Red de Investigadores Educativos Chihuahua A.C.
Chihuahua, México
www.rediech.org

ISSN: 2007-4336
ISSN-e: 2448-8550
http://www.rediech.org/ojs/2017/index.php/ie_rie_rediech/index

Lilia Patricia Aké Tec

2019

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE MAESTROS EN FORMACIÓN SOBRE LA SIMBOLOGÍA ALGEBRAICA

IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 10(19), pp. 55-70.

DOI: http://dx.doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v10i19.506

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE MAESTROS EN FORMACIÓN SOBRE LA SIMBOLOGÍA ALGEBRAICA

MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF TRAINING TEACHERS IN ALGEBRAIC SYMBOLOGY

AKÉ TEC Lilia Patricia

Recepción: diciembre 5 de 2018 | Aprobado para publicación: junio 24 de 2019

DOI: http://dx.doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v10i19.506

Resumen

El uso de símbolos y letras en la educación secundaria es considerado como uno de los obstáculos para el aprendizaje del álgebra en este nivel educativo, justificado por la casi inexistente comprensión que se tiene sobre la manipulación del simbolismo algebraico. Esto es uno de los motivos que suscitó la iniciativa del desarrollo de formas de pensamiento algebraico en la educación primaria que persigue favorecer el tránsito a las matemáticas de secundaria a través de explicitar el carácter algebraico de las matemáticas de primaria. Sin embargo, lo anterior implica formar a los profesores de este nivel educativo para afrontar esta introducción y su desarrollo. El estudio de corte cualitativo y exploratorio que se reporta proporciona evidencia de la actividad matemática que futuros maestros en formación realizan al resolver tareas que involucran simbolismo algebraico. Se utilizaron criterios de análisis relativos al pensamiento relacional y significado de las literales para describir y categorizar dicha actividad matemática. Los resultados señalan que los futuros maestros recurren con mayor frecuencia a casos particulares y operaciones específicas para abordar las tareas. Esto implica un cambio en el trabajo matemático que se desarrolla con los maestros durante su formación.

Palabras clave: SIMBOLISMO, ALGEBRIZACIÓN, MAESTROS EN FORMACIÓN, EDUCACIÓN PRIMARIA.

Lilia Patricia Aké Tec. Investigadora posdoctoral en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, México. Es doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Tiene el reconocimiento del Sistema Nacional de Investigadores y cultiva la línea de investigación sobre formación de profesores en la cual trabaja fundamentalmente el pensamiento algebraico. Entre sus principales publicaciones se encuentra el artículo "Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización" y la coordinación del libro *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques*. Correo electrónico: lake86@gmail.com. ID: http://orcid.org/0000-0003-4303-4895.

Abstract

The use of symbols and letters in secondary education is considered one of the obstacles in learning algebra, justified by the almost nonexistent understanding of the manipulation of algebraic symbolism. This is one of the reasons that prompted the initiative for the development of forms of algebraic thinking in primary education, seeking to favor the transition to secondary school mathematics by explicitly explaining the algebraic nature of basic mathematics. However, this implies training teachers at this educational level to face this introduction and development. The qualitative and exploratory study reported provides evidence of the mathematical activity that future teachers in training perform when solving tasks that involve algebraic symbolism. Analysis criteria related to relational thinking and meaning of literals were used to describe and categorize said mathematical activity. The results indicate that future teachers resort more frequently to particular cases and specific operations to tackle the tasks. This implies a change in the mathematical framework that teachers develop during their training.

Keywords: SYMBOLISM, ALGEBRAIZING, TRAINING TEACHERS, ELEMENTARY SCHOOL.

Introducción y planteamiento del problema

Las diversas dificultades que los niños presentan en el tránsito de la aritmética de la educación primaria hacia el álgebra de la educación secundaria han motivado la iniciativa de introducir formas de pensamiento algebraico en la escuela primaria (Kieran, 2017; Kieran *et al.*, 2016; Cai y Knut, 2011; Kaput, 2000). Esta iniciativa es internacionalmente conocida como Early Algebra (álgebra temprana, por su traducción al español y a la cual referiremos de aquí en adelante), y se trata de una propuesta curricular que busca favorecer a partir de un *algebra for all* la acción de *algebrizar* el currículo de la escuela primaria con el fin de promoverla como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas (Kaput, 2000; Burkardt, 2001).

