



ALEXANDRIA

ALEXANDRIA

Revista de Educação em Ciência e Tecnologia

Recursos Semióticos em Atividades de Modelagem Matemática e o Contexto On-line

Semiotic Resources in Mathematical Modeling Activities and the Online Context

Lourdes M. Werle de Almeida^a; Élide Maiara V. de Castro^a; Maria Helena S. da Silva^a

^a Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil – lourdes@uel.br; elidamaiara.vc@gmail.com; maria.helenass@uel.br

Palavras-chave:

Modelagem matemática.
Recursos semióticos.
Contexto on-line.

Resumo: Neste artigo apresenta-se uma investigação relativa aos recursos semióticos ativados em atividades de modelagem matemática e seu papel no desenvolvimento dessas atividades quando esse se dá em um contexto *online*. O quadro teórico a partir do qual a análise foi realizada inclui a Modelagem Matemática na Educação Matemática e Semiótica como ciência dos signos. Uma pesquisa empírica em que alunos de uma disciplina de um programa de pós-graduação na área de Educação Matemática desenvolveram atividades de modelagem subsidia as análises com características de uma pesquisa qualitativa e alinhadas com um estudo de caso. Os resultados indicam que, no caso da atividade desenvolvida totalmente em contexto não presencial, emerge um sistema semiótico ainda pouco explorado na sua integralidade: o sistema tecnológico. Os recursos ativados neste sistema são combinados e inter-relacionados e têm o potencial semiótico de permitir que os alunos visualizem, testem e examinem suas abordagens acerca da situação-problema explorada pela atividade de modelagem matemática.

Keywords:

Mathematical modeling.
Semiotic resources.
Online context.

Abstract: This article presents an investigation regarding the semiotic resources activated in mathematical modeling activities and their role in the development of these activities when this takes place in an online context. The theoretical framework of the research includes Mathematical Modeling in Mathematics Education and Semiotics as a science of signs. An empirical research is developed with students of a postgraduate studies in the area of Mathematics Education. The analysis follows the assumptions of a qualitative research, particularly a case study. The results indicate that the online development of the activity gives rise to a semiotic system that is rarely mentioned in research: the technological system. The resources enabled in this system are combined and interrelated and have the semiotic potential of allowing students to visualize, test and examine their approaches to the problem situation explored by the mathematical modeling activity.



Esta obra foi licenciada com uma Licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Introdução

A modelagem matemática refere-se, em termos gerais, à busca de uma solução para uma situação-problema por meio de modelos matemáticos (BASSANEZI, 2002; BLUM, 2015; BORROMEO FERRI, 2018; GREEFRATH *et al.*, 2018). Quando essa dinâmica caracterizada como modelagem matemática é incorporada às aulas em diferentes níveis de escolaridade, os alunos passam a ser corresponsáveis pela investigação de uma situação-problema em que definem e resolvem um problema usando matemática, de modo que uma atividade de modelagem matemática se torna uma abordagem de uma situação-problema realizada na sala de aula por meio da Matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005).

A abordagem matemática de situações da realidade na sala de aula – a modelagem matemática – passa então a endereçar-se à matematização de situações, tornando-se, portanto, indispensável a transição de linguagens, considerando especificidades de cada situação bem como da Matemática a ela articulada. Esta transição vem ancorada na diversidade de signos e suas especificidades. A produção de signos e sua ação na interlocução entre Matemática e realidade podem ser interpretadas à luz da semiótica.

A semiótica como ciência de todos os tipos de linguagem refere-se à diversidade de signos e sua ação no pensamento e na comunicação. A perspectiva que leva em consideração o potencial dos signos vem sendo associada à variedade dos chamados *recursos semióticos*. Mavers (2004) entende que os recursos semióticos envolvem ações e artefatos que os sujeitos usam para fins comunicativos. Segundo esse autor, os sujeitos combinam o uso de recursos linguísticos e extralinguísticos nos processos de comunicação.

Abordagens considerando os recursos semióticos dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas na sala de aula ainda foram pouco exploradas. Entretanto, Goulart (2020), evidenciou a contribuição desses recursos no desenvolvimento de atividades de modelagem realizado por alunos de um curso de Ciências Computação. Yoon e Miskell (2016) investigaram como recursos semióticos favoreceram o raciocínio dos alunos nas diferentes etapas do desenvolvimento de uma atividade de modelagem realizado por alunos em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

No momento atual, a repercussão dos efeitos da Covid-19 no ensino em geral, e no ensino de Matemática em particular, já está sendo discutida na comunidade acadêmica no âmbito da Educação Matemática (ENGELBRECHT *et al.*, 2020; ENGELBRECHT *et al.*, 2020a). Se por um lado as aulas presenciais não podem ocorrer em virtude da pandemia, por outro lado a comunicação digital, incluindo aulas, atividades de avaliação, reuniões de trabalho acadêmico realizadas em ambientes não presenciais usando plataformas digitais, vêm se fortalecendo e têm se tornado o único meio de comunicação entre alunos e professores.

Assim, no presente artigo, considerando este novo normal que se estabeleceu também no meio acadêmico, dirigimos nossa atenção ao desenvolvimento de atividades de modelagem em um ambiente *online*. Considerando uma atividade desenvolvida em encontros virtuais entre grupos de alunos e professora, temos como objetivo investigar quais recursos semióticos são ativados e qual é o seu papel no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática neste ambiente colaborativo. A pesquisa empírica em que se apoia o presente artigo considera uma atividade de modelagem desenvolvida por um grupo de alunos de um programa de pós-graduação em Educação Matemática em uma disciplina de Modelagem Matemática ministrada por uma das autoras do presente artigo e cujas aulas foram realizadas em um contexto *online*.

Modelagem Matemática

A interlocução entre Matemática e fenômenos da realidade acompanha o próprio desenvolvimento da Matemática de modo que Galileu Galilei (1564-1642) já dizia que o universo está escrito em linguagem matemática e sem visualizá-la se vagueia em um labirinto escuro na busca pela compreensão dos fenômenos. Esta interlocução tem sido vislumbrada no decorrer do tempo por meio da modelagem matemática.

A modelagem matemática visaa busca de uma solução de um problema identificado em uma situação da realidade por meio da construção e validação de um modelo matemático. Modelo matemático, conforme sugerem Lesh e Harel (2003), é uma estrutura matemática capaz de revelar como aspectos relevantes da situação em estudo podem ser interpretados à luz da Matemática. À busca da solução mediada pelo modelo associa-se um conjunto de procedimentos que em Almeida *et al.*(2012) são alocados a quatro fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação.

Na fase inteiração acontece a escolha do tema e a busca de informações a seu respeito. Na matematização, às informações e ao problema associa-se uma linguagem matemática. Assim, define-se variáveis, faz-se simplificações e define-se hipóteses para escrever matematicamente o problema. Aspectos da fase de matematização conduzem os envolvidos à construção de um modelo matemático capaz de descrever a situação e que possibilite responder ao problema definido. A fase de busca da solução por meio do modelo é denominada de resolução. Por fim, é preciso interpretar a resposta obtida e avaliar se é adequada, tanto do ponto de vista da situação quanto da Matemática utilizada, sendo esta fase chamada de interpretação de resultados e validação.

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática pode ser associado aos chamados ciclos de modelagem, em que a dinâmica da atividade é representada considerando estas fases. Entretanto, quando atividades desse tipo são incluídas nas aulas em

diferentes níveis de escolaridade, acrescenta-se às fases a que se referem Almeida *et al.* (2012), uma ação fundamental para alunos modeladores: a comunicação dos resultados obtidos e a elaboração de um relatório (Figura 1).

