http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i2p020-034

Atividades investigativas para exploração de conteúdos da Geometria Esférica com o GeoGebra

Investigative activities for exploring spherical geometry content with GeoGebra

DOUGLAS RIBEIRO GUIMARÃES[1]

ANA PAULA PEROVANO[2]

RESUMO

Este texto discute brevemente acerca da importância do desenho na construção do pensamento geométrico e tem como objetivo propor atividades para a exploração de conteúdos da Geometria Esférica utilizando o GeoGebra. Consideramos que importante no ensino de Geometria, trabalhar com este recurso que permite o aluno a transportar sua imagem mental para uma representação. Empregando o GeoGebra é possível construir uma multiplicidade de representações em que as propriedades e conjecturas da Geometria Esférica podem ser analisadas em comparação com os conteúdos da Geometria Euclidiana. Como trata-se de um tema ainda pouco explorado na Educação Básica, ponderamos que tais experiências possibilitam que os alunos confrontem e compreendam as diferenças existentes entre as geometrias.

Palavras-chave: Geometria Esférica; GeoGebra; Atividades.

ABSTRACT

This text briefly discusses the importance of drawing in the construction of geometric thinking and aims to propose activities for the exploration of Spherical Geometry contents using GeoGebra. We consider it important in the teaching of geometry to work with this feature that enables the student to carry his mental image to a representation. Using GeoGebra it is possible to build a multiplicity of representations in which the properties and conjectures of Spherical Geometry can be analyzed in comparison with the contents of Euclidean Geometry. As this is a topic still little explored in Basic Education, we consider that such experiences allow students to confront and understand the differences between geometries.

Keywords: Spherical Geometry; GeoGebra; Activities.

[1] Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP – douglasrguimaraes@hotmail.com - https://orcid.org/0000-0001-6247-3506

[2] Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB – paula.perovano@gmail.com - https://orcid.org/0000-0002-0893-8082

Introdução

O objetivo deste artigo é propor atividades para a exploração de conteúdos da Geometria Esférica utilizando o GeoGebra. Primeiro, trazemos a importância do desenho no ensino da Geometria, como uma forma de ilustrar o conceito a ser aprendido (GRAVINA, 1996; AMÂNCIO, 2013) e a utilização do software nesse processo.

Em um segundo momento, apresentamos definições sobre a Geometria Esférica, que surge a partir da Geometria Elíptica (DEVITO; FREITAS; PEREIRA, 2014). Essa última tem origem com a negação do 5º Postulado de Euclides (existência de reta paralela), além de algumas modificações em outros dois postulados para obter resultados consistentes. Trazemos, também, uma abordagem da Geometria Esférica na Educação Básica (ABREU; OTTONI, 2015), com foco no Ensino Médio.

Depois desta parte teórica, expomos algumas atividades práticas que podem ser trabalhadas com os alunos no GeoGebra, para isso, desenvolvemos uma ferramenta no software e a disponibilizamos em seu site, para livre exploração e investigação. Além disso, ilustraremos todas as atividades, com os passos a serem seguidos com a utilização desta ferramenta.

Esperamos que este texto possa destacar as possibilidades criadas despertando curiosidades no que tange ao ensino da Geometria Esférica, já que ela possui aplicações em várias áreas como: pavimentação esférica (DOS SANTOS; BREDA, 2017) e o armazenamento de Gás Liquefeito de Petróleo (GLP) em esferas (SILVA; SILVA, 2014), que além de ser mais eficiente ao liberar o gás contido nelas, auxilia em sua conservação.

1. A importância do desenho no ensino da Geometria

Um dos recursos mais empregados nas aulas de Geometria é a ilustração de um conceito por meio de um desenho que permite a interpretação e construção de ideias, por parte dos alunos, a respeito do conceito estudado.

Os desenhos são uma forma de visualizar o conceito matemático por meio de ilustrações "ajudam a sintetizar o raciocínio e, decisivamente, contribuem com ideias e argumentos usados para entender, enunciar, explicar, demonstrar ou descobrir algum fato matemático" (MORAIS FILHO, 2012, p. 323). O autor chama a atenção que para extrair informações do desenho traduzindo-as em linguagem matemática é necessário cuidado com a qualidade dos desenhos a serem empregados para não se induzir falsas considerações e conclusões.

