Juegos y Rarezas Matemáticas

Adivinación cobriza

Copper-colored divination

Aurelio Sánchez Estévez

Revista de Investigación

Volumen XI, Número 1, pp. 091−100, ISSN 2174-0410
Recepción: 25 jun'20; Aceptación: 1 sep'20

1 de abril de 2021

Resumen

Este artículo analiza un caso particular de las sucesiones de de Bruijn que se utilizará para crear un juego de mentalismo en el que intervendrán cuatro espectadores. El efecto consiste en averiguar el medio de transporte pensado por cada uno de los participantes entre un total de dieciséis vehículos terrestres, aéreos y marítimos. Como punto de partida para la creación del juego se define en primer lugar el concepto de sucesión de de Bruijn, que se ejemplifica mediante una sucesión de orden n que usa los símbolos 0 y 1 como alfabeto y una explicación sobre cómo construir este tipo de sucesiones usando los denominados grafos de de Bruijn.

Palabras Clave: matemáticas discretas, combinatoria, sucesiones de de Bruijn, grafos de de Bruijn, ilusionismo, magia, mentalismo, magia matemática, matemagia.

Abstract

This article analyzes a specific case of de Bruijn's sequences that will be used to create an effect of mentalism in which four spectators can participate. The effect is to figure out the means of transport that each participant in the trick is thinking of among a total of sixteen terrestrial, aerial and maritime vehicles. As a starting point for the creation of the trick, the concept of a de Bruijn sequence is first defined, which is exemplified by a sequence of order 4 that uses an alphabet consisting of the symbols 0 and 1 and an explanation on how to create this kind of sequences using the so-called de Bruijn graphs.

Keywords: discrete mathematics, combinatorics, de Bruijn sequences, de Bruijn graphs, illusionism, magic, mentalism, mathematical magic, mathemagic.

1. Las sucesiones de de Bruijn

Dentro del área de las matemáticas discretas, las sucesiones de de Bruijn pertenecen a la rama de la combinatoria, que entre otras cuestiones estudia la manera de ordenar o agrupar un número de elementos determinado.

El nombre de estas sucesiones procede del matemático neerlandés Nicolaas Govert de Bruijn que escribió acerca de ellas en 1946. Sin embargo, Camille Flye Sainte-Marie ya había descubierto este tipo de sucesiones 52 años antes y el propio de Bruijn reconoció la precedencia de Flye en un artículo publicado en 1975. Su utilidad abarca campos tan diversos como pueden ser la genética o la criptografía, pero también podemos encontrar algunas aplicaciones lúdicas en el ámbito del ilusionismo que sin duda sorprenderán incluso a los conocedores de muchos otros juegos de magia basados en las matemáticas.

1.1 Definición y caso particular

Podemos definir una sucesión de de Bruijn de orden n que usa un alfabeto de k símbolos como una sucesión cíclica en la que todas las subsucesiones posibles de longitud n ocurren una y solo una vez.

Para entender la definición anterior vamos a construir como ejemplo una sucesión de de Bruijn con un alfabeto de dos símbolos, que va a estar compuesto exclusivamente por el cero y el uno. Dicho de otra forma, el parámetro k *v*a a tomar el valor 2 (k = 2) y el alfabeto vendrá definido por el conjunto {0, 1}. En la definición que nos ocupa, los símbolos 0 y 1, que son los empleados por el sistema de numeración binario, se pueden agrupar formando cadenas de una determinada longitud. En nuestro ejemplo esa longitud vendrá dada por n = 4. Podemos pensar en estas cadenas como palabras de 4 letras, solo que en este caso las "letras" de nuestro alfabeto serían exclusivamente los símbolos 0 y 1.