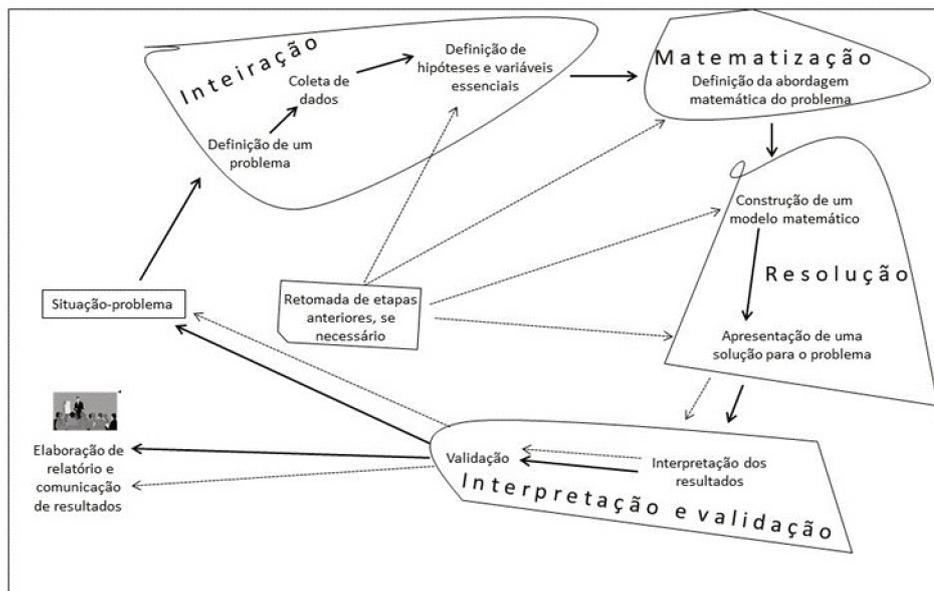


Figura 1 - Ciclo de modelagem matemática

Fonte - Adaptado de Almeida *et al.* (2012)

O que se pode evidenciar no ciclo da Figura 1 são ações dos alunos modeladores associadas às diferentes fases. As linhas pontilhadas visam indicar que algumas ações podem ser retomadas sempre que o resultado obtido não for satisfatório, caracterizando uma dinamicidade das ações.

O desenvolvimento de atividades de modelagem na sala de aula pode requer dos alunos conceitos e métodos matemáticos, que ainda não faziam parte de seu repertório de conhecimentos. Demandas como definir um problema, para além de apenas resolver um problema, aprender conceitos ou técnicas não conhecidas são frequentes em atividades de modelagem. Estas demandas se fortalecem mediante o trabalho colaborativo que se instaura nessas atividades e que é mediado pelo diálogo. Ferruzzi e Almeida (2015), neste sentido, concluem que o diálogo é um meio dos alunos estruturarem suas ideias, seja em relação à definição do problema, seja em relação à pertinência das hipóteses e das escolhas relativas à Matemática a ser usada para construir uma solução.

A dinâmica para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em grupos tem sido objeto de interesse (VERTUAN, 2013; BORROMEO FERRI, 2018; VORHÖLTER, 2019; CASTRO, 2017). Conforme indicam estas pesquisas, o trabalho em grupos favorece a oportunidade para os alunos desenvolverem capacidades que podem favorecer a aprendizagem tais como falar, ouvir, pensar, criar, raciocinar, comunicar e questionar.

Segundo Almeida *et al.* (2012),

[...] quando os alunos trabalham juntos com o mesmo objetivo e produzem um produto ou solução final comum, têm a possibilidade de discutir os méritos das diferentes estratégias de resolver um mesmo problema e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos. (p. 33).

Embora o trabalho colaborativo favorecido pelos trabalhos em grupo seja frequentemente referido na literatura, na presente pesquisa a atividade de modelagem matemática foi desenvolvida em um contexto *online*, não havendo encontros presenciais entre os alunos bem como entre professora e alunos.

O contexto *online* como ambiente educacional

Desde a década de 1970, a tecnologia vem exercendo influência sobre as aulas de Matemática e, conforme argumentam Engelbrecht *et al.* (2020), esta influência, cada vez mais intensa, certamente será o aspecto em que mais mudanças na educação no futuro, em comparação com a educação atual, poderão ser observadas.

De fato, no âmbito educacional vem merecendo atenção a relação entre meios *online* proporcionados pela tecnologia e a sala de aula, considerando diferentes níveis e modalidades de ensino, não apenas como incorporação de equipamentos, recursos ou métodos, mas como contribuição para o fortalecimento da prática pedagógica, melhoria do ensino e qualidade da aprendizagem (GUÉRIOS; SAUSEN, 2012).

Os contextos *online* em que atividades educacionais são desenvolvidas contribuem para “[...] integrar múltiplas mídias, linguagem e recursos, apresentar informações de maneira organizada, desenvolver interações entre pessoas e objetos de conhecimento, elaborar e socializar produções, tendo em vista atingir determinados objetivos” (ALMEIDA, 2003, p. 331).

Alunos e professores têm utilizado meios *online* não apenas para compartilhar ou acessar documentos ou informações de maneira rápida e simples, mas também para interagir de forma síncrona (webconferências, reuniões, documento em nuvem) ou assíncrona (mensagens em *WhatsApp*, *e-mails*, *software*). Neste contexto, para Yokaichiya *et al.* (2004), o uso das tecnologias no ensino determina, não somente uma mudança das mídias usadas, mas provoca, principalmente, uma alteração nas formas de apresentação de conteúdos e de interação entre alunos e professor e alunos separados no espaço e também, às vezes, no tempo.

Para Moore (2002) essa separação provoca a necessidade de transpor um espaço psicológico e comunicacional, um espaço de potenciais mal-entendidos entre as intervenções do instrutor e as do aluno. A este espaço psicológico e comunicacional o autor denomina

distância transacional. Segundo Moore (2002), o conceito de transação representa a interação entre o ambiente, os indivíduos e os padrões de comportamento em determinada situação.

A extensão da distância transacional em um programa educacional, segundo Yokaichiya *et al.* (2004), é função de três grupos de variáveis: diálogo, estrutura e autonomia do aluno.

O diálogo é construtivista e possui um valor, tanto para alunos como para professores; [...] é direcionado para melhorar o entendimento do aluno através de uma relação ativa em que todos os participantes são ao mesmo tempo ouvintes e colaboradores. A estrutura expressa a rigidez ou flexibilidade dos objetivos do programa educacional, das estratégias de ensino, dos métodos de avaliação e da possibilidade de atender as necessidades individuais dos alunos. A autonomia do aprendiz diz respeito à extensão em que a relação aluno-professor é definida, e quanto permite ao aluno determinar os objetivos, e as decisões de avaliação do programa de aprendizado. (YOKAICHIYA *et al.*, 2004, p. 4).

Recursos como mensagem de *WhatsApp* e reuniões por *Skype* em atividades educacionais, por exemplo, requerem funções que ultrapassam o ato de troca, mas possibilitam novas formas de comunicação, capazes de promover a participação ativa e intensificar o diálogo entre professor e alunos e entre os alunos. Neste sentido, Yokaichiya *et al.* (2004) caracterizam o aprendizado colaborativo como “[...] um método de instrução/aprendizagem no qual os estudantes trabalham juntos, em pequenos grupos, em torno de um objetivo comum” (p. 3). Para estes autores, no contexto *online* e não presencial, mas com encontros realizados de forma síncrona, a aprendizagem colaborativa se dá mediante um processo colaborativo em que a interação e a colaboração entre pares são fundamentais.

No momento atual, considerando o impedimento de aulas presenciais como consequência da pandemia do Covid-19, as discussões relativas ao ensino não presencial vêm atingindo o seu auge e, conforme mencionam Engelbrecht *et al.* (2020), uma questão relevante é: quais consequências essa pandemia vai trazer para a Educação Matemática?