Na perspectiva de Amâncio (2013), o desenho, o objeto, o conceito e a imagem mental são elementos essenciais para o ensino e aprendizagem da Geometria. O objeto está vinculado aos materiais didáticos utilizados, que devem servir de apoio na construção de novos conhecimentos, e que quando manipulados pelo aluno permite uma relação entre a teoria e a prática. O desenho é a forma de visualizar o conceito por meio de ilustrações. Segundo a autora, especificamente na Geometria plana, há uma tendência de os desenhos serem confundidos com os próprios conceitos. Nessa confusão, assume-se que o desenho de um triângulo, é o triângulo, por exemplo. Por sua vez, as imagens mentais correspondem à capacidade de um indivíduo de transcrever propriedades de algo quando o objeto ou desenho não está presente, sendo assim de natureza abstrata.

Nessa direção, a construção do conhecimento sobre um conceito geométrico depende da forma que se abarca esse conceito no que diz respeito aos elementos citados. Há uma tendência dos alunos na formação de imagens mentais a partir de uma maior vivência com a manipulação de determinados objetos e desenhos. Isso significa que "A pouca experiência com manipulação de objetos e os desenhos estereotipados, contribuem para que os alunos tenham imagens mentais reduzidas dos objetos geométricos" (AMÂNCIO, 2013, p. 47).

Por isso, é de fundamental importância no ensino de Geometria, trabalhar com ferramentas que auxiliem o aluno a transportar sua imagem mental para um desenho, experienciando um repertório maior de possibilidades de representação do objeto em questão. Quando a apresentação é restrita a apenas determinadas figuras predominantes e suas transposições, reduz também a construção do conhecimento, e com isso, o desenvolvimento do pensamento geométrico do indivíduo torna-se limitado aos recursos que lhes são apresentados.

Um recurso para abordar conteúdos de geometria de forma dinâmica é o GeoGebra que é um software de geometria dinâmica que possibilita tornar as aulas de geometria mais atrativas permitindo mostrar e explorar as construções e propriedades geométricas que seriam complexas de serem apresentadas na lousa com o giz. Na perspectiva de Gravina (1996) estes softwares podem ser entendidos como:

> [...] ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (GRAVINA, 1996, p. 6).

O ensino de geometria utilizando como recurso softwares de geometria dinâmica possibilita uma harmonia entre os aspectos figurais e conceituais além das multiplicidades de representações o que proporcionam uma aprendizagem qualitativamente diferente daquela sem a utilização deste recurso. A este respeito Cruz (2005) evidencia que,

> a compreensão dos conceitos geométricos é favorecida quando estes são explorados num ambiente dinâmico e interativo, pois, tal ambiente, configura-se num recurso que pode possibilitar a transição entre o conhecimento que o aluno já acumula e a facilidade para conjecturar o que o computador proporciona (CRUZ, 2005, p. 17).

Dessa forma, ao usar este recurso o aluno consegue movimentar as representações de figuras geométricas num ambiente interativo, no qual o aluno manipula seus elementos, utiliza as propriedades, realizando conjecturas, validando-as ou não o que contribui para uma aprendizagem diferenciada de geometria.

É recomendado pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017) estimular o desenvolvimento das relações espaciais, topológicas, projetivas e euclidianas com várias formas de representação. Consideramos que a Geometria Esférica é um caminho que possibilita abordar as relações espaciais desenvolvendo novas perspectivas para compreender os conceitos da Geometria Euclidiana.

2. Geometria Esférica

A Geometria Euclidiana era considerada inquestionável, até que houve a ruptura deste paradigma, em que "se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico" (BRASIL, 1998, p. 25). Assim, as Geometrias não-Euclidianas foram criadas no início do século XIX e abriram novas perspectivas para o desenvolvimento científico, como exemplo a Teoria da Relatividade, que só foi resolvida com a utilização da Geometria Elíptica.

