráfica de la función que modela el peso). Los estudiantes E2, E5, E6, E7, E8 y E9 fallan en toda la trama correspondiente a este inciso, ya que el proceso que se debía realizar en este inciso era similar al inciso *b* (que tampoco lo habían resuelto). Particularmente, E1 falló en la generalización del procedimiento empleado en el inciso *b*, pues aplicó la propiedad de que la imagen de la suma es la suma de imágenes en lugar del producto (figura 17), lo cual le impidió encontrar la expresión simbólica esperada.

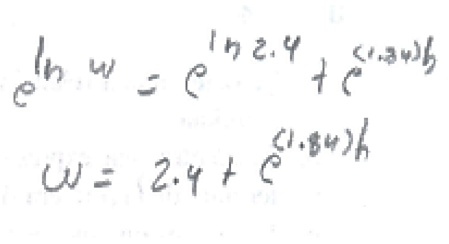



*Figura 17.* Respuesta de E1 al inciso *c* de la tarea 3

En el inciso *d*, E10, E3 y E4 lo respondieron correctamente estableciendo las conexiones procedimental (para encontrar la expresión simbólica de la función, el dominio y rango y al hacer la gráfica); parte-todo (cuando asumieron que la función que permite hallar la altura en función del peso es logarítmica); de reversibilidad (entre las gráficas, dominios y rangos); característica (cuando establecieron el dominio y rango); representaciones diferentes (relaciones entre la expresión simbólica, lenguaje natural y gráfica de la función que modela la estatura promedio) e implicación (relación de la condición de inversas con el dominio y rango y con la representación gráfica).

*Tarea 4*

El análisis temático mostró que, de manera general, en esta tarea se establecieron las conexiones matemáticas de significado, reversibilidad, representaciones diferentes y parte-todo. Estas conexiones se sustentan con la trama de funciones semióticas (figura 18) que se realizó teniendo en cuenta la configuración cognitiva de objetos primarios de la tabla 9.

Tabla 9

*Configuración cognitiva de objetos primarios de E10 respecto a la tarea 4*

| Objetos | Tarea 4 |
|---|---|
| Representaciones | Lenguaje natural 1: Función exponencial.<br>Simbólica 1: $a^x$<br>Simbólica 2: $5^x$ |
| Definiciones | D1: Función. |

Tabla 9

*Configuración cognitiva de objetos primarios de E10 respecto a la tarea 4*

| Objetos | Tarea 4 |
| --- | --- |
| | La función exponencial es aquella en la que la variable independiente esté en el exponente. Su forma general es $a^x$, donde a es mayor a cero y diferente de 1.<br>D2: Función exponencial.<br>La función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.<br>D3: Función logarítmica.<br>La función logarítmica es una función que tiene la variable independiente dentro del logaritmo. |
| Proposiciones | Proposición 1: $5^x$ es un ejemplo de la función exponencial.<br>Proposición 2: La función exponencial y logarítmica son inversas. |
| Argumentos | Argumento 1:<br>Tesis: proposición 1<br>Razón: Tiene la forma de la simbólica 1. |