"Algebrizar la matemática elemental es capacitar a los estudiantes mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad" (Lins y Kaput, 2004, p. 58). No significa introducir una asignatura específica para esto, sino utilizar la matemática existente en el currículo de primaria para que emerjan los rasgos algebraicos. La intención es familiarizar a los estudiantes con las explicaciones y justificaciones de las propiedades que se están utilizando para pensar más en propiedades y no tanto en operaciones (Carpenter, Frankie y Levi, 2003). Se trata de enfatizar el análisis de las relaciones numéricas de una situación, expresarlas explícitamente en un lenguaje sencillo y cotidiano y, finalmente, aprender a representar con letras (Warren, 2003). Esto con la finalidad de promover una comprensión de los principios que rigen la manipulación simbólica y cómo pueden usar esta para registrar ideas y ampliar la comprensión de las situaciones (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Si bien el álgebra es más que el uso y manipulación de expresiones simbólicas, la comprensión en la realización de estas transformaciones con literales es una característica indiscutible del álgebra formal. Tal y como mencionan Cooper y Warren (2011), el álgebra es un sistema caracterizado por la indeterminación de los objetos, el carácter analítico del pensamiento y las formas simbólicas de los objetos que designan. Por lo tanto, dotarla de sentido es uno de los objetivos de esta propuesta de introducir el pensamiento algebraico en primaria bajo la justificación de que, a inicios de la educación secundaria, y continuando con los estudios en el bachillerato y universidad, los estudiantes enfrentan obstáculos con el uso diverso de las letras. Respecto a esto, Kieran (2007, 2017) resalta que las dificultades de los estudiantes que concluyen la educación primaria y acceden a los estudios de secundaria se centran en la necesidad de manipular letras y dotar a esta actividad de significado. El limitado entendimiento que se tiene sobre los diferentes significados que pueden adquirir las literales incrementa las dificultades que tienen los estudiantes respecto a la manipulación e interpretación de ecuaciones y expresiones algebraicas. Principalmente porque las conciben como abreviaturas o etiquetas, en lugar de letras que representan cantidades (Asquith *et al.*, 2007). Esta concepción tiene su origen en el tratamiento que se le da a las literales en la aritmética durante la educación primaria (Booth, 1984).

Con lo mencionado previamente, resulta preciso proporcionar a los estudiantes de primaria, secundaria y bachillerato herramientas que permitan darle un sentido a los símbolos, característica del álgebra formal. Ahora, con la introducción del pensamiento algebraico en primaria, es que esta necesidad se torna esencial, lo que ha motivado estudios desde la disciplina de la matemática educativa, tales como el realizado por los autores Schliemann, Carraher y Brizuela (2007), quienes sugieren que la notación algebraica puede ser introducida entre los grados tercero y quinto de la escuela primaria. Estos investigadores muestran evidencia sobre la comprensión de equivalencias, sobre la resolución de ecuaciones y también exponen el tipo de notaciones que usan los niños.

Este tipo de investigaciones, así como los diferentes estudios realizados a lo largo de estas décadas (e.g. Carpenter, Frankle y Levi, 2003; Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, 2017) evidencia que los niños de primaria ciertamente pueden resolver tareas que típicamente se han considerado propias del álgebra. Entonces, lo que se requiere es que los profesores de todos los grados de educación primaria sean capaces de promover el pensamiento algebraico a través de las tareas que plantean en el aula, particularmente promover una comprensión y uso con sentido de la notación simbólica-literal, lo que demanda incidencia en la formación de profesorado de este nivel educativo y plantea en el marco del álgebra temprana la cuestión: ¿qué conocimientos deben ser promovidos durante la formación inicial de los maestros para que puedan promover una comprensión de la notación simbólica-literal en los niños de la escuela primaria?

Para indagar sobre la pregunta anterior se precisa tener una aproximación sobre la manera en que los futuros maestros conceptualizan el tratamiento de las letras en álgebra bajo la justificación de que como universitarios cuentan con una formación y educación matemática básica impartida a través del sistema educativo escolar. Además, es necesario explicitar que la formación inicial de los docentes de primaria se realiza bajo un enfoque pedagógico sin consolidar el aspecto disciplinar, ofreciendo una formación que según Figueroa-Millán (2000) está "caracterizada por tender a homogenizar prácticas y discursos […] donde la búsqueda de la receta de cómo ser maestro parece ser la tónica del enfoque positivista" (p. 120). Según la autora, también se precisa imbricar a este hecho que "las prácticas pedagógicas que se le demandan a los docentes en formación, no siempre se corresponden con las del ejercicio real de la práctica futura" (Figueroa-Millán, 2000, p. 122). Los escenarios en donde se ponga a discusión y reflexión situaciones y/o tareas de enseñanza que promuevan el aprendizaje de las matemáticas son necesarias en la formación docente. Contar con esta información proporcionaría evidencia para articular procesos formativos que permitan modificar o consolidar dicha conceptualización del álgebra de acuerdo con la propuesta del álgebra temprana.

Para aproximarnos a la respuesta, en un segundo apartado se desarrollan los elementos teóricos utilizados para el estudio, cuyo objetivo es indagar sobre el tratamiento que futuros maestros de primaria proporcionan al simbolismo algebraico a partir de la actividad matemática manifestada ante determinadas tareas. En el tercer apartado se describe la metodología, sujetos de estudio, así como las tareas que fueron utilizadas. En el cuarto apartado se evidencia los resultados obtenidos y, finalmente, en un quinto apartado se aprecian las conclusiones y reflexiones finales.

Elementos teóricos

El enfoque del álgebra temprana persigue el objetivo de introducir y desarrollar el pensamiento algebraico en la educación primaria a través de tareas planificadas que involucren las rutas de acceso al pensamiento algebraico (Butto y Rojano, 2004). Tales rutas de acceso utilizan tareas específicas con patrones y propiedades de las operaciones para desarrollar un pensamiento funcional y relacional para fomentar el tratamiento de la simbología y la modelización para expresar formas generales. Por esto Kieran *et al.* (2016) puntualizan que estos estudios se centran en el proceso de generalización; es decir, generalización a través del reconocimiento de patrones que convergen en una expresión funcional y también la generalización a través de propiedades de las operaciones, su estructura numérica y equivalencia.