Para caracterizar a Geometria Elíptica, após o surgimento da Geometria Hiperbólica, o matemático alemão Riemann também negou o 5º Postulado de Euclides, estabelecendo que quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro, dessa forma, nessa geometria não existem retas paralelas[3]. Além de negar o 5º Postulado é necessário modificar outros dois postulados de Euclides, pois senão essa Geometria seria inconsistente, assim, são inválidos o 1º e 4º postulados.

A Geometria Elíptica inclui outras geometrias: projetiva, estereográfica e hiper esférica (DEVITO; FREITAS; PEREIRA, 2014), nesse texto, abordaremos um tipo específico: a Geometria Esférica. Um modelo usado para representar essa geometria é a superfície esférica do espaço tridimensional euclidiano. Empregaremos o Modelo de Klein que é "semelhante (mas não igual) ao modelo do Disco de Poincaré para Geometria Hiperbólica" (ABAR, 2016, p. 139).

> O modelo plano de Klein é um círculo unitário. Os "pontos" são os pontos euclidianos dentro do círculo unitário, bem como os pares de pontos antípodas no círculo que são identificados. As "retas" são ou diâmetros do círculo unitário ou arcos das circunferências euclidianas que interceptam a circunferência do círculo unitário nas extremidades de um diâmetro (ABAR, 2016, p. 139).

A ideia de empregar esse modelo é também apresentar para os alunos a dificuldade que os matemáticos tinham no passado de fazer a representação tridimensional o que possibilita uma oportunidade para argumentar sobre a História da Matemática e a evolução das representações dos conceitos. Destaca-se o fato de que pesquisas com exploração do Modelo de Klein no GeoGebra são poucas

---

3 Para um maior aprofundamento ver Silva (2015) e Greenberg (1994).

(FRANCO; MENEZES, 2012; ABAR, 2016), e, em comparação com os trabalhos de Geometria Hiperbólica, com utilização do Modelo de Poincaré no GeoGebra, essa diferença é ainda maior[4]. A Figura 1 ilustra a representação de duas retas no espaço e no Disco.

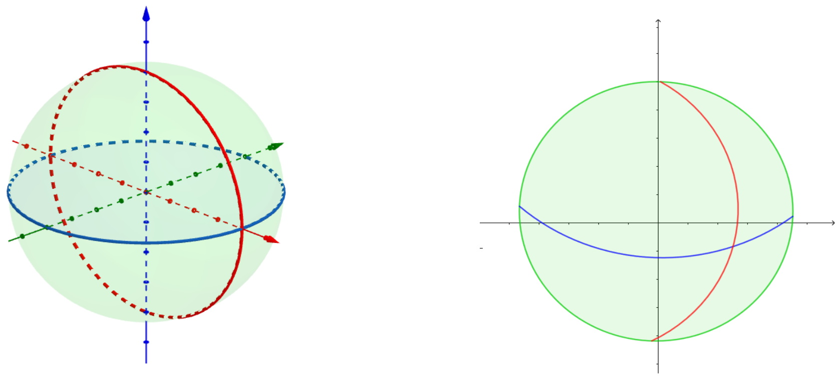


FIGURA 1: Representações de duas retas da Geometria Esférica no espaço e no Disco, respectivamente.
FONTE: Elaboração dos autores.

Algumas características dessa geometria é que pode ser comparada com a Geometria Euclidiana no seguinte sentido: um ponto tem a mesma definição em ambas as geometrias; uma reta é considerada ilimitada, porém, a mesma é finita, isso porque uma reta na Geometria Esférica pode ser vista como um círculo máximo de uma esfera (ou uma geodésica); e ainda, a não existência de retas paralelas.

Outros resultados dessa Geometria:

a) A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois ângulos retos;

b) Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, se interceptam;

c) Uma reta não é dividida em duas por um ponto;

d) A área de um triângulo é proporcional ao excesso da soma dos seus ângulos;

e) Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são congruentes.