Como queremos que nuestra sucesión de de Bruijn sea de orden 4, tiene que contener todas las cadenas posibles de longitud 4 que se pueden construir usando los dos elementos de nuestro alfabeto. El número total de estas cadenas, a las que hemos llamado subsucesiones en la definición anterior, se calcula elevando el número de símbolos del alfabeto al orden de la sucesión, es decir, k^n. En nuestro caso 2^4 = 16. Si las enumeramos todas, obtenemos las siguientes cadenas:

Tabla 1. Subsucesiones o cadenas de longitud 4

1	0000	**5**	0100	**9**	1000	**13**	1100
2	0001	**6**	0101	**10**	1001	**14**	1101
3	0010	**7**	0110	**11**	1010	**15**	1110
4	0011	**8**	0111	**12**	1011	**16**	1111

Por otro lado, como se dice en la definición, la sucesión de de Bruijn tiene que ser cíclica y las cadenas que contiene deben aparecer solamente una vez. Esto significa que a medida que avancemos por la secuencia, cada grupo de cuatro elementos que podamos formar debe ser diferente de todos los anteriores y así hasta llegar a la decimosexta cadena, tras la cual volvería a comenzar el ciclo. Por supuesto, no cualquier secuencia de ceros y unos cumple esas condiciones. En nuestro caso, utilizaremos como ejemplo la sucesión 0000111101100101 formada por 16 dígitos.

0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1

Figura 1. Sucesión de de Bruijn de 16 dígitos

Podemos verificar que empezando por el lado izquierdo se formaría la cadena 0000. Si ahora saltamos una posición hacia la derecha y comenzamos a contar a partir del segundo elemento, la siguiente cadena es 0001; si iniciamos la cuenta a partir del tercer elemento, obtenemos la cadena 0011 y así sucesivamente hasta llegar a la cadena 1000 que es la decimosexta y que está formada por el último dígito del lado derecho y los tres primeros del lado izquierdo. A partir de este momento, la secuencia es cíclica ya que regresaríamos a la primera cadena. Además, las 16 cadenas son diferentes entre sí y no falta ninguna. Por lo tanto, 0000111101100101 es una sucesión de de Bruijn con parámetros $k = 2$ y $n = 4$.

0000	0001	0011	0111	1111	1110	1101	1011
0110	1100	1001	0010	0101	1010	0100	1000

Figura 2. Subsucesiones o cadenas de longitud 4

1.2 Grafos de de Bruijn

Para poder crear este tipo de sucesiones se utilizan los denominados grafos de de Bruijn. Un grafo, de forma general, se puede definir como un esquema en el que se representan unos elementos llamados nodos o vértices, que se encuentran unidos mediante otros denominados arcos o aristas que sirven para simbolizar las relaciones entre los nodos.

El primer paso para generar un grafo de de Bruijn es determinar la cantidad de vértices que lo componen, que se calcula elevando k, que en nuestro caso toma el valor 2, a la longitud de las cadenas de la sucesión menos 1, es decir, a $n - 1$. Como hemos considerado que $n = 4$, la cantidad de vértices será $2^{4-1} = 2^3 = 8$

A cada vértice del grafo le asociaremos una cadena que tenga longitud $n - 1$, en este caso $4 - 1 = 3$. Las 8 únicas cadenas de 3 elementos que se pueden construir con nuestro alfabeto son 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111. Estas cadenas serán las etiquetas asignadas a cada vértice.

Posteriormente añadimos las aristas que unen los vértices. Para que dos vértices puedan estar unidos se tiene que cumplir que la parte derecha de la etiqueta del primer vértice tiene que ser igual a la parte izquierda de la etiqueta del segundo vértice. Por ejemplo, el vértice 100 se puede unir con el 000, porque el primer vértice termina en 00 y el segundo empieza por 00. Sin embargo, el vértice 100 no se puede unir con el 111. Hay que tener en cuenta dos aspectos muy importantes:

- Es posible que un vértice esté unido consigo mismo, siempre que cumpla la condición.

- En este grafo es fundamental la dirección de las aristas, es decir, en qué vértice empiezan y en qué vértice terminan. Esto se indica poniendo una pequeña flecha en cada arista. Este tipo de grafos reciben el nombre de grafos dirigidos.