Não está no escopo do presente artigo discutir o futuro da Educação em decorrência do contexto atual, entretanto podemos avaliar como os avanços no uso da tecnologia, por ora incorporados às aulas, podem provocar alterações nas formas de atuar e como alunos e professores podem se mover rapidamente neste contexto totalmente *online* para as atividades acadêmicas.

Apoiamo-nos em argumentações de Hoffman (2018), ao considerar que uma forma de compreender que em contextos *online* o ensino e a aprendizagem são sempre colaborativos e interativos e que uma maneira de se captar nuances de como se dão estes dois processos é examinar as representações e as interações dentro e entre os vários sistemas semióticos utilizados. Assim a observação do modo como as pessoas usam signos para interagir, valendo-se de recursos semióticos para a comunicação, pode sinalizar como se dá a colaboração visando promover a aprendizagem em um contexto *online*.

Recursos semióticos

Levar em conta a natureza simbólica de objetos matemáticos utilizados durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática implica em reconhecer os símbolos como signos que estabelecem relações para com os objetos que representam. Santaella (2008) define:

signo é qualquer coisa de qualquer espécie (uma palavra, um livro, uma biblioteca, um grito, uma pintura, um museu, uma pessoa, uma mancha de tinta, um vídeo etc.) que representa outra coisa chamada de objeto do signo, e que produz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial. (SANTAELLA, 2008, p. 8).

Na sala de aula emerge uma diversidade de signos cuja construção e ação remete a *recursos semióticos* (ARZARELLO, 2006; MAVERS, 2004; O'HALLORAN *et al.*, 2018). A ideia de recurso semiótico pode estar associada ao potencial semiótico de um signo, ou de um sistema de signos, considerado relevante por quem os utiliza e por seus usos de acordo com as necessidades e interesses específicos do usuário (VAN LEEUWEN, 2005).

Mavers (2004) entende que os recursos semióticos correspondem a ações e artefatos que os sujeitos usam para fins comunicativos. Os artefatos, nesse contexto, são construções ou usos de objetos de naturezas diversas e realizados pelos sujeitos com intenção e finalidade bem definidas. Segundo o autor, os sujeitos combinam o uso de recursos linguísticos e extralinguísticos de modo que gestos, olhares, registros escritos, *software*, expressões matemáticas e imagens gráficas constituem recursos semióticos. Para Hoffman (2018), os recursos semióticos são também materiais utilizados para a comunicação em um ambiente *online*.

No que se refere à modelagem matemática, particularmente, conforme argumentam Yoon e Miskell (2016), recursos semióticos são potencialmente úteis uma vez que podem favorecer aos alunos as diferentes ações no desenvolvimento da atividade de modelagem, associando ideias e representações específicas da situação da realidade com conceitos e representações matemáticas.

A pesquisa de Goulart (2020) conclui que em atividades de modelagem os diferentes recursos semióticos ativados não atuam de forma isolada, mas colaboraram para o desenvolvimento da atividade em cada fase de modo complementar e concomitante.

Levando em consideração que pesquisas anteriores já têm endereçado o uso e a relevância de uma variedade de recursos semióticos, no presente artigo dirigimos nossa atenção ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática realizado em contexto não presencial em que a ativação de recursos semióticos também considera um ambiente da aprendizagem colaborativa *online*.

Aspectos metodológicos

Para investigar, a partir de um contexto *online*, quais recursos semióticos são ativados e qual é o seu papel no desenvolvimento de uma atividade de modelagem neste ambiente colaborativo, usamos uma abordagem metodológica inserida na pesquisa qualitativa. Particularmente, consideramos um estudo de caso para levantar evidências relativamente à nossa investigação a partir do caso trazido à baila.

Conforme sugere Gil (2008), o estudo de caso diz respeito ao estudo de um fenômeno particular (o caso) mediante o qual se torna possível obter evidências em relação a determinada questão. Na presente investigação uma pesquisa empírica, em que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática é realizado por um grupo de alunos, constitui o fenômeno de estudo.

A atividade de modelagem foi desenvolvida por um grupo de alunos de mestrado e de doutorado em uma disciplina de um programa de pós-graduação na área de Educação Matemática ministrada por uma das autoras deste artigo. Considerando o cenário educacional atual associado ao efeito do isolamento social devido à pandemia do Covid-19, as aulas foram realizadas por meio de encontros síncronos e de tarefas assíncronas.

Particularmente, trazemos para análise um grupo de três alunos que desenvolveu a atividade de modelagem matemática cujo tema é *Spotify*. Participaram também das aulas síncronas e tarefas assíncronas, outra aluna da disciplina, a professora e uma aluna de graduação que realizava iniciação científica sob orientação da professora. Embora os sujeitos envolvidos já tivessem familiaridade com atividades de modelagem matemática, esta atividade é a sua primeira experiência no contexto *online*.

A atividade foi desenvolvida ao longo de um mês e o próprio grupo era responsável pela organização dos encontros e atividades (síncronas e assíncronas) conforme suas necessidades. No final, a atividade foi apresentada para todos os participantes da disciplina.

A coleta de informações no decorrer do desenvolvimento da atividade se deu mediante ferramentas tecnológicas diversas, dentre as quais podemos citar o uso do *Skype* para encontros síncronos, uso do *WhatsApp* para avisos rápidos e compartilhamento de materiais, documento em nuvem para edição compartilhada, uso de *sites* de busca para coleta de dados para a atividade, uso de *software* para resoluções matemáticas, entre outros. Dessa forma, se configurou como rol de dados: os áudios e vídeos transcritos, os arquivos das produções digitais, as mensagens/e-mails trocados e o relatório final produzido pelo grupo.

Nas transcrições dos diálogos usamos A1, A2, A3 para identificar os alunos. A professora é indicada por Prof e as duas outras participantes como P1 (a aluna da disciplina) e P2 (a aluna de iniciação científica).

A temática da atividade refere-se ao aplicativo *Spotify* e foi sugerida aos alunos pela professora tomando como referência um trabalho de Hall e Lingefjård (2016). Algumas informações que constam na referência original (um livro) foram enviadas aos alunos conforme sugere o Quadro 1.

Quadro 1: Informações do livro sobre a temática *Spotify*

No *Spotify* frequentemente são lançadas músicas novas que ficam entre as mais tocadas por algum tempo e depois são esquecidas. Vamos considerar uma música específica, denominada aqui “Temporariamente Popular”. Ela foi tocada no *Spotify* 12.500 vezes na primeira semana após o seu lançamento. Durante a décima semana a música atingiu o número máximo de reproduções por semana e a partir daí o número de vezes que ela foi tocada semanalmente começou a decrescer. Após 25 semanas a música estava praticamente esquecida pelos ouvintes e quase não era mais reproduzida na plataforma.

Fonte: Hall e Lingefjård (2016)

As informações do livro em relação à temática *Spotify*, embora não façam menção a como os dados foram obtidos, suscitaram nos alunos uma abordagem visando investigar a reprodução de uma música no decorrer do tempo, bem como investigar as taxas de reprodução da música em um determinado instante. Assim, definiram como problema: simular o número de reproduções de uma música até um determinado instante e obter a semana em que a música atingirá a taxa máxima de reprodução. Para encontrar respostas para este problema o grupo considerou dois cenários.

Cenário 1: Na proposta do livro a música é reproduzida 12500 vezes na primeira semana após seu lançamento. Durante a décima semana a taxa de reprodução da música atinge o máximo e a partir daí essa taxa decresce. Após a 25^a semana a música é pouco lembrada e quase não é mais reproduzida no *Spotify*.

Cenário 2: Considerar uma música recém-lançada da lista top 200 músicas mais tocadas no *Spotify*, com dados do número de reproduções por semana nas sete primeiras semanas após o lançamento. Os dados relativos à reprodução são reais e obtidos no *site* do *Spotify*.