[4] Ver as pesquisas, por exemplo, de Lovis e Franco (2012), Ribeiro e Gravina (2013) e Leivas, Portella e Souza (2017).

Ao final da Educação Básica os alunos podem possuir a ideia de que: a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, no entanto, essa afirmação só é válida quando estamos tratando de uma superfície plana, pois

> Numa superfície esférica a menor distância entre dois pontos (que podem ser consideradas duas cidades, se pensarmos no nosso planeta) não é um segmento de reta e sim um arco de circunferência máxima. A trajetória de um avião não é uma linha reta e sim, muitas vezes, o arco de uma circunferência. Essas são noções que devem ser trabalhadas na educação básica (ABREU; OTTONI, 2015, p. 2).

Nessa etapa da escolaridade os alunos já estudaram alguns conceitos da Geometria Esférica como por exemplo: a linha imaginária do equador, os trópicos e meridianos, o conceito de esfera, superfície esférica, volume da esfera, etc. portanto, ao propor um aprofundamento sobre a geometria esférica estamos articulando alguns conceitos que os alunos já tiveram contato, entretanto, muitos destes termos têm um significado no cotidiano que pode interferir na construção do conceito matemático. Além disso, é possível mencionar outras aplicações como: pavimentação da esfera e o armazenamento de (GLP) em esferas.

Dos Santos e Breda (2017) destacam que a pavimentação esférica é um campo que desperta interesse e um dos problemas clássicos é a pavimentação da esfera por triângulos congruentes, que se justapõem lado a lado. Segundo os autores:

> As aplicações do GeoGebra, até agora construídas, permitem a visualização e o estabelecimento de relações que, em muito, podem contribuir na investigação nesta área. É nesta grande variedade de configurações/relações, que acreditamos que o GeoGebra pode dar um contributo substancial na descrição e construção de pavimentações esféricas ainda não exploradas, para além de ser um recurso de grande utilidade no estudo da geometria esférica em geral (DOS SANTOS; BREDA, 2017, p. 76).

Silva e Silva (2014) efetuaram um estudo sobre problemas de otimização, especificamente sobre o problema de superfícies mínimas, utilizando-se do software GeoGebra como recurso computacional auxiliar buscaram para um dado volume fixo, obter aquele que apresenta a menor área superficial possível, evidenciaram que são utilizadas esferas para armazenamento de GLP, pois a ausência de vértices possibilita, quando esvaziadas, uma liberação do gás de forma mais eficiente.

Dessa forma, entendemos ser relevante apresentar algumas atividades da Geometria Esférica, uma vez que tal geometria auxilia na compreensão dos conceitos euclidianos, pois o aluno pode ser levado a fazer comparações ao expandir as definições euclidianas para a geometria da esfera, bem como a compreender como um sistema de axiomas pode ser modelado (LÉNÁRT, 1996, tradução nossa).

3. Propostas de Atividades

Esta seção apresenta algumas atividades investigativas desenvolvidas no GeoGebra para explorar alguns dos conceitos da Geometria Esférica, tais como segmentos, ângulos, posição relativa entre duas retas etc. Para efetuar essas construções utilizaremos a ferramenta Reta elíptica por dois pontos[5]. Tal ferramenta trata-se de uma representação da superfície esférica no plano euclidiano sendo uma aproximação do modelo proposto por Félix Klein (1849-1945), conforme já mencionado anteriormente. Para se construir uma reta elíptica[6], inicialmente, baixe a ferramenta e siga o esquema ilustrado pela Figura 2.

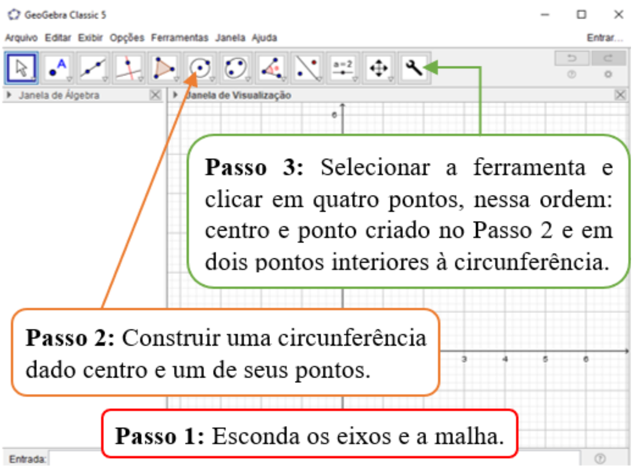


FIGURA 2: Recorte da tela inicial da ferramenta e seus primeiros passos.
FONTE: Elaboração dos autores.