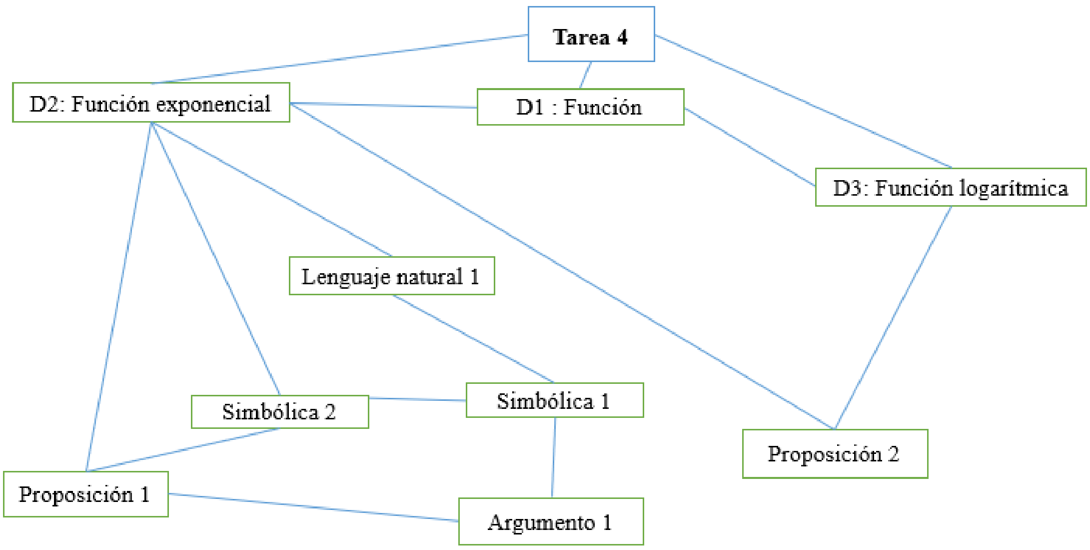



*Figura 18.* Trama de funciones semióticas en la tarea 4 por E10

Los estudiantes E1, E3, E4, E5, E6, E8, y E10 establecieron la conexión de significado respecto a la función exponencial (ver como ejemplo el extracto de E8). Para ello definieron qué es una función, establecieron la conexión parte-todo al proponer un ejemplo de una función exponencial y argumentar por qué dicha expresión es un caso particular de la familia de funciones exponenciales. Además, E1, E3, E4, E5, E6, E8, y E10 establecieron la conexión representaciones diferentes entre una representación simbólica y otra de lenguaje natural respecto a la función exponencial. Los demás estudiantes no establecieron tal conexión, ya que algunos no pudieron expresar la definición de la función exponencial pues dejaron de lado las características que identifican a una función como exponencial.

| | |
|---|---|
| *Entrevistador:* | ¿Para ti qué es la función exponencial? |
| *E8:* | Para mí es, más que nada exponencial se refiere a un adjetivo que va incrementando y una función es un vínculo entre dos elementos que le pertenece uno y otro, entonces función exponencial está vinculada para fenómenos que van incrementando muy rápido con el tiempo, se aplica en fenómenos como en la magnitud de un terremoto, el crecimiento de poblaciones y bacterias, también las mezclas y concentraciones químicas, se emplean mucho en economía, física y química. |

La conexión de significado respecto a la función logarítmica es establecida por E3, E4, E6 y E10. Ellos reconocieron la definición de función como una condición inicial y posterior a ello exponen la de función logarítmica. Los que no establecieron esta conexión, manifestaron no tener conocimiento de esta o bien no expusieron las características esenciales de una función exponencial. E1, E3, E4, E5, E8 y E10 establecieron la conexión de reversibilidad entre las dos funciones de manera verbal, pues afirmaron que las funciones se relacionaban porque son funciones inversas, como se muestra en el siguiente extracto de E3.

| | |
|---|---|
| *Entrevistador*: | ¿Crees que existe alguna relación entre las funciones exponencial y logarítmica? |
| *E3*: | Sí, que sería lo contrario a cada una de ellas. Que la exponencial si no se puede obtener un valor se usa la logarítmica. <u>Las funciones son inversas.</u> |

**Descripción de la comprensión matemática de los estudiantes**

De acuerdo con Font (2007), la comprensión de un sujeto en determinada situación será parcial. Esto implica que la comprensión de los estudiantes es distinta según cada caso, que va a depender de las tareas que resuelva, los objetos que emplee, las conexiones matemáticas que realice entre ellos y la justificación de dichas conexiones. Teniendo en cuenta esto y el contraste entre las configuraciones cognitivas y las conexiones realizadas por cada estudiante, se han clasificado los resultados en 4 grupos.

*Grupo 1*. Estudiantes que no evidencian comprensión de las funciones exponencial y logarítmica. En este grupo se ubican los estudiantes E2 y E7 porque no realizaron la conexión de reversibilidad y presentaron dificultad para establecer las demás conexiones matemáticas.

De manera particular, solo resolvieron correctamente la tarea 1, y aunque hicieron la conexión parte-todo al manifestar que la expresión encontrada es una función exponencial, carecieron de elementos para justificarla. La conexión característica emergió solo cuando describieron, en la tarea 2, el comportamiento de una función dada su gráfica, pero no se establecieron con las propiedades, pues ambos manifestaron no tener conocimiento al respecto. La conexión de significado establecida se evidenció solo respecto a la función exponencial, ya que en la función logarítmica no reconocieron (como condición esencial) que la variable independiente debía estar en el argumento.