Como o objetivo era simular o número de reproduções de uma música, o grupo decidiu que iria construir um simulador. Para isso escolheu a música “Braba” da artista Luiza Sonza, lançada no *Spotify* em 18/02/2020.

A matematização da situação iniciou com a definição de variáveis e foi mediada, inicialmente pelo que os alunos já sabiam em relação a funções, limites e derivadas. A partir das variáveis: $S(t)$: número de reproduções da música até o instante t ; t : o tempo (em semanas), os alunos do grupo consideraram que se $S(t)$ é o número de reproduções da música

até o instante t , então $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ e reprodução da música em um instante t .

Entretanto, $S'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ é a derivada da função S em $t=t_0$.

Conforme esclarecem em seu relatório, os alunos puderam inferir que no contexto do problema, essa taxa ($S'(t)$) corresponde ao número de reproduções da música no instante t e determina o comportamento da curva $S(t)$ no decorrer do tempo. Como a unidade de medida da variável tempo é dada em semanas, então $S'(t)$ corresponde ao número de reproduções na semana.

Tendo em vista estas considerações, os alunos elaboraram duas hipóteses referentes ao Cenário 1. A primeira hipótese, H_1 , é: Após a vigésima quinta semana do lançamento no *Spotify*, a taxa de reprodução da música por semana tende a zero.

Concluíram dessa hipótese que, quando $t \rightarrow \infty$, para $t > 25$, $S'(t) \rightarrow 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = 0$.

Também, limite de $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ corresponde a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int S'(t) dt = \int \lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) dt = k, \text{ pois } \lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = 0.$$

Isso significa que, quando a taxa de reproduções $S'(t)$ tende a zero ($\lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = 0$), o número total de reproduções da música até o instante t , $S(t)$, varia cada vez menos e tende a um valor máximo k ($\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = k$).

A hipótese 2 foi assim considerada: H_2 : Para $t < 10$, a taxa de reprodução da música é crescente (isto é, $S''(t) > 0$). Para $t > 10$ a taxa de reprodução da música por semana é decrescente ($S''(t) < 0$). Logo, em $t=10$, a taxa de reprodução por semana é um ponto de máximo das taxas de reprodução ($S''(t) = 0$). Da hipótese 2 segue que o ponto $(10, S(10))$ é um ponto de inflexão da curva $S(t)$.

Para o Cenário 2, considerar uma música recém-lançada da lista top 200 músicas mais tocadas no *Spotify*, os alunos formularam também duas hipóteses, que foram identificadas como H_3 e H_4 , sendo, H_3 : Após um período depois do lançamento da música, a taxa de reprodução tende a zero; H_4 : A taxa de reprodução da música é crescente até um determinado instante e após esse instante passa a ser decrescente.

Essas duas hipóteses levaram os alunos a considerar que $S(t)$ é uma função assintótica com um ponto de inflexão. As hipóteses viabilizaram avançar na matematização da situação. Assim, concluíram que uma possibilidade para modelar a situação é construir um modelo logístico, uma vez que este incorpora estas duas características: é assintótico e tem ponto de inflexão. Para obter $S(t)$ com estas características, a ideia foi partir da equação diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = r \left(1 - \frac{S}{k} \right) S \quad \text{cuja solução é } S(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{S_0} - 1 \right) e^{-rt}}$$

Uma vez obtido o modelo matemático assintótico, as condições relativas ao Cenário 1 ($S(10)=12500$ e $S''(10)=0$ e r, k números reais) conduziram ao modelo para o Cenário 1 como

$$\text{sendo } S(t) = \frac{12500(1 + e^{9r})}{1 + e^{-r(t-10)}}.$$

Para $(t_i, S(t_i))$ ponto de inflexão deste modelo, ele pode ser escrito como:

$$S(t) = \frac{12500(1 + e^{9r})}{1 + e^{-r(t-t_i)}}.$$

Assim, sabendo que a abcissa do ponto de inflexão do Cenário 1 é 10 e que o ponto (1, 12500) é um ponto da curva $S(t)$, puderam concluir que este é o ponto de inflexão e, a partir da variação de S_i , simularam diferentes curvas e analisaram o comportamento do número de reproduções da música até um instante t , bem como sua taxa de reprodução. Ou seja, conhecida a taxa de reprodução máxima por semana, é possível simular o comportamento do número de reproduções acumuladas da música até um instante t qualquer, conforme mostra a Figura 2.

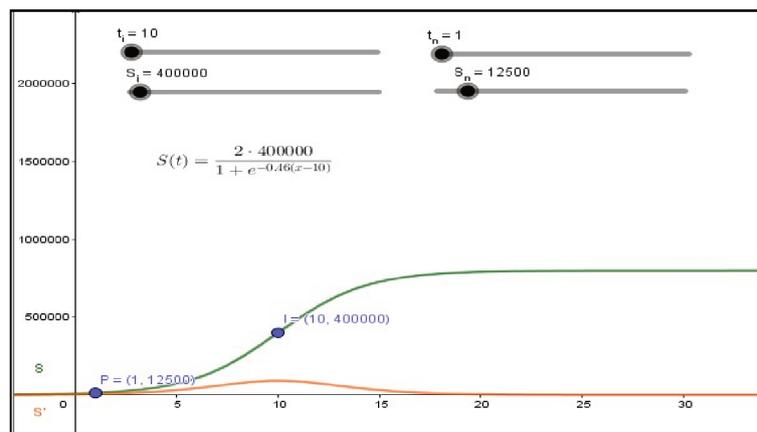


Figura 2 – Simulações no Cenário 1
Fonte: relatório do grupo

Para o Cenário 2 o grupo coletou dados no *Spotify Charts* a respeito do número de reproduções por semana da música ‘Braba’ conforme indica a Tabela 1, que informa, além do número de reproduções por semana, o número de reproduções até o instante t .

Tabela 1–Dados da música ‘Braba’

Período do ano de 2020	t	Número de reproduções no Spotify ((S'(t)))	Número de reproduções até o instante t (S(t))
20/03 a 26/03	1	2 948 435	2 948 435
27/03 a 02/04	2	4 309 601	7 258 036
03/04 a 09/04	3	4 306 377	11 564 413
10/04 a 16/04	4	3 790 211	15 354 624
17/04 a 23/04	5	3 431 330	18 785 954
24/04 a 30/04	6	3 243 690	22 029 644
01/05 a 07/05	7	2 920 387	24 950 031

Fonte: Spotify Charts(<https://spotifycharts.com/regional>)

Segundo as hipóteses formuladas para este cenário, consideraram que o número de reproduções tende a uma assíntota k , quando t tende ao infinito e o modelo a ser construído é um modelo logístico do tipo $S(t) = \frac{k}{1 + be^{at}}$.

Para obter o valor da assíntota, utilizaram o método de Ford-Walford¹ e obtiveram $k=58525397,25$

Para determinar os valores dos parâmetros a e b , partiram da forma linear do modelo logístico, que pode ser escrito como $\ln b + at = \ln \frac{k-S}{S}$.

Usando o método dos mínimos quadrados para ajustar uma função linear ao par $(t, \ln \frac{k-S}{S})$, obtiveram $a=-0,4070$ e $b=18,6991$. Logo o modelo logístico para o Cenário 2

$$\text{é : } S(t) = \frac{58525397,25}{1 + 18,6991e^{-0,4070t}}$$

Usando as hipóteses H₃, e H₄, construíram um simulador no *softwareGeoGebra* (que pode ser utilizado considerando dados das sete primeiras semanas) que funciona tanto para a música escolhida no Cenário 2 como para uma música qualquer, conforme ilustra a Figura 3.

¹Para detalhes do método ver Bassanezi (2002).