Estas aproximaciones son posibles debido a que el álgebra reside implícitamente dentro del currículo de la matemática en primaria en sus diferentes bloques de contenido a través de sus problemas verbales, las operaciones básicas, el estudio de la proporcionalidad y los sistemas de representación como gráficas y tablas (Carraher y Schliemann, 2007). Esto implica que el profesorado involucrado en este nivel educativo debiera contar con lo que Blanton y Kaput (2003) denomina *ojos y oídos algebraicos*; esta es la razón por la que interesa indagar en los maestros de primaria dos situaciones:

1. La aplicabilidad o uso de las propiedades fundamentales, como la propiedad asociativa de la suma, la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la

adición, etcétera, además de la interpretación y distinción del uso del signo igual como equivalencia o como resultado; esto es, su pensamiento relacional.
2. El trabajo matemático que se realiza con los símbolos y las letras; esto es, el significado que se les asignan.

Respecto al primer punto sobre el pensamiento relacional, investigadores de esta corriente (Kızıltoprak y Köse, 2017; Stephens y Ribeiro, 2012; Carpenter *et al.*, 2005) apuntalan que fomentar este tipo de pensamiento puede ayudar a desarrollar un aprendizaje estructural de la aritmética, que más tarde impactaría en la habilidad para comprender y manipular las convenciones notacionales del álgebra. El pensamiento relacional tiene el potencial de favorecer y facilitar la algebrización de la aritmética al centrar la atención en la estructura que subyace a esta; es decir, "mirar a expresiones y ecuaciones en su totalidad y apreciar relaciones numéricas entre y dentro de las expresiones y ecuaciones" (Carpenter *et al.*, 2005, p. 6). Es en este sentido que los investigadores de esta línea refieren al trabajo de la igualdad como equivalencia al denotar un desarrollo simétrico en ambos lados del signo igual (7+8=6+9), en lugar de utilizarlo como un operador de un resultado (7+8=15); lo previo, posteriormente incide en la comprensión que los estudiantes tienen al momento de encontrar y resolver ecuaciones algebraicas que involucran literales en ambos lados del símbolo igual (Puig y Rojano, 2004). El pensamiento relacional es una alternativa a la aplicación de procedimientos estándares centrada en la consideración y exploración de las relaciones y estructura de los objetos o situaciones matemáticas, pensar más en relaciones que en operaciones específicas (Molina, 2009; Whitacre *et al.*, 2017).

Sobre el segundo punto, una referencia importante para el estudio del significado de las letras es la investigación realizada por Kücheman (1978), quien reporta la dificultad que presentan los estudiantes para asignar un significado al símbolo literal. El estudio realizado con 3,000 estudiantes de entre 13 y 15 años, a través de la aplicación de una prueba con 25 ítems, evidencia que todavía están en la etapa operacional concreta (7 a 11 años) frente al tratamiento de las literales. Identifica seis niveles para describir los diferentes significados de las letras:

1. Letra evaluada: a la letra se le asigna un valor numérico desde el inicio del proceso.
2. Letra ignorada: la letra se ignora; se reconoce su existencia, pero sin darle significado alguno.
3. Letra usada como objeto: la letra se usa como una abreviación o etiqueta para un objeto o como un objeto en sí mismo.
4. Letra usada como incógnita: la letra se trata como un número desconocido sobre el cual se puede operar.
5. Letra como número generalizado: la letra representa, o al menos es capaz de tomar, varios valores.
6. Letra usada como variable: la letra representa un conjunto de valores.

El trabajo de Kücheman ha sido referente para estudios relativos sobre el significado de las literales en diferentes trabajos (v.g. Knuth *et al.*, 2005; Asquith *et al.*, 2007). En este sentido, la tipología de Kücheman se ha visto ampliada por estas investigaciones. Knuth, *et al*. (2005) realizaron una investigación con estudiantes de 11 a 14 años a través del cual identificaron y clasificaron sus respuestas sobre la interpretación del símbolo literal y añadieron a la clasificación: la literal como número específico (y que difiere de la incógnita). En esta clasificación, el símbolo literal representa un número en particular. De igual forma, Asquith *et al*. (2007) trabajaron con profesores que impartían clases a estudiantes de entre 12 y 15 años y agregaron a la clasificación realizada por Kücheman la interpretación del símbolo literal como concatenación, que expresa la idea de que el símbolo representa el dígito en lugar de las unidades (sin considerar su valor posicional).

Particularmente, en este estudio es de interés abordar las nociones de equivalencia y propiedades de las operaciones enmarcadas en el pensamiento relacional. Respecto al significado de las literales, referimos al número generalizado, incógnita, variable y concatenación. A partir de estos elementos se seleccionaron dos tareas que se describen posteriormente.

Elementos metodológicos

El estudio de corte cualitativo, tipo exploratorio (Vasilachis, 2009), que aquí se presenta es parte de una investigación más amplia; el objetivo que se persigue es analizar e interpretar las soluciones llevadas a cabo por futuros maestros de primaria al enfrentarse a tareas matemáticas que involucran simbolismo.