*Grupo 2.* Estudiantes que muestran una comprensión únicamente de una de las dos funciones (exponencial o logarítmica). A este grupo pertenecen aquellos estudiantes que resolvieron las tareas (relacionada con una de las dos funciones) y establecieron sus respectivas conexiones matemáticas de manera competente, como lo son E8 y E9, quienes las realizaron solo con la función exponencial. Resolvieron la tarea 1 estableciendo las conexiones parte-todo, de significado y de representaciones diferentes.

Particularmente, establecen esta última conexión entre la representación simbólica y la representación gráfica. El estudiante E8 evidenció una mejor comprensión de la función exponencial que E9 porque realizó la conexión característica relacionando la gráfica con las propiedades de concavidad e identificación de asíntotas de la función. Además, estableció la conexión de significado entre la representación lenguaje natural y la definición. Mientras que E9 estableció una conexión de significado, pero no caracterizó los parámetros de la función. Además, E8 estableció la conexión de implicación y de reversibilidad, pero solo lo manifestó (la establece entre proposiciones) sin usarla de manera competente para resolver las tareas.

*Grupo 3.* Estudiantes que mostraron una comprensión regular sobre ambas funciones. En este grupo están aquellos que resolvieron las tareas que no implicaron el establecimiento de la conexión de reversibilidad (conexión central), pero sí establecieron las otras conexiones. Este es el caso de E1, E5 y E6, quienes resolvieron en su mayoría las tareas propuestas, estableciendo las conexiones de parte-todo entre representaciones simbólicas y la familia de las funciones exponencial y logarítmica. Establecieron la conexión de representaciones diferentes entre el registro tabular-simbólico, simbólico-lenguaje natural, simbólico-gráfico y tabular-gráfico.

La conexión característica se evidenció solo en el momento en que los estudiantes mencionaron propiedades de la representación gráfica de las funciones respecto al comportamiento, particularmente en la tarea 2.

La conexión de significado se evidenció en las respuestas de cada estudiante e incluso proporcionaron ejemplos, y particularmente E6 definió la función logarítmica como la inversa de la exponencial.

La conexión procedimental fue realizada por los tres estudiantes de manera visual en el registro gráfico (cuando emplearon la gráfica como un procedimiento para encontrar el dominio y el rango, o inclusive puntos particulares de la función) y en algunos casos en el registro algebraico, pues algunos (E5 y E6) no aplicaron la condición de ser inversas para resolver una ecuación logarítmica.

*Grupo 4.* Estudiantes que evidenciaron una comprensión elemental. En este grupo se encuentran los estudiantes que resolvieron las tareas y establecieron de manera competente seis tipologías de conexiones matemáticas, aunque la conexión de reversibilidad solo apareció entre proposiciones y en algunos casos entre representaciones (gráficas, lenguaje natural) y la conexión de implicación. Este es el caso de E3, E4 y E10, quienes establecieron la conexión de reversibilidad entre las dos funciones, particularmente entre proposiciones, procedimientos y entre representaciones (gráficas, lenguaje natural) y las justificaron. Esto ayudó a que los estudiantes lograran establecer las demás conexiones matemáticas.

## Discusión y conclusiones

El análisis de los datos nos permitió identificar las diferentes conexiones matemáticas establecidas por los estudiantes, donde de manera general algunos de ellos establecieron las siete tipologías descritas en el marco conceptual. Resultado consistente con aquellas investigaciones que han reportado estas conexiones matemáticas tanto en la práctica del profesor como por los estudiantes de distintos niveles educativos al resolver tareas específicas (García-García y Dolores-Flores, 2018, 2020 y 2021; Evitts, 2004; Businskas, 2008 y Eli et al., 2011, 2013).

Nuestros resultados indicaron que hubo dificultad para establecer la conexión de reversibilidad (conexión central), lo cual también fue reportado por Campo-Meneses y García-García (2020) y, desde otro enfoque teórico, por Weber (2002).

En cuanto a la comprensión matemática, la información fue organizada en cuatro grupos, que podrían ser considerados para indagar sobre niveles de comprensión de un sujeto respecto a la función exponencial y logarítmica desde el enfoque de conexiones matemáticas. Si bien, solo se encontraron cuatro grupos, se considera que habría un quinto grupo, donde se ubicarían aquellos estudiantes que hipotéticamente logren establecer de manera competente todas las conexiones matemáticas que les permite resolver todas las tareas y justificar la conexión central.