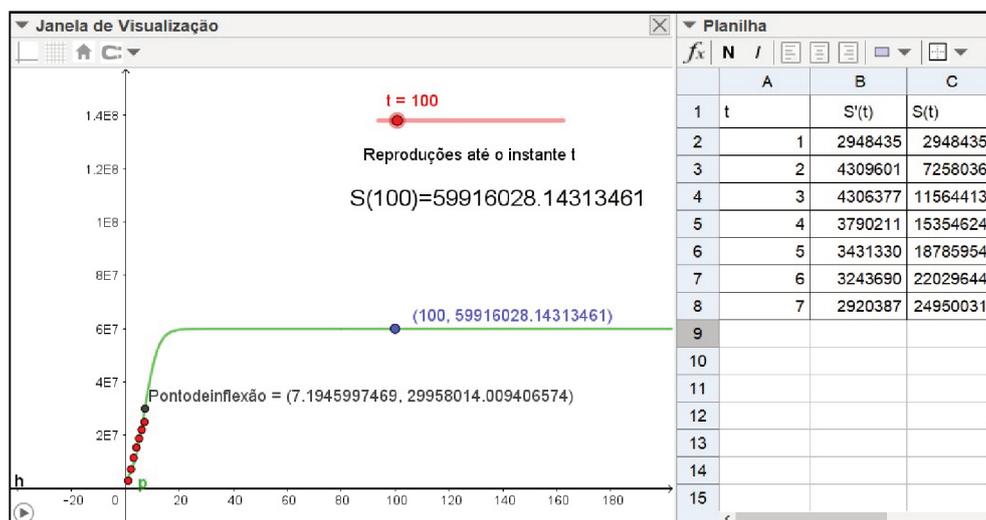


Figura 3 – Simulações no Cenário 2

Fonte: relatório do grupo

Os cenários de simulação 1 e 2 forneceram possibilidades de experimentações virtuais, em que condições hipotéticas foram testadas, por um lado, em um cenário com poucas informações a respeito do fenômeno e com um grau de controle de variação de mais de um parâmetro e variável do modelo matemático (Cenário 1). Por outro lado, no Cenário 2, a partir de mais informações sobre as reproduções de uma música específica, as simulações realizadas envolvem um grau de controle mais limitado, em que é possível apenas controlar a variável t para estimar o número de reproduções acumuladas dessa música no decorrer do tempo.

Em relação ao Cenário 2, inserindo os dados do número de reproduções semanais da música 'Braba' no simulador, obtiveram dados referentes ao número de reproduções da música até o instante t , validando o modelo matemático para esta música, conforme a Tabela 2.

Tabela2- Validação do simulador para os dados da música 'Braba'

Semana (t)	Total de reproduções até a semana t [S(t)]. <u>Modelado</u>	Total de reproduções até a semana t [S(t)]. <u>Real</u>	Diferença (%)
1	4 455 890	2 948 435	-51%
2	6 453 268	7 258 036	11%
3	9 197 501	11 564 413	20%
4	12 828 689	15 354 624	16%
5	17 401 605	18 785 954	7%
...
24	22 814 784	22 029 644	-4%
25	28 772 259	24 950 031	-15%

Fonte: os autores

Embora a simulação para a primeira semana indique uma margem de erro alta, para as demais semanas o número de reproduções obtido pelo simulador está dentro de uma margem de erro considerada aceitável pelo grupo de alunos.

Por fim, o grupo concluiu que o simulador baseado no modelo logístico possibilita ao artista e à produtora realizar projeções do número de reproduções da música até um instante t bem como analisar quando a música atingirá a sua taxa máxima de reprodução e quando o número total de reproduções de uma determinada música atinge o seu auge.

Os recursos semióticos e o trabalho colaborativo na atividade de modelagem matemática

Para investigar quais recursos semióticos foram ativados pelos alunos e como contribuíram para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, trazemos para discussão características do desenvolvimento dos alunos no ambiente *online*.

Nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade de modelagem, recursos semióticos variados mediaram os procedimentos dos alunos e a comunicação entre eles e com a professora.

Inicialmente, na fase de inteiração dos alunos com a situação-problema, o *e-mail*, o *WhatsApp* e compartilhamento de arquivos foram os meios de comunicação e troca de informações e de ideias. A proposição do tema a partir de texto apresentado em Hall e Lingefjård (2016), a sugestão e organização de materiais e arquivos complementares foram viabilizadas pela ativação destes recursos que proveram aos alunos inteirar-se da situação que iriam investigar.

Os sites do *Spotify* e o *Spotify Charts* foram assumidos pelo e para o grupo como fonte de dados para a resolução do problema. Isso denota a importância da sinergia do grupo colaborativo para utilizar uma mesma fonte ou linguagem para um resultado satisfatório. Ao usar materiais didáticos para atingir seus próprios objetivos, à sua maneira e sob seu próprio controle, o grupo parece exercer a variável autonomia no contexto de distância transacional, conforme apontado por Moore (2002).

Embora os sites do *Spotify* e do *Spotify Charts* tenham sido importantes fontes de informação, os alunos precisaram tratar os dados. Para isso utilizaram planilhas do *Excel*, nas quais, além de organizar as informações, realizaram cálculos simples de soma e porcentagem, relativos ao número de reproduções da música selecionada, ou seja, da música ‘Braba’, a partir das suas hipóteses.

Tanto o *Excel* quanto os *sites* tomados como referência, são recursos que parecem ter auxiliado os alunos na fase de inteiração, visto que serviram para que se inteirassem do tema, selecionassem e organizassem informações e definissem metas para a resolução do problema.

O que se pode observar em recortes dos dados coletados no decorrer do desenvolvimento da atividade é que, ainda que o trabalho fosse proposto a um grupo, isoladamente alunos iam avançando nas fases do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e colocando suas ideias em discussão, sinalizando que o trabalho

colaborativo se constituía visando investigar a situação proposta pela professora. De fato, conforme sugere a Figura 4, enquanto A1 e A2 ainda estavam se inteirando da situação, A3 já fazia ensaios na fase de resolução.

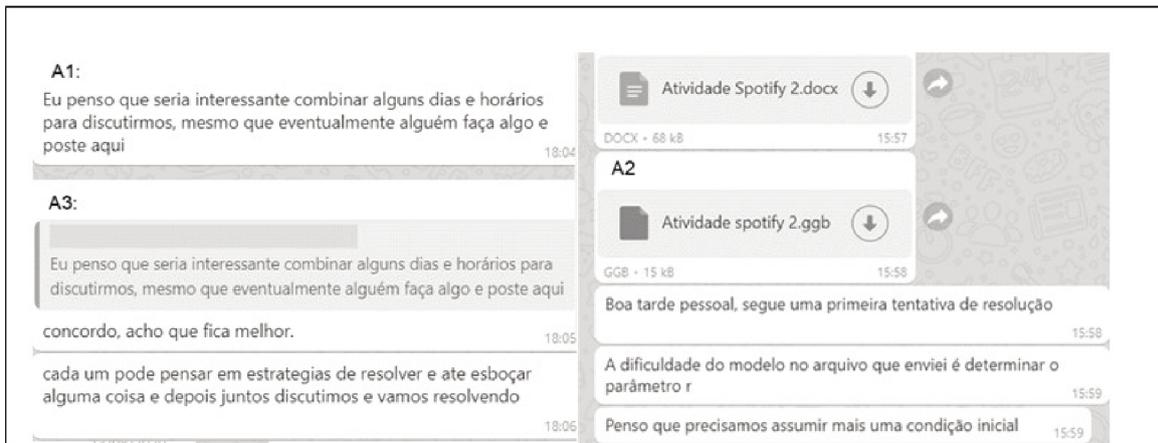


Figura 4 – Mensagens no grupo do *WhatsApp*
Fonte: captura de tela no *WhatsApp*

Embora, na maioria das vezes, os alunos conversassem de maneira síncrona usando os recursos do *WhatsApp* e *Skype*, havia também a possibilidade de comunicação acontecer de forma assíncrona, respeitando a disponibilidade de cada um, sem deixar de considerar os pontos em que todos poderiam colaborar no desenvolvimento da atividade. Isso evidencia tanto o caráter flexível de uma atividade *online*, quanto a autonomia responsável dos alunos para sua organização por conta própria.