Los sujetos de estudio

En la investigación participaron 40 maestros en formación conformado por 33 mujeres y 7 hombres, cuya edad oscilaba entre los 21 y 23 años. La selección de esta muestra fue incidental y por tanto no aleatoria (León y Montero, 2003), dado que la participación dependió de la disposición y consentimiento de los futuros maestros para participar en el estudio, así como del interés de su profesor (universitario) habitual en ser parte de la investigación. Los participantes cursaban el último año de la licenciatura en educación primaria y contaban con conocimientos previos de función y ecuación, análisis de los comportamientos de funciones lineales, cuadráticas y racionales, así como el uso de procedimientos para operar con expresiones algebraicas y resolver ecuaciones (Secretaría de Educación Pública, 2012).

El procedimiento y contexto del estudio

El estudio se realizó en una Escuela Normal para Maestros del sureste de México en el marco de una Licenciatura en Educación Primaria con duración de 4 años y cuyo plan de estudios contempla una asignatura obligatoria relativa al álgebra, titulada Álgebra: su enseñanza y aprendizaje (Secretaría de Educación Pública, 2012). La injerencia en este contexto se realizó en medida de contar con el consentimiento de las autoridades correspondientes de la institución. El instrumento de recogida de datos fueron dos tareas modificadas a partir de los elementos teóricos que se detallan más adelante y cuyo procedimiento de aplicación tuvo una finalidad diagnóstica. El trabajo fue completamente individual durante un periodo de 90 minutos por parte de los futuros maestros a los cuales se les asistió si necesitan algún tipo de aclaración.

Descripción y análisis previo de las tareas

Las dos tareas que fueron implementadas con los maestros en formación son de respuesta abierta y fueron seleccionadas de un conjunto de diferentes investigaciones referidas al álgebra en la escuela primaria, así como de los libros de texto. Para dicha selección se tomaron en cuenta dos criterios de análisis, por un lado, los diferentes significados de las literales (propuesta por Kücheman en 1978) y, por otro el uso de propiedades estructurales enmarcadas en el pensamiento relacional (Carpenter, Franke y Levi, 2003). A continuación, se realiza la descripción de cada una de las tareas, esta descripción permitió confrontar las soluciones esperadas con los hallazgos encontrados en las resoluciones de los futuros maestros de primaria.

La tarea 1 ha sido tomado del libro Anaya (Ferrero *et al*., 2007, p. 41) y plantea la resolución de dos multiplicaciones con cifras desconocidas en las que se precisa relacionar aspectos del funcionamiento y la estructura del algoritmo de la multiplicación de números naturales; también se encuentra inmersa la idea de relación (véase tabla 1). Este tipo de tareas son consideradas por Gallardo (2004) como problemas de matemáticas y no como simples tareas. Aunque se trata de poner de manifiesto un algoritmo, el resolutor se ve obligado a resolver mentalmente ecuaciones en el transcurso de la resolución. La autora recalca que el uso de tareas de resolución de multiplicaciones con cifras desconocidas ayuda a aprehender las propiedades de la multiplicación y alcanzar una comprensión conceptual del algoritmo. Así, la elección de esta tarea, cuyo contenido central es la multiplicación de números naturales, se realizó por ser una temática que se desarrolla en la escuela primaria y que los maestros pueden aprovechar para poner énfasis en el uso de propiedades susceptibles de ser potenciados.

Para la resolución de esta tarea, en el caso de la consigna 1, es posible aplicar las tablas de multiplicar y el algoritmo de la multiplicación en columna probando dígitos para hallar los productos parciales posibles, considerando los datos proporcionados. Sin embargo, lo que se espera es la manifestación de un modo relacional de percibir la tarea al considerar que la multiplicación y división son operaciones

Tabla 1. Tarea sobre multiplicaciones incompletas

Tarea 1. Completa las siguientes multiplicaciones y determina los números faltantes. No omitas ningún paso en tu procedimiento.

1)

$$\begin{array}{cccccc} & & & 4 & 2 & 7 \\ & & & \square & \square & 4 \\ \hline & & \square & \square & \square & \square \\ & 1 & 2 & 8 & 1 & \\ + & \square & \square & \square & & \\ \hline & 5 & 7 & 2 & 1 & 8 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{cccccc} & & & 3 & 9 & 4 \\ & & & \square & \square & 6 \\ \hline & & 2 & 3 & \square & 4 \\ + & \square & \square & \square & \square & \\ \hline & 8 & 1 & 1 & \square & \square \end{array}$$

Fuente: Construcción propia.

inversas y con esto proceder a dividir el producto final y el multiplicando, obteniendo el multiplicador; esto es, 572128/427=134. Se puede seguir el mismo razonamiento para obtener los productos parciales o bien realizar la multiplicación para hallar el resto de los números que faltan. Finalmente, el resolutor también podría denotar al multiplicador m como un valor desconocido que está relacionado con el multiplicando M (conocido, 427) y con el producto P (conocido, 57218) mediante la siguiente ecuación, $mM=P$ de donde $m=P/M$, para obtener que m=134. Este procedimiento implicaría la identificación y uso de relaciones inversas entre las operaciones, en este caso entre la multiplicación y división; el símbolo de cuadrado vacío y la letra m como incógnitas, es decir, números desconocidos. En este punto, es importante recalcar que el símbolo de cuadrado vacío se tendría que interpretar como dígito según su valor posicional, o bien aludir al dígito como concatenación sin considerar el valor posicional del mismo. Se puede proceder de manera similar para la consigna 2.