[5] Ferramenta disponível em https://www.geogebra.org/material/show/id/msbg7rkv. Cabe ressaltar que esta ferramenta foi desenvolvida na versão 5.0 do GeoGebra.
[6] A partir deste ponto do texto utilizaremos a palavra "reta" para nos referir à reta elíptica. No caso da reta do plano euclidiano, ela será explicitada como "reta euclidiana".

Uma proposta de atividade inicial com esse recurso é solicitar que os alunos movam o ponto D de modo que este fique alinhado com A e C, conforme pode ser visualizado na Figura 3 a seguir.

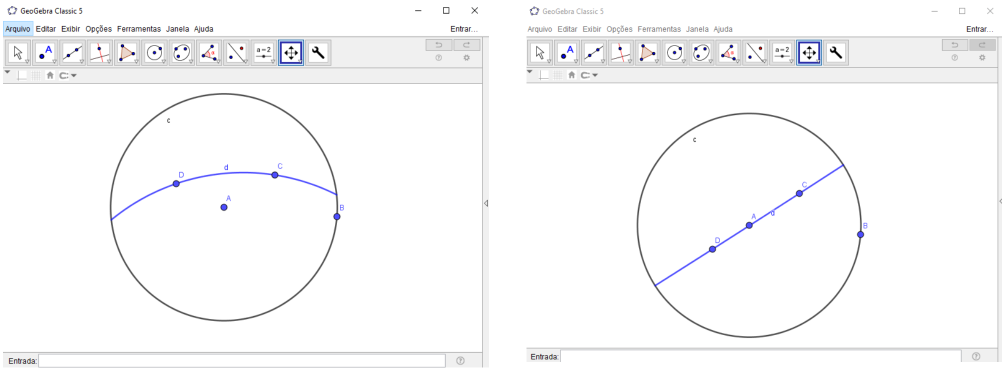


FIGURA 3: Representação da movimentação do ponto D.
FONTE: Elaboração dos autores.

Peça a seus alunos para movimentarem um dos pontos da reta (C ou D) em direção ao centro do disco e descrevam o que eles observam. A intenção é que os alunos percebam que ao efetuar o movimento a reta se aproxima da reta euclidiana. Cabe aqui um destaque, por mais que a reta se aproxima da representação de reta euclidiana, conforme já mencionamos, na representação as retas são cordas do disco, excluindo suas extremidades.

Para analisar as posições relativas entre duas retas deve-se solicitar que os alunos construam as duas retas e as movimente descrevendo as possíveis posições que elas assumem. A finalidade é que os alunos identifiquem a impossibilidade da existência de retas paralelas na Geometria Esférica. A construção das duas retas poderá ser realizada efetuando duas vezes o Passo 3, indicado na Figura 2. Sugerimos marcar a interseção entre as duas retas e movimentar as retas, para que o aluno veja que sempre há uma interseção entre elas, vale destacar que, no modelo apresentado o aluno só visualiza um ponto de interseção, porém, são dois, como exibido na Figura 4.