En este sentido, consideramos que estos grupos se pueden traducir como niveles de comprensión sobre la función exponencial y logarítmica, basados en conexiones matemáticas evidenciadas en la actividad matemática del estudiante. Así, un estudiante tendrá un nivel de comprensión deseado si alcanza el nivel 4 y estará en un nivel de comprensión muy bajo si alcanza un nivel 0. Las características propuestas por cada nivel se registran en la tabla 10.

De acuerdo con el objetivo de la investigación, consideramos que tanto la definición de comprensión (planteada en los referentes teóricos) como los niveles de comprensión propuestos (tabla 10), son un marco de referencia para estudiar la comprensión matemática de los estudiantes. Así, teniendo en cuenta los niveles descritos en la tabla 10, la comprensión de los 10 estudiantes estaría valorada en diferentes niveles: dos estudiantes (E2 y E7) en nivel 0, otros dos estudiantes (E8 y E9) en nivel 1, tres estudiantes (E1, E5 y E6) en nivel 2, tres estudiantes (E3, E4 y E10) en el nivel 3 y ninguno en el nivel 4.

Tabla 10
*Niveles de comprensión a partir de las Conexiones Matemáticas realizadas por un estudiante1.*

| Nivel | Descripción |
|---|---|
| 0 | El estudiante no resuelve las tareas y no establece conexiones matemáticas. |
| 1 | El estudiante resuelve las tareas (relacionada con una de las dos funciones) y establece sus respectivas conexiones matemáticas de manera competente. |
| 2 | El estudiante resuelve las tareas que no implican el establecimiento de la conexión de reversibilidad (conexión central) y establece las conexiones matemáticas: parte-todo, característica, significado, representaciones diferentes y procedimental. |
| 3 | El estudiante resuelve las tareas y establece de manera competente las conexiones matemáticas: parte-todo, característica, significado, representaciones diferentes, procedimental e implicación. Además, establece la conexión de reversibilidad, pero solo entre proposiciones y en algunos casos entre representaciones (gráficas, lenguaje natural). |
| 4 | El estudiante resuelve todas las tareas, establece de manera competente todas las conexiones matemáticas y justifica la conexión central. |

Este resultado indica que los estudiantes participantes en esta investigación tienen dificultad para alcanzar niveles altos de comprensión, tal como también lo reportan Ferrari-Escolá et al. (2016) y Trejo y Ferrari (2018), aunque desde otra perspectiva teórica.

Ahora bien, el hecho de combinar la teoría sobre conexiones matemáticas y el EOS para abordar la comprensión matemática, fue importante, porque son teorías que se complementan (Rodríguez-Nieto et al., 2021). Además, solo con la teoría sobre conexiones matemáticas no bastaba para abordar la comprensión, era necesario emplear otras herramientas que permitieran un análisis detallado de la práctica matemática del estudiante para ahondar en cada conexión matemática.

Como se observa, los objetos matemáticos del EOS aparecen de manera implícita en la definición de conexiones y las diferentes tipologías existentes. En ese sentido, consideramos que definir estas tipologías en términos de dichos objetos podría contribuir a tener definiciones un poco más precisas. Esto puede ser estudiado y matizado en futuras investigaciones.

1 Para crear esta tabla se llevaron a cabo dos mecanismos de validación: validación por expertos (profesores-investigadores con experiencia en conexiones matemáticas y el EOS) y una prueba piloto.

Finalmente, consideramos que este trabajo aporta en dos sentidos a la Educación Matemática. Por un lado, un aporte teórico con la propuesta de un marco de referencia para estudiar la comprensión matemática (basado en el *networking* realizado por Rodríguez-Nieto et al. (2021)), que abre un nuevo enfoque (comprensión matemática a través de las conexiones matemáticas) en la línea de conexiones matemáticas.

Por el otro, tiene un aporte práctico en tanto que los resultados reportados —marco de referencia, los resultados de los estudiantes evidenciados en las tareas y las tareas mismas— pueden ser útiles para diseñar un experimento de enseñanza a fin de desarrollar en los estudiantes la comprensión matemática sobre las funciones objeto de estudio. Asimismo, los resultados invitan a seguir investigando en esta línea para contribuir con la agenda de investigación del enfoque de conexiones matemáticas.