La tarea 2 fue tomada de Usinski (1989) e involucra el concepto de variable y el uso de las letras en igualdades que ponen de manifiesto las propiedades de las operaciones. Este autor indica que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes con las variables están relacionadas con la incapacidad de reconocer el rol correcto del símbolo literal (véase tabla 2).

Para dar solución a esta tarea, es posible proporcionar valores a las letras hasta encontrar aquellos que satisfacen las igualdades, aunque dicha asignación debiera considerar en algunos casos (1, 2, 4) que todo número multiplicado por cero es igual a cero, que el cero es neutro aditivo, que el uno es neutro multiplicativo, etcétera; en otros casos (como el 3, 5, 6 y 7) se obtiene a través de la aplicación de transformaciones elementales para encontrar los valores que satisfacen la igualdad. De esta manera, la tarea 2 pone énfasis en el significado de las letras, la identificación de propiedades y aplicación de trasformaciones en ambos lados de la igualdad haciendo uso de la equivalencia. Los símbolos literales se utilizan de manera analítica y adquieren un significado de incógnita, número generalizado y variable. De esta manera, las dos tareas seleccionadas promueven el uso de símbolos y literales cuya distribución queda manifiesta en la tabla 3.

Con la organización y análisis de las tareas, tomamos una postura en el mismo sentido que Aké y Godino (2018) cuando establecen que, aunque el carácter algebraico se refiere a la actividad matemática del estudiante y no a la tarea en sí, es decir, se basa en la actividad efectivamente desarrollada por los sujetos, es posible determinar y discernir entre tareas que pueden favorecer el pensamiento algebraico

Tabla 2. Tarea sobre igualdades verdaderas

Tarea 2. Analiza cada una de las expresiones siguientes y contesta: ¿qué valores deben tener las letras para que las siguientes igualdades sean verdaderas?

1) $36 \cdot b = b$	3) $c + c = c$	5) $12 \cdot a = a \cdot 12$	7) $2 \cdot b = b + 5$
2) $a \cdot a = a$	4) $b \cdot 0 = 0$	6) $c + c = c + 6$	

Fuente: Construcción propia.

Tabla 3. Aspectos que potencian las tareas seleccionadas

	Características	Tarea: Multiplicaciones incompletas — Consignas 1 y 2	Igualdades verdaderas 1	2	3	4	5	6	7
Símbolo y literal	Símbolo	x							
	Número generalizado			x					
	Incógnita	x	x		x			x	x
	Variable					x	x		
	Concatenación	x							
Pensamiento relacional	Equivalencia		x	x	x	x	x	x	x
	Propiedades	x	x	x		x			

Fuente: Construcción propia.

y de las que no, considerando los conceptos y procesos matemáticos que se ponen en juego. Además de confirmar lo que Butto y Rojano (2004) postulan sobre el papel importante de las tareas, es decir, solo a través de tareas planificadas que involucren rutas de acceso al pensamiento algebraico, es posible alcanzar un desarrollo. En el caso particular de este estudio referimos, como se ha mencionado previamente, a que las tareas demanden el trabajo simbólico.

Resultados y discusión

El análisis de los resultados fue organizado a partir de dos elementos: el grado de corrección y las formas de solución manifestadas por los maestros al momento de dar respuesta a las tareas matemáticas. Es en las formas de solución en las que se refiere y caracteriza la actividad matemática realizada por los futuros docentes y en las que se identifica si emerge o no el carácter relacional y significados de las literales.

Para el caso de la tarea 1, se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que se hallaron los valores faltantes (en ambas multiplicaciones) de modo correcto y evidenciaron o explicaron el procedimiento seguido. Las respuestas parcialmente correctas son en las que se determinan los números faltantes al menos en una multiplicación de manera correcta. Se consideraron incorrectas aquellas respuestas en las que se determinó de manera errónea los valores faltantes en ambas multiplicaciones (véase tabla 4). En esta tabla se señala que 28 de los 40 futuros maestros resolvió correctamente el ítem a) de la tarea; 7 de las respuestas fueron parcialmente correctas al resolver solo una multiplicación de manera correcta; 5 de los maestros en formación erró al resolverla.