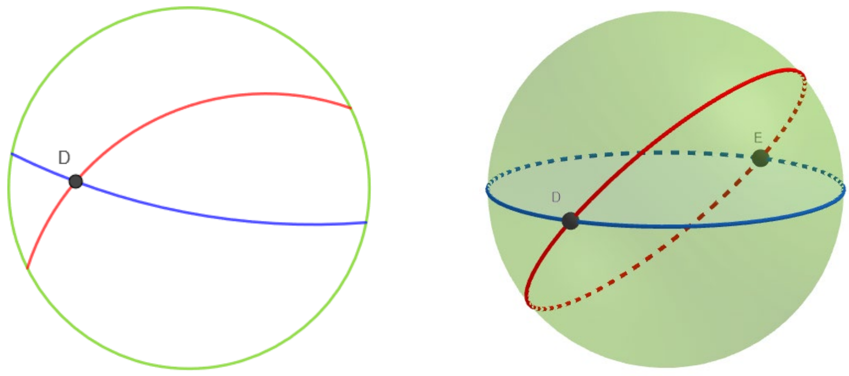


FIGURA 4: Representação da interseção de duas retas da Geometria Esférica no Disco e no espaço.
FONTE: Elaboração dos autores.

A construção do triângulo esférico pode ser feita repetindo o Passo 3 da Figura 2 três vezes, marcando as interseções das retas. Uma possibilidade de atividade além da construção é solicitar que os alunos arrastem um dos pontos de modo que movimente um dos vértices e analisem os diferentes formatos de triângulo possíveis. O objetivo desta tarefa é que os alunos percebam a diferença nas formas entre triângulo euclidiano e esférico. Uma proposta para investigação, nessa atividade, é questionar os alunos: qual é a soma dos ângulos internos do triângulo formado? Destine um tempo para a discussão e, em seguida, proponha (caso não apareça entre as respostas dos alunos) que construam um triângulo com vértices a partir das interseções das retas, exibindo os ângulos do mesmo para auxiliar na identificação que o triângulo esférico terá soma dos ângulos internos maior que 180º. Uma representação dessas construções está na Figura 5.

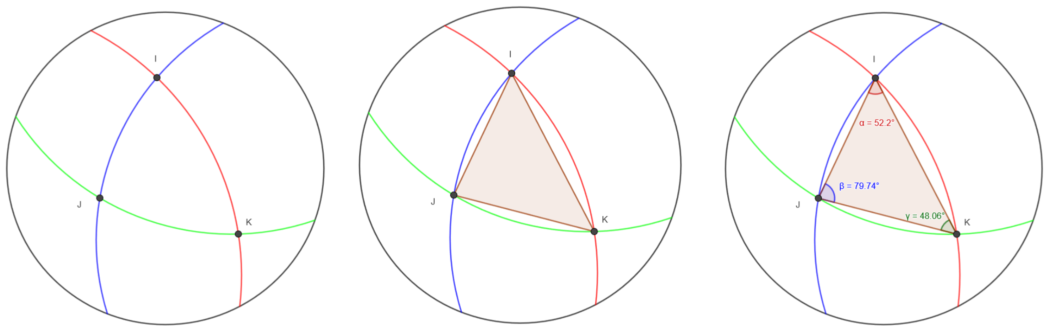


FIGURA 5: Representação do triângulo esférico, triângulo euclidiano e seus ângulos internos, respectivamente.
FONTE: Elaboração dos autores.

Esta atividade pode instigar os alunos a descobrir como determinar algum ângulo interno do triângulo esférico, visto que o GeoGebra não possibilita essa determinação da mesma forma que o triângulo euclidiano. Deixe os alunos explorarem os caminhos por eles imaginados. É possível que eles repliquem o mesmo comando utilizando a ferramenta “ângulo”, clicando sobre os três vértices, contudo, o ângulo indicado não será correspondente ao ângulo esférico, e sim ao euclidiano.

Abreu e Ottoni (2015, p. 10) definem ângulo esférico como: “o ângulo, formado por dois arcos de circunferências máximas. Sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas semirretas tangentes a esses arcos.” Portanto, para determinar os ângulos internos[7] no Disco de Klein é preciso traçar as tangentes das retas pelos seus respectivos vértices, conforme a Figura 6.