O *Skype* teve o papel de proporcionar encontros com todos os participantes, incluindo a professora ou não, e seu uso se intensificou nas etapas de matematização, resolução, validação e comunicação de resultados. Nessas reuniões as discussões levavam a decisões, avaliavam procedimentos, validavam ou não resultados caracterizando-se comportamentos da chamada distância transacional, em que, conforme indica Moore (2002), “[...] em encontros por webconferência, o diálogo entre alunos acontece entre alunos e outros alunos, em pares ou em grupos, com ou sem a presença de um professor em tempo real” (p. 9).

Foi durante estas reuniões síncronas que os alunos decidiram sobre a delimitação do tema, definiram o problema a investigar, elaboraram hipóteses, definiram os cenários e traçaram os encaminhamentos para uma possível resolução e discutiram as resoluções realizadas. Assim, o *Skype* pareceu ser um recurso semiótico relevante para o desenvolvimento da atividade, pois possibilitou que os alunos debatessem ideias, expressassem opiniões, explicassem modos de ver a situação e tomassem decisões de forma síncrona. Além disso, as reuniões foram gravadas, o que permitiu aos alunos recorrer às gravações sempre que necessário, para retomar as discussões ou tirar dúvidas. Isso denota que a gravação pode ter sido um recurso semiótico utilizado pelos alunos ao longo (ou depois) da atividade, já que, em atividades de modelagem, muitas vezes é necessário retomar

informações sobre o tema ou sobre a matemática utilizada. Segundo Moore (2002), gravações decorrentes de discussões por webconferência juntamente com uma apresentação gravada, podem auxiliar o aluno na análise do seu conteúdo e no seu questionamento e se configuram, sob a óptica da distância transacional, como a variável estrutura.

Neste sentido se evidencia a argumentação de Hoffman (2018) de que em ambiente *online* a aprendizagem sempre é mediada por colaborações e interações. De fato, nas reuniões pelo *Skype* configurou-se um diálogo decisivo para esclarecer ideias e entender matematicamente a situação bem como a definição de encaminhamentos para a resolução do problema definido, sinalizando que conferências por computador tornaram possíveis novos tipos de atividades envolvendo grupos colaborativos de comunicação *online*. Segundo Hoffman (2018, p. 180), a Internet evoluiu “[...] da interação com o conteúdo à interação com as pessoas [...]”. Na atividade aqui analisada foram estas interações que proporcionaram a ação conjunta e colaborativa dos alunos do grupo, da professora e das outras duas alunas que participavam das seções síncronas e do grupo de *WhatsApp*.

A matematização da situação se deu mediante essa interação em que a decisão foi de que a taxa de reprodução de uma música pode ser associada ao conceito de derivada, conforme indicam a equação (1) e equação (2) a que nos referimos na seção da apresentação da atividade. Um recorte de discussões do grupo desse instante está na transcrição de gravação das reuniões apresentada a seguir.

Prof: Qual é o conceito de derivada? Vejamos: delta S sobre delta t é a velocidade média. Então podemos fazer o quê, para a taxa de reprodução das músicas? Limite de t tendendo a t_0 de delta S sobre delta t , é isso?

A2: Isso!

Prof: Isso dá o que?

A1: (...) Dá a velocidade em que a música é ouvida no instante t , se a gente pensar é o número de vezes que ela é tocada por, de acordo com a unidade aqui, por semana, como a unidade de tempo é por semana essa é a velocidade.

Prof: Então é qual a velocidade com que ela está sendo tocada na semana 10? Posso dizer que na semana 10 ela é tocada tantas vezes. Entendi. Ótimo!

Trata-se de um diálogo intencional, construtivo e valorizado por cada parte de modo que é direcionado para a compreensão dos alunos em consonância com a ideia de Moore (2002) para comunicação relativa a uma distância transacional. Neste sentido, o diálogo viabilizado pelos recursos semióticos ativados na atividade se alinha com as características de diálogos em atividades de modelagem matemática discutidos em Ferruzzi e Almeida (2015), em que se assegura que, a aprendizagem em atividades de modelagem matemática, depende da qualidade dos contatos e das relações interpessoais dos participantes.

A qualidade da comunicação usando o *Skype* também depende de algumas funções/extensões que se tornam recursos *derivados* dele. O compartilhamento de tela é uma extensão do *Skype* que foi usada com a finalidade de possibilitar a todos os envolvidos acompanhar e visualizar simultaneamente as informações, a resolução e os resultados. Esse

recurso possibilitou tornar coletivas ideias, formulações, gráficos, equações e colocá-las em discussão no grupo e com a professora. Assim, por exemplo, nas discussões síncronas usando o *Skype* os alunos apontavam com o cursor ou usavam ferramentas de realce de texto para expor suas ideias expressas em equações ou em gráficos conforme sugere a Figura 5.

$$12500 = \frac{S_0(e^{r10} + 1)}{1 + e^{-r(1-10)}} = \frac{k}{1 + e^{-r(1-10)}}$$

$$12500 \cdot (1 + e^{9r}) = k$$

$$S(t) = \frac{12500 \cdot (1 + e^{9r})}{1 + e^{-r(t-10)}}$$

cursor $\left[\text{realce de texto} \right]$

Figura 5 – Uso do cursor e ferramenta de realce

Fonte: captura de tela *Skype*

As ferramentas ‘cursor na tela’ e ‘realce de textos’ constituem recursos semióticos, pois contribuem para a visualização de objetos, seleção e destaque de elementos importantes no texto e na resolução matemática apresentadas no relatório. Este parece ser um recurso particular de atividades desenvolvidas *online* e que, de certa forma, substituiu o ato de apontar ou indicar, usado em aulas presenciais.

Além disso, o recurso, ‘compartilhar tela’ serviu para a comunicação dos resultados em que os alunos do grupo apresentaram o seu desenvolvimento da atividade para todos os alunos da disciplina. Na tela compartilhada os alunos fizeram uso do *Power Point*, um programa para criação/edição e exibição de apresentações gráficas, para comunicar e argumentar sobre o desenvolvimento da atividade, o modelo construído e os resultados obtidos. Isso indica que o *Power Point* também se constituiu um recurso semiótico utilizado pelos alunos. O fato de apresentar a atividade para a turma reforça a motivação e independência dos alunos, possibilitando que eles exerçam e desenvolvam sua autonomia.

Além disso, a cada encontro (pelo *Skype*) eram apresentadas descrições e registros já compartilhados em nuvem. O documento em nuvem foi criado para permitir que todos acessassem e editassem o arquivo ao mesmo tempo ou em tempos distintos, enquanto as alterações ou inserções realizadas eram atualizadas para todos. Por isso entendemos que esse documento pode ser síncrono ou assíncrono e se configura como um recurso semiótico utilizado pelos alunos para registrar, organizar e estruturar a atividade (Figura 6).



Figura 6 –Organização do trabalho do grupo (*WhatsApp* e documento em nuvem)

Fonte: captura de tela no *WhatsApp* e na Nuvem

Se por um lado os recursos semióticos possibilitam a comunicação, a visualização e as construções conjuntas no desenvolvimento da atividade, por outro lado, o trabalho matemático também era absolutamente ativado por recursos semióticos como os *software* e as planilhas eletrônicas. De fato, o *Curve Expert*, por exemplo, viabilizou a construção do modelo assintótico mediado pelo método de Ford-Walford. O *GeoGebra* foi usado para construir os simuladores para cada um dos cenários de reprodução de uma música no *Spotify*. Assim, as fases de resolução e de interpretação de resultados só foram viabilizadas por intermédio destes recursos.