Las formas de resolución manifestadas por los docentes en formación indican el conjunto de conocimientos que asocian a la tarea. En este sentido, se agruparon a los

Tabla 4. Grado de corrección y formas de solución a la tarea 1			
Grado de corrección	**Frecuencia de cada consigna 1 y 2**	**Forma de solución**	**Frecuencia**
Correcta	28	Relacional-simbólico	1
Parcialmente correcta	7	Relacional	3
Incorrecta	5	Aritmética	21
		Ensayo-error	15
Total	**40**	**Total**	**40**

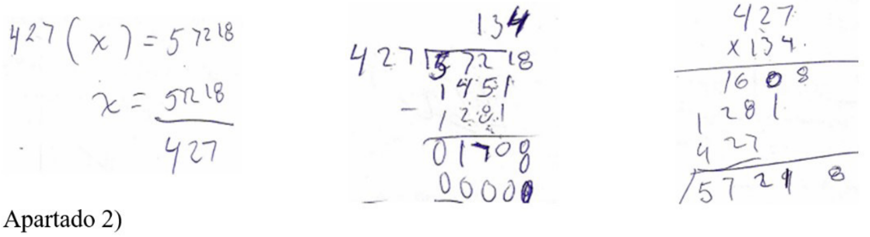
Fuente: Construcción propia.

40 maestros en formación por su forma de solución identificándose cuatro diferentes procedimientos para abordar la tarea 1 planteada. Existió una tendencia homogénea en la resolución de ambas consignas en cuanto a su forma de resolución; esto es, 15 estudiantes para maestro usaron el ensayo y error probando valores para resolver ambas consignas, sin una evidencia aparente u observable de la elección de estos valores, hasta encontrar aquellos dígitos que satisfacían los datos de la multiplicación; a esta forma de resolución se etiquetó como ensayo-error.

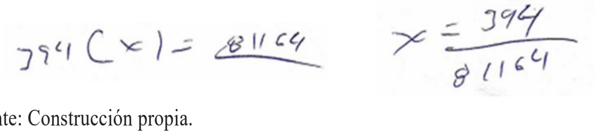
Por otro lado, 21 de los 40 estudiantes para docente evidenció utilizar el algoritmo de la multiplicación hallando los productos parciales posibles dígito a dígito, lo que se etiquetó como aritmético. Se destaca que tres de los estudiantes para maestro utilizaron el símbolo de manera global como concatenación, además de referir a las relaciones inversas de las operaciones para hallar los dígitos faltantes como parte de un número y no como dígitos independientes; esta forma de resolución se etiquetó como relacional, ya que no emergió ninguna denotación simbólica. La figura 1 muestra la resolución de un futuro maestro que se ha denotado como relacional-simbólica y que también fue catalogada como parcialmente correcta. Esta forma de solución es la que particularmente interesa enfatizar debido a que es en donde se manifiesta el uso de simbología algebraica y pensamiento relacional; en este caso, el futuro maestro hace uso de la literal como incógnita para expresar el valor que se desconoce (véase fig. 1).

Fig. 1. Resolución del estudiante para maestro E03 del tipo relacional-simbólico

Apartado 1)



Apartado 2)



Fuente: Construcción propia.

En la resolución se advierte que el futuro maestro identifica los valores faltantes del multiplicador de un modo global y lo designa como un número desconocido que hay que hallar. En ambos apartados de la tarea se utiliza el concepto de incógnita al designar con una *x* el valor del multiplicador; esto indica que los símbolos referidos al cuadrado vacío son interpretados como concatenación de dígitos que dan lugar, en este caso, al valor del multiplicador denotado por *x*. Emerge también el concepto de ecuación de la forma *Ax=b* utilizando el signo igual en su acepción como operador. Para la consigna 1 plantea la solución de esta en términos de una operación inversa entre la multiplicación y división, evidenciando la estructura de las relaciones inversas entre las operaciones. Finalmente, con la multiplicación halla los productos parciales que proporcionan los dígitos faltantes y también sirve de argumento para comprobar su respuesta como correcta. Sin embargo, en esta comprobación falla al realizar la multiplicación (del primer dígito del multiplicador por el multiplicando) y se vio obligado a forzar el resultado. Por otro lado, la consigna 2 no fue concluida; al parecer el maestro en formación no tiene claro cómo se opera las transformaciones elementales en ambos lados de la ecuación; aunque lo ejecutó de modo correcto en el primer apartado, en el segundo erró al plantear el valor de la *x*. La actividad exhibida por el maestro en formación manifiesta el reconocimiento en la tarea de las condiciones necesarias para el planteamiento de una ecuación y la expresión de una incógnita. Aunque la tarea potencia el reconocimiento de incógnitas y el análisis de relaciones inversas, que en este caso tendrían la multiplicación y la división, es el profesor quien debe poder apreciar en la tarea esas características que en la literatura son consideradas como algebraicas y subyacentes en la aritmética (Cai y Knut, 2011; Kieran *et al*., 2016).

Para el caso de la tarea 2, se consideraron como correctas la determinación de los valores numéricos que satisfacen la igualdad y por tanto la hacen verdadera; de lo contrario se consideró como incorrecta. En la tabla 5 se aprecia que las consignas 2), 4) y 5) resultaron difíciles por su alto porcentaje de respuestas incorrectas, al parecer porque las igualdades la satisfacen más de un valor numérico; en estos casos, los maestros en formación se remitieron a un solo caso. Los estudiantes para profesor no identifican la letra como número generalizado (consigan 2) en la expresión $a \cdot a = a$, en donde a puede tomar dos valores pues la expresión es válida cuando $a = 1$ o bien, cuando asignamos a la letra a el valor cero; lo mismo ocurre con el significado de la letra como variable (consigna 4 y 5) en la que las literales refieren a un conjunto de valores. En estos casos los futuros maestros no logran identificar este significado de las literales en las tareas (véase tabla 5).