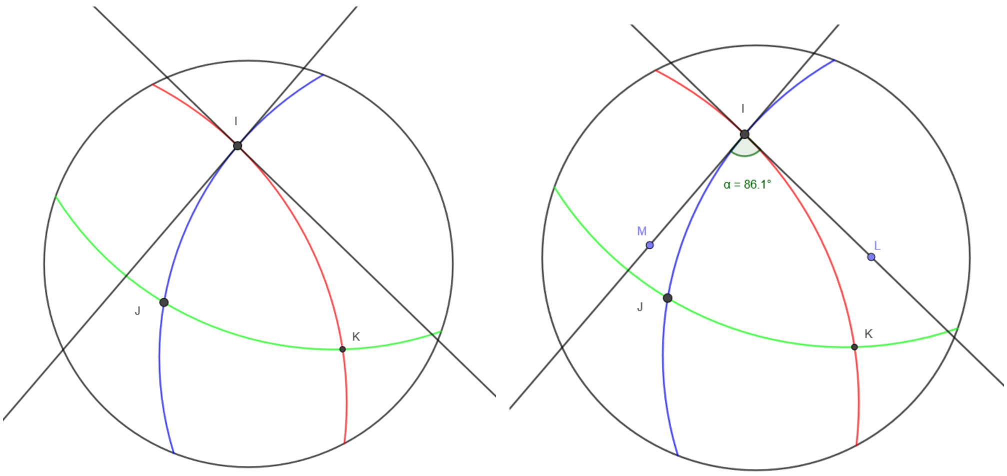
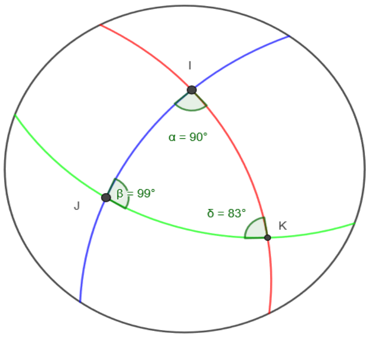
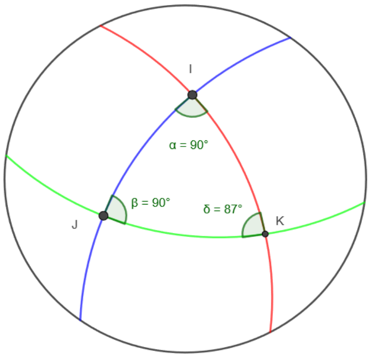
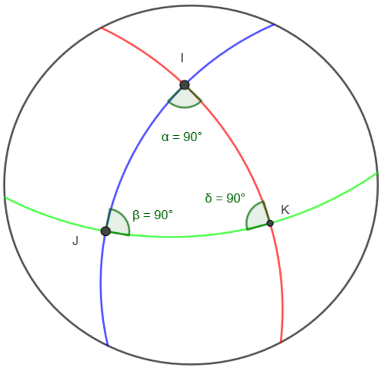


FIGURA 6: Representação de duas retas tangentes do triângulo esférico e o valor do ângulo interno.
FONTE: Elaboração dos autores.

Após determinar os ângulos do triângulo esférico faça a seguinte indagação: como podemos classificar os triângulos esféricos em relação aos ângulos? Deixe, novamente, um tempo para que os alunos discutam entre eles essa classificação.

O Quadro 1 foi elaborado a partir das leituras de Davis e Hersh (1995), com a denominação/definição e ilustração de acordo com a classificação dos tipos de triângulos esféricos.

[7] Esta construção também pode ser feita no plano tridimensional (DOS SANTOS; BREDA, 2017).

Denominação/Definição	**Ilustração**
Retângulo: um ângulo reto	
Birretângulo: dois ângulos retos	
Trirretângulo: três ângulos retos	

Quadro 1. Classificação dos triângulos esféricos quanto aos ângulos, elaborado pelos autores com a utilização do GeoGebra.

Estas propostas de investigação em Geometria Esférica buscam encorajar aos alunos comparar ideias, discutir e validar conjecturas contrastando-as com as definições euclidianas e compreendendo como pode ser modelado um sistema axiomático.

Considerações finais

As propostas apresentadas tinham o objetivo de iniciar uma discussão prática sobre Geometrias-não-Euclidianas, em particular a Geometria Esférica, fazendo o uso do GeoGebra. A abordagem utilizada pode favorecer o ensino dessa geometria no Ensino Médio, pois trabalha com experiências diversificadas para que os alunos possam confrontar e compreender as diferenças existentes entre as geometrias.