Neste sentido, podemos considerar que os *softwares*, enquanto recursos semióticos, também ativam recursos já reconhecidos de outros sistemas semióticos tais como tabelas e gráficos. A articulação desses recursos foi relevante para que na atividade de modelagem matemática o grupo pudesse explorar as informações, complementá-las e produzir uma resposta para o problema.

De fato, a matematização decorrente das quatro hipóteses conduziu a dois cenários para a simulação do número de reproduções de uma música no *Spotify*. A simulação é um procedimento muito rico em atividades de modelagem matemática conforme se discute em Carreira *et al.* (2020). No caso da construção dos simuladores pelo grupo de alunos, as simulações possibilitaram o que em Birta e Albez (2007) se denomina de compatibilidade entre a situação, o modelo matemático e os objetivos (nesse caso simular quantas vezes uma música é tocada). Estas simulações, entretanto, só foram viabilizadas porque, de forma articulada, uma diversidade de recursos semióticos foi ativada no ambiente não presencial em que os alunos desenvolveram essa atividade de modelagem matemática.

O trabalho colaborativo se fortaleceu mediante o uso de versões *online* dos *software GeoGebra* e *Curve Expert* de modo que os modelos, a simulação com esses modelos e a sua validação em relação a uma música em particular, puderam ser realizados de forma conjunta e síncrona. Ou seja, havia uma possibilidade de dialogar sobre os procedimentos matemáticos e coparticipar da construção da atividade de forma colaborativa. Quando os alunos selecionavam um meio apropriado para veicular o que estavam fazendo, (por exemplo,

usando *GeoGebra* na construção do simulador) a adequação desse meio era ponderada pelos demais alunos do grupo de modo que uma estrutura para a distância transacional estava se confirmando.

No decorrer da atividade o diálogo, relevante em um contexto em que se caracteriza a distância transacional entre alunos do grupo e professora, possibilitou que alunos, mesmo à distância, compartilhassem a construção do conhecimento. Este trabalho colaborativo do grupo se estendeu durante todo o desenvolvimento da atividade de modo que até na fase de apresentação dos resultados do grupo para todos os alunos da disciplina havia compartilhamento de arquivos, sinalizando a comunicação efetiva entre o grupo, conforme sugere a Figura 7.

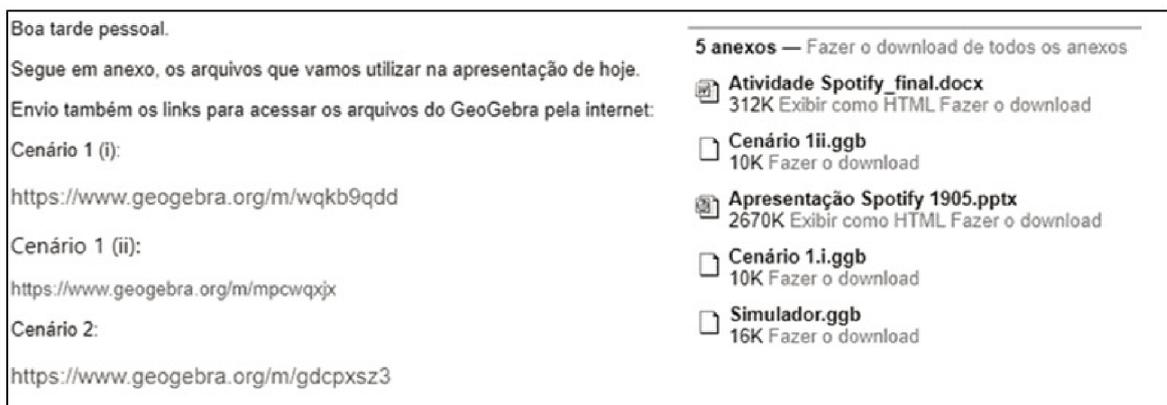


Figura 7 –Material compartilhado pelo grupo
Fonte: Captura de tela de troca de e-mail

Considerações finais

Recursos semióticos incluem ações, meios e artefatos que os sujeitos usam, seja para compreender algo, seja para fins comunicativos em contextos específicos, e podem ter características linguísticas e extralinguísticas. Da nossa análise da atividade de modelagem matemática desenvolvida integralmente em ambiente não presencial, emergiu um sistema de signos ainda pouco explorado na sua integralidade em ambientes educacionais: o sistema da tecnologia digital.

Considerando que um sistema semiótico refere-se a um conjunto de signos, um conjunto de regras e as relações entre os signos e seus significados, conforme sugere Ernest (2006), podemos assegurar que os recursos semióticos ativados e articulados pelos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática apresentada neste artigo só se acomodam em um sistema que inclui signos, regras e relações suportados por um sistema semiótico que compreende e se subsidia na tecnologia digital.

De fato, o que podemos caracterizar como recursos semióticos nesta atividade inclui objetos e mecanismos, usados com a finalidade de promover a compreensão e a resolução de um problema bem como a comunicação entre membros de um grupo, que não são

convencionais nos ambientes acadêmicos, mas se tornaram o meio de ação na presente atividade desenvolvida integralmente de forma não presencial.

Sistemas semióticos em que se produzem e usam recursos semióticos como aqueles que incluem os gestos, as expressões verbais ou gráficas, os recursos geométricos, os recursos linguísticos, entre outros, são reconhecidamente relevantes para os processos de comunicação na sala de aula e, particularmente no âmbito das aulas de matemática, viabilizam o acesso aos objetos matemáticos (GOULART, 2020; O'HALLORAN *et al.*, 2018; YOON; MISKELL, 2016; ALMEIDA; SILVA, 2012).

Na presente pesquisa, embora alguns destes recursos possam ter sido ativados pelos alunos, o conjunto de recursos semióticos se ampliou e se estruturou na medida em que os participantes foram tendo acesso e se familiarizando com ferramentas tecnológicas que, neste caso, atuaram como recursos semióticos que proveram os alunos de meios para desenvolver, em grupo, uma atividade de modelagem matemática sem, no entanto, ter acesso aos meios convencionais de comunicação entre alunos de um grupo em uma atividade desenvolvida na sala de aula.

Assim, evidenciou-se na atividade de modelagem matemática desenvolvida no contexto *online* uma diversidade de recursos semióticos, sendo alguns acionados em comunicações síncronas entre os participantes do grupo (*Skype*, compartilhar tela e cursor, por exemplo), outros em circunstâncias assíncronas (*GeoGebra*, *Power Point* e *Curve Expert*, por exemplo) e outros ainda evidenciados nestas duas formas de comunicação usadas no decorrer do desenvolvimento da atividade (*WhatsApp* e documento em nuvem, por exemplo).

Por um lado, estes recursos proporcionaram aos alunos possibilidades de interação de modo que as ações relativas às diferentes fases da modelagem matemática pudessem ser realizadas. Neste contexto o papel dos recursos semióticos proporcionou comunicação e trabalho colaborativo em sintonia com o que apregoam Moore (2002) e Yokaichiya *et al.*, (2004), e em muito se aproximam das especificidades de diálogos em atividades de modelagem matemática como se investigou em Ferruzzi e Almeida (2015).

Por outro lado, a temática da atividade de modelagem desenvolvida tem ela própria uma natureza tecnológica contemporânea. De fato, o *Spotify* em muito substituiu a maneira clássica de ouvir músicas por meio de CD, por exemplo. Ou seja, os alunos também ficaram imbuídos de um interesse que teve como foco recursos (semióticos) com essa característica tecnológica. Assim, estes recursos tiveram na atividade o papel de proporcionar a organização dos dados, de definir encaminhamentos para a construção do modelo matemático, além de ser o simulador construído completamente vinculado a uma associação de recursos semióticos em que gráficos, movimentos e obtenção de valores para as quantidades de reprodução de uma música, foram mediados pelo uso de um *software*. Neste sentido, se a simulação é uma

ferramenta eficaz para o trabalho em atividades de modelagem matemática conforme sugerem Carreira *et al.* (2020), na atividade desenvolvida no contexto *online* o simulador foi o meio de resolver o problema.