## Referencias

Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority (ACARA) (2012). *Australian Curriculum: Mathematics*. Australia. Recuperado de http://www.australiancurriculum.edu.au/Mathematics/Rationale

Baki, A., Çatlıoğlu, H., Coştu, S. y Birgin, O. (2009). Conceptions of high school students about mathematics connections to the real-life. *Procedia Social and Behavioral Sciences, I*, 1401-1407. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2009.01.247

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. y Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217–241. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9145-1

Bingölbali, E. y Coşkun, M. (2016). A Proposed Conceptual Framework for Enhancing the use of Making Connections Skill in Mathematics Teaching. *Education and Science, 41*(183), 233-249.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. (Tesis doctoral no publicada). Simon Fraser University. Canadá.

Campo-Meneses, K. y García-García, J. (2020. Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. *Educación Matemática 32*(3), 209–40. http://doi.org/10.24844/EM3203.08

Castro, M., González, M., Flores, S., Ramírez, O., Cruz, M. y Fuentes, M. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I. *Entreciencias: Diálogos en la Sociedad del Conocimiento, 5*(13), 1-12. DOI: http://dx.doi.org/10.21933/J.EDSC.2017.13.218

Clarke, V. y Braun, V. (2013). Teaching thematic analysis: Overcoming challenges and developing strategies for effective learning. *The Psychologist, 26*(2), 120–123.

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I. y García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 369-389. http://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050
Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. y Lee, C. W. (2013). Mathematical connection and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics*, *113*(3), 120-134. https://doi.org/10.1111/ssm.12009
Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A. y Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*, 533–556. https://doi.org/10.1007/s10763-006-9054-7
Ellis, A., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. y Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151–181. http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090
Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula*. (Unpublished dissertation). Pennsylvania State University College of Education, EE. UU.
Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G. y Méndez-Guevara, M. (2016). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *Journal of Mathematical Behavior*, *42*(2016), 92–108. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.003
Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, *19*(2), 95-128.
Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal Mathematics Teacher Education*, *11*(2008), 199–219. http://doi.org/10.1007/s10857-007-9070-8
García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario*. [Tesis de doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México]. https://www.researchgate.net/profile/Javier_Garcia-Garcia4
García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227-252. http://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994
García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2020). Exploring pre-university students´ mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-25. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429
García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2021). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and

antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 1–22. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gruver, J. (2018). A trajectory for developing conceptual understanding of logarithmic relationships. *Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 1–22. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.003

Hiebert, J., y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 65–97). Macmillan Publishing Co, Inc.

Jaijan, W. y Loipha, S. (2012). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach. *HRD Journal*, *3*(1), 91–100.

Ji-Eun L. (2012). Prospective elementary teachers' perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Journal Mathematics Teacher Education*, *15*(2012), 429–452. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9220-5

Kuper, E. y Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior*, *57* 100740, 1-18. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive Level: A Tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 176-191. https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740738

Ministry of National Education. (2013). *Secondary level mathematics curriculum: Grades 9–12*. Ankara: Directorate of State Books.

Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B. y Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers 'understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(3), 201–227. https://doi.org/10.1080/10986065.2013.794322

NCTM. (2013). *Connecting the NCTM process standards and the CCSSM practices*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Ortiz, J. y Font, V. (2011). Significados personales de los futuros profesores de educación primaria sobre la media aritmética. *Educación Matemática*, *23*(2), 91-109.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative". *Journal of Mathematics Teacher Education 21*(1), 63–94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Rodríguez-Nieto, C., Font, V., Borgi, V. y Rodríguez-Vásquez, F. (2021). Mathematical connections from a networking theory between extended theory of Mathematical Connections and Onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 1-27. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Sureda, P., y Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática*, *25*(2), 89-118.

Trejo, M. y Ferrari, M. (2018). Desarrollo del Razonamiento Covariacional en Estudiantes de Nivel Medio Superior. El caso de la función exponencial. *Innovación e Investigación en Matemática Educativa*, *3*(1), 35-58.

Weber, K. (2002). Students' Understanding of Exponential and Logarithmic Functions. En D. Quinney (Ed.), *Proceedings of the 2nd international Conference on the Teaching of Mathematics* (pp. 1-7). John Wiley y Sons.

Karen Gisel Campo-Meneses
Universidad Autónoma de Guerrero
karencampo@uagro.mx

Javier García-García
Universidad Autónoma de Guerrero
jagarcia@uagro.mx

Recibido: 19/08/2020. Aceptado: 15/06/2021
doi: 10.30827/pna.v16i1.15817



ISSN: 1887-3987