Tabla 5. Grado de corrección y formas de solución a la tarea 2

Grado de corrección	**Frecuencia de cada consigna**							**Forma de solución**	**Frecuencia**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**		
Correcto	27	1	26	10	8	26	26	Relacional-simbólico	9
Incorrecto	3	29	4	20	22	4	4	Ensayo-error	21
No responde	10	10	10	10	10	10	10	No responde	10
Total				**40**				**Total**	**40**

Fuente: Construcción propia.

De la tabla también se colige que 21 de los 40 estudiantes para maestro usó una forma de resolución que se etiquetó ensayo-error, porque los valores numéricos elegidos para sustituir en la igualdad son asignados sin una justificación aparente u observable de dicha asignación. El valor numérico es probado para verificar si cumple con la igualdad. Por otro lado, nueve estudiantes resolvieron la tarea usando determinadas propiedades y operando con las literales, método que denominamos relacional-simbólico. Este tipo de solución es donde se recogieron las manifestaciones de simbología algebraica que utilizan los futuros maestros. En la figura 2 se muestra la resolución del alumno E20 que representa a la forma de solución relacional-simbólica.

En la actividad desarrollada por el estudiante E20 (véase figura 2) se aprecia cómo se ponen en juego transformaciones elementales, considerando la aplicación de operaciones en ambos lados de la expresión. A la vez que se opera con las literales, justifica la elección de los valores numéricos. En el caso particular de la igualdad $a \cdot a = a$ el alumno reconoce que no está definida una división por cero, pero no advierte que para dicha expresión el cero se admite como un valor numérico que hace que la igualdad sea verdadera.

De manera general, en las resoluciones de las dos tareas planteadas a los maestros en formación, las categorías relacional y relacional-simbólico evidencian el trabajo matemático a través del uso de propiedades y literales. Particularmente el uso de expresiones simbólicas en las soluciones para ambas tareas fue bajo (un futuro maestro para la tarea 1 y 9 para la tarea 2) y su uso reflejan mecanización, dado que

Fig. 2. Resolución de la tarea 2 por el estudiante para maestro E20.

1) $36 \cdot b = b$

$36 \cdot b = b$
$36b = b$
$36b - b = 0$
$35b = 0$
$\boxed{b = 0}$

2) $a \cdot a = a$

$)a \cdot a = a$
$\frac{a^2}{a} = \frac{a}{a}$
$\boxed{a = 1}$

3) $c + c = c$

$c + c = c$
$2c = c$
$2c - c = 0$
$\boxed{c = 0}$

4) $b \cdot 0 = 0$

$b \cdot 0 = 0$
"b" puede tomar cualquier valor, ya que todo número multiplicado por cero da como resultado cero.

5) $12 \cdot a = a \cdot 12$

$12 \cdot a = a \cdot 12$
"a" puede tomar cualquier valor, ya que simplemente se ha planteado una igualdad

6) $c + c = c + 6$

$c + c = c + 6$
$2c = c + 6$
$2c - c = 6$
$\boxed{c = 6}$

7) $2 \cdot b = b + 5$

$2 \cdot b = b + 5$
$2b = b + 5$
$2b - b = 5$
$\boxed{b = 5}$

Fuente: Construcción propia.

difícilmente concretan las relaciones o propiedades de las operaciones característicos de un pensamiento relacional. Además, utilizan con mayor frecuencia casos particulares y operaciones específicas para abordar las tareas, tal como indican el número elevado de soluciones por ensayo y error (15 para la tarea 1 y 21 para la tarea 2). Presentan inconsistencias al denotar con una letra o símbolo un valor desconocido y tienen dificultades para identificar que una literal puede tomar varios valores, o bien un conjunto de valores (el caso del futuro docente E20); esto significa que para los profesores una letra toma un solo valor específico. Lo previo sugiere que los docentes en formación asocian un solo significado a la letra, el de incógnita. Parece que la visión usual que estos futuros maestros tienen del álgebra se deriva de sus experiencias como estudiantes en la escuela media o bachillerato, pues la conciben como el conjunto de reglas y procedimientos para la manipulación de símbolos. Estos resultados sugieren la necesidad de un cambio de enfoque en los elementos formativos de los futuros docentes; es decir, no se trata de que los maestros de primaria lleven más materias de álgebra o de matemáticas de secundaria, sino proporcionarles durante su formación oportunidades para introducir el carácter algebraico de la matemática que se desarrolla en la escuela primaria que permita una aproximación al trabajo con la notación convencional algebraica (Carraher y Schliemann, 2007). Este requerimiento pone a consideración la formación de los maestros de primaria como ingrediente principal para que los niños puedan acceder a formas notacionales que contribuya al desarrollo de su pensamiento algebraico.