Da análise também é possível perceber a combinação de recursos semiótico sem vários momentos da atividade, como por exemplo, quando os alunos utilizam o *WhatsApp*, para compartilhar o *link* do documento em nuvem, ou o recurso compartilhar tela, do *Skype*, para apresentar o documento em *Power Point*, ou quando realizam o ajuste de curvas por meio de um *software* e constroem o gráfico e simulam movimentos na quantidade de reproduções da música usando outro *software*. Neste sentido, em Greefrath *et al.* (2018) se identificam diferentes funções da tecnologia no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. No presente artigo, todavia, não se pode identificar nas diferentes fases da modelagem matemática ações completamente independentes de algum recurso do sistema semiótico que aqui caracterizamos: a tecnologia digital.

A circunstância atual em que a pandemia do Covid-19 não nos permite aulas em que pessoalmente interajam alunos entre si e alunos com professores, Engelbrecht *et al.* (2020) trazem para reflexão e entendimento transformações para as aulas de Matemática decorrentes do uso da *internet*. Nestas reflexões, sobretudo se precisa destacar que a aprendizagem neste novo contexto se vincula a construções sociais e que, conforme sugerem os autores, se dão em redes. Neste sentido, no âmbito da presente pesquisa recursos como o compartilhamento de tela no *Skype*, o compartilhamento de resoluções e procedimentos matemáticos em nuvem, foram redes constituídas entre os alunos do grupo e com a professora e que possibilitaram que se aprendesse, nesta atividade, a construir e validar um simulador para resolver um problema que emergiu em uma atividade de modelagem matemática.

Por fim, os resultados apontam que atividades de modelagem podem incentivar os alunos a construir e manipular recursos semióticos associados à situação, à matemática ou ao contexto de grupo *online* e que têm o potencial semiótico de permitir que eles visualizem, testem e examinem suas abordagens matemáticas acerca da situação-problema que originou a atividade de modelagem matemática.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação*. v. 11, n. 3, p. 1-16, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência & Educação* v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Básica*. 1. Ed. São Paulo: Editora Contexto, 2012.
- ALMEIDA, M. E. B. de. Educação a distância na internet: abordagens e contribuições dos ambientes digitais de aprendizagem. *Educação e Pesquisa*, v. 29, n. 2, p. 327-340, 2003.
- ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. *Relime (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa)* .Número Especial, p. 267-299, 2006.
- BASSANEZI, R.C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BIRTA, L. G., ARBEZ, G. Modelling and simulation – *Exploring dynamic system behaviour*. London: Springer, 2007.
- BLUM, W. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In: CHO, S. (eds) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham, fev. 2015. p. 73-96.
- BORROMEO FERRI, R. *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer, 2018.
- CASTRO, E. M. V. *Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas em atividades de modelagem matemática*. Dissertação – Universidade Estadual do Centro-Oeste, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Guarapuava, 2017.
- CARREIRA, S; BAIÓIA, A. M.; ALMEIDA, L. M. W. Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task. *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática*, v. 17, p. 67–83, 2020.
- ENGELBRECHT, J., BORBA, M.C., LLINARES, S. Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? *ZDM*. v.52, p. 821–824, 2020. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01185-3>.
- ENGELBRECHT, J. LLINARES, S; BORBA, M. C. Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM*. v. 52, p.825–841, 2020a. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4>.
- ERNEST, P. A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics*, n. 61, p. 67-101, 2006.
- FERRUZZI, E. ALMEIDA, L. M. W. Diálogos em modelagem matemática. *Ciência & Educação*, v. 21, n. 2, p. 377-394, 2015.
- GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. Ed. – São Paulo: Atlas, 2008.
- GOULART, T. C. K. *Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática*. Dissertação de mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.
- GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H. S. Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, v. 50, n 1-2, p. 233-244, 2018.

- GUÉRIOS, E.; SAUSEN, S. Ambiente Virtual de Aprendizagem e educação presencial: uma integração possível na formação de professores. *PráxisEducativa*, v. 7, n. 2, p. 559-584, 2012.
- HALL, J.; LINGEFJÄRD, T. *Mathematical Modeling: applications with geogebra*. John Wiley & Sons, 2016.
- HOFFMAN, E. B. Untangling the Talk: A New Multimodal Discourse Analysis method to Investigate Synchronous Online Learning. *Journal of Digital Learning in Teacher Education*, v. 34, n. 3, p. 179-199, 2018.
- LESH, R.; HAREL, G. Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 5, n. 2, p. 157-189, 2003.
- MAVERS, D. E. *Multimodal design: the semiotic resources of children's graphic representation*. 2004. 243 f. Tese – Universidade de Londres, Londres, 2004.
- MOORE, M. G. Teoria da distância transacional. *Revista brasileira de aprendizagem aberta e a distância*, v. 1, 2002. DOI: <https://doi.org/10.17143/rbaad.v1i0.111>
- O'HALLORAN, K.; BEEZER, R. A.; FARMER, D. W. A new generation of mathematics textbooks research and development. *ZDM*, v. 50, n. 5, p. 863-879, 2018.
- SANTAELLA, L. *A Teoria Geral dos Signos: como as linguagens significam as coisas*. 2. Reimpr. Da 1. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008. 154 p.
- VAN LEEUWEN, T. *Introducing Social Semiotics*. London & New York: Routledge, 2005.
- VERTUAN, R. E. *Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática*. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.
- VORHÖLTER, K. Enhancing Metacognitive Group Strategies for Modelling. *ZDM*. v. 51, p. 703-716, 2019.
- YOKAICHIYA, D. K.; GALEMBECK, E.; BRAGA, D. B.; TORRES, B. B. Aprendizagem Colaborativa no Ensino a Distância: Análise da Distância Transacional. *Anais do Congresso Internacional de Educação a Distância*, V. X, 2004.
- YOON, C.; MISKELL, T. Visualising cubic reasoning with semiotic resources and modeling cycles. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KADUNZ, G. (Eds.). *Semiotics as a tool for learning mathematics: How to describe the construction, visualization, and communication of mathematical concepts*. Dordrecht, The Netherlands: Sense Publishers, 2016. p. 89-109.

SOBRE AS AUTORAS

LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA. É professora da Universidade Estadual de Londrina desde 1985. Atua no curso de graduação em Matemática e é docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, programa no qual já ocupou a função de coordenadora e de vice-coordenadora. É bolsista de produtividade do CNPq e tem experiência na área de Matemática com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática, semiótica na Educação Matemática e formação de professores de matemática. É líder do GRUPEMAT- Grupo de

Pesquisas sobre Modelagem e Educação Matemática cadastrado no CNPq. Orientou várias dissertações de mestrado e teses de doutorado.

ÉLIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO. Possui graduação em Matemática pela Faculdade Guairacá (2011) e Mestrado pelo Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pela UNICENTRO (2017). Atualmente é doutoranda pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), no Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciência e Matemática. Tem experiência na área da Educação, atuando principalmente com os seguintes temas: Modelagem Matemática, ensino e aprendizagem de matemática e metacognição.

MARIA HELENA SCHEEL DA SILVA. Aluna do 4º ano de Graduação em Licenciatura em Matemática, na Universidade Estadual de Londrina. Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – CNPq desde agosto de 2019. Atualmente participa do GRUPEMMAT (Grupo de Pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática).

Recebido: 18 de setembro de 2020.

Revisado: 02 de julho de 2021.

Aceito: 20 de agosto de 2021.