O trabalho com o GeoGebra, para o estudo não apenas da Geometria Esférica, mas como um todo na Geometria, auxilia a visualização do desenho para que o aluno tenha um primeiro olhar sobre os elementos essenciais que decorrem no ensino e aprendizagem dessa área. Sendo assim, o GeoGebra foi tomado como ponto de partida para o estudo sobre a geometria que ocorre no cotidiano dos alunos, ou seja, o mundo das Geometrias-não-Euclidianas.

Destacamos, ainda, que a exploração com o GeoGebra permite que os alunos conheçam a Geometria Esférica, entretanto, adaptações são necessárias, uma vez que o software está programado para seguir a geometria proposta por Euclides. Isso pode ser visto no cálculo dos ângulos internos de um triângulo, sendo indispensável traçar as retas tangentes aos lados passando pelo vértice.

Por fim, esperamos que este estudo possa despertar curiosidades no ensino da Geometria Esférica, bem como das outras Geometrias-não-Euclidianas, como a Geometria Projetiva, Hiperbólica e a Estereográfica, recorrendo ao GeoGebra como um facilitador dessa aprendizagem.

Referências

ABAR, C. A. A. P. O uso do GeoGebra na investigação da geometria elíptica. In: 6º CONGRESO URUGUAYO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2016, Montevidéu. *Anais* [...]. Montevidéu, 2016. Disponível em: <https://semur.edu.uy/curem6/actas/pdf/13.pdf>. Acesso em: 20 mai. 2019.

ABREU, S. M.; OTTONI, J. E. *Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas a astronomia de posição*. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado

Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT Universidade Federal de São João del-Rei. 2015.

AMÂNCIO, R. A. *O desenvolvimento do pensamento geométrico:* Trabalhando polígonos, especialmente *quadriláteros*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. 2013.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

CRUZ, D. G. *A utilização de Ambiente Dinâmico e Interativo na construção de conhecimento distribuído.* 188 p. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2005.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1995.

DEVITO, A.; FREITAS, A. K. F.; PEREIRA, K. C. *Geometrias Não- Euclidianas*. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao_euclidiana. Acesso em: 6 jul. 2019.

DOS SANTOS, J. M. D. S.; BREDA, A. M. D. Pavimentações esféricas com o geogebra, desafios e problemas em aberto. *In*: VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2017, Madrid. Disponível em: <http://www.cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_Conferencias.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2020.

FRANCO, V. S.; MENEZES L. P. G. Utilizando o GeoGebra para construção e exploração de um modelo plano para a Geometria Elíptica. In: Conferência Latinoamericana de GeoGebra, 2012, Montevidéu. *Anais* […], Montevidéu, 2012.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, v. 1, p. 1-13, 1996.

GREENBERG, M. J. *Euclidean and non-Euclidean geometries:* development and history. 3. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1994.

LEIVAS, J. C. P.; PORTELLA, H. P.; SOUZA, H. M. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na Escola Básica no Brasil com Geogebra. *Revista Thema*, v. 14, n. 3, p. 210-221, 2017.

LÉNÁRT, I. *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere:* activities comparing planar and spherical geometry. USA: Key Curriculum Press, 1996.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. Utilizando o GeoGebra para construção de modelos planos para a Geometria Hiperbólica. In: Conferência Latinoamericana de GeoGebra, 2012, Montevidéu. *Anais* […], Montevidéu, 2012.

RIBEIRO, R. S.; GRAVINA, M. A. Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no GeoGebra. *Revista Professor de Matemática On-line/SMB, Rio de Janeiro*, v. 1, n. 1, p. 53-66, 2013.

SILVA, L. N.; SILVA, M. P. Uma introdução ao estudo das superfícies mínimas utilizando o GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 3, n. 2, p. 120-131, 2014.

SILVA, W. D. *Uma introdução à Geometria Esférica*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2015.