Conclusiones y reflexiones finales

Los resultados obtenidos indican que los maestros en formación recurren poco al uso de la simbología algebraica; piensan en operaciones específicas, por lo que utilizan la comprobación de casos sustituyendo determinados valores en las letras. Pese a que las tareas motivan el uso de diferentes significados de las literales, los futuros docentes están familiarizados con la incógnita; esto es un resultado esperado, dada la formación inicial de los futuros maestros. Por tanto, estos primeros resultados invitan al análisis de los planes y programas formativos de los docentes para incorporar el desarrollo de conocimientos que promuevan una comprensión de la notación algebraica que permita al futuro docente analizar potencialidades de las tareas que plantea en el aula, particularmente cuando utiliza los libros de texto para el trabajo con los niños (Castro, Martínez-Escobar y Pino-Fan, 2017).

Es necesario brindar oportunidades a los maestros en formación de desarrollar el pensamiento algebraico y conectarlo con el currículo de la primaria; se precisa que experimenten procesos de desarrollo de ideas matemáticas relacionadas con las propiedades de las operaciones, notaciones y las relaciones que subyacen en estas (Kieran 2017; Kieran *et al*., 2016). Incorporar actividades en la formación inicial de maestros de primaria como las que aquí se plantean permitiría promover el análisis y reflexión sobre el trabajo matemático en el aula y transformar la manera en la que el futuro maestro construye su práctica docente (Chapa y Fahara, 2015), una práctica en la que reconozca indicios de pensamiento algebraico en actividades matemáticas asumibles desde los primeros niveles educativos centrando el trabajo en las relaciones, propiedades y significado de las operaciones y notaciones, que son la base para el desarrollo de un pensamiento algebraico en los niños. Se trata de incorporar a la formación de maestros el estudio de situaciones que permitan repensar las notaciones y operaciones aritméticas de manera distinta a la típica; es decir, cultivar un nuevo modo de pensamiento aritmético en el que se puedan construir las nociones básicas del álgebra.

Los maestros tienen que ser conscientes de que los niños no tendrán que resolver problemas algebraicos, pero que es necesario proporcionarles un fundamento para el desarrollo de un pensamiento algebraico para que puedan afrontar el álgebra de secundaria (Capraro, Rangel-Chavez y Capraro, 2008).

Referencias

Aké, L.P. y Godino, J. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, *30*(2), 171-201.

Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E. y Alibali, M. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249-272.

Blanton, M.L. y Kaput, J.J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears: Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice. *Teaching Children Mathematics*, (10), 70-77.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, *16*(1), 113-148.

Burkardt, H. (2001). Algebra for all: ¿What does it mean? How are we doing? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (vol. 1, pp. 140-146). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Heidelberg, Alemania: Springer.

Capraro, M., Rangel-Chavez, A. y Capraro, R. (2008). Effective preparation for teaching of algebra at the primary level. *The 11th International Conference on Mathematics Education -ICME 11- for Topic Study Group 2: New developments and trends in mathematics education at primary level*. Monterrey, México.

Carpenter, T.P., Franke, M.L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Carpenter T.P., Levi, L., Franke, M.L. y Zeringue, J.K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, (37), 53-59.

Carraher, D.W. y Schliemann, A.L. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. En F. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing, NCTM.

Castro, W.F., Martínez-Escobar, J.D. y Pino-Fan, L.R. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *Journal of Research in Mathematics Education*, *6*(2), 164-191.

Chapa, M.C. y Fahara, M.F. (2015). La formación inicial de profesores en las escuelas normales. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, *6*(10), 28-35.

Cooper, T. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (eds.), *Early* *algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 187-211). Berlín, Alemania: Springer.

Figueroa-Millán, L. M. (2000). La formación de docentes en las escuelas normales: entre las exigencias de la modernidad y las influencias de la tradición. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 30(1), 117-142.

Ferrero, L. (2007). *Sexto de primaria: tercer ciclo. Matemáticas*. Madrid: Anaya.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales* (tesis doctoral no publicada). Universidad de Málaga, España.

Kaput, J.J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity for an engine of mathematical power by "algebraizing" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: NCTM, National Academy Press.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc., NCTM.

Kieran, C. (2017). *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-old: The global evolution of an emerging field of research and practice*. Nueva York: Springer.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Fong, S. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Hamburgo, Alemania: Springer.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23-26.

Kızıltoprak, A. y Yavuzsoy Köse, N. (2017). Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *10*(1), 131-145.

Knuth, E.J., Alibali, M.W., McNeil, N.M., Weinberg, A. y Stephens, A.C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence y variable 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, *37*(1), 68-76.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Stephens, M. y Ribeiro, A. (2012). Working towards algebra: The importance of relational thinking. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *15*(3), 373-402.

Secretaría de Educación Pública. (2012). *Plan de estudios de la licenciatura en educación primaria.* México: Dirección General de Educación Básica / SEP.

León, O.G. y Montero, I. (2003). *Métodos de investigación en psicología y educación.* España: McGraw-Hill.

Lins, R. y Kaput, J.J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th International Conference on Mathematics Instruction (ICMI)* (pp. 47-70). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *3*(3), 135-156.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)* (pp. 189- 224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W. y Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Hillsdale, MI: Lawrence Erlbaum Associates.

Usiskin, Z. (1989). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A.F. Coxford (ed.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Vasilachis, I. (2009). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.
Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 122-137.
Whitacre, I., Schoen, R.C., Champagne, Z. y Goddard, A. (2017). Relational thinking: What's the difference? *Teaching Children Mathematics*, *23*(5), 302-308.