Por último, tenemos que poner una etiqueta a cada arista. Para ello, formamos una cadena de longitud 4 que empiece con los dos primeros dígitos de la etiqueta del vértice inicial y termine con los dos últimos dígitos de la etiqueta del vértice final. Por ejemplo, la arista que va desde el vértice 000 al 001 tendríamos que etiquetarla con la cadena 0001.

Teniendo en cuenta lo explicado anteriormente, llegaríamos a un grafo como el siguiente:

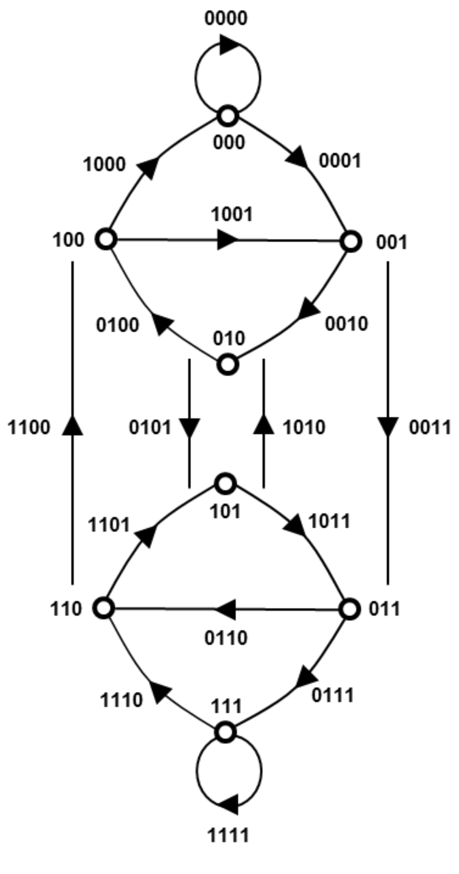

Figura 3. Grafo de de Bruijn con parámetros k = 2 y n = 4

Construir una sucesión de de Bruijn a partir de este grafo resulta muy sencillo. Elegimos para empezar un vértice cualquiera y a partir de él recorremos el grafo siguiendo las flechas de manera que pasemos por todas las aristas una única vez. No importa si pasamos más de una vez por los vértices, pero sí es necesario que al final lleguemos otra vez al vértice de partida y que no nos dejemos ninguna arista sin recorrer. Esto se conoce como un circuito euleriano.

Como ejemplo vamos a empezar nuestro itinerario en el vértice 000, después tomamos la arista 0000, que nos deja otra vez en el vértice 000. Ahora recorremos la arista 0001 y llegamos al vértice 001 y así sucesivamente. Existen varias maneras diferentes de continuar, no importa cuál elijamos. Por ejemplo, podríamos pasar por los vértices 000, 000, 001, 011, 111, 111, 110, 101, 011, 110, 100, 001, 010, 101, 010, 100 y 000 (que es otra vez el vértice de partida). Para ello tenemos que recorrer las aristas 0000, 0001, 0011, 0111, 1111, 1110, 1101, 1011, 0110, 1100, 1001, 0010, 0101, 1010, 0100 y 1000. Nos daremos cuenta de que habremos pasado por todas y sin repetir ninguna.

Si nos fijamos bien en los vértices que vamos recorriendo, cada uno de ellos termina con los dos mismos símbolos con el que empieza el siguiente. Si escribimos solo el primer dígito de cada vértice (sin contar el último que es repetición del primero) obtenemos 0000111101100101. También se llega al mismo resultado si escribimos el primer dígito de cada arista.

Pues bien, la sucesión de de Bruijn que hemos utilizado como ejemplo es precisamente 0000111101100101. Se puede comprobar fácilmente que contiene todas las cadenas de longitud 4, correspondientes a las aristas que hemos recorrido.

A medida que la longitud de las cadenas se incrementa, es decir, a medida que n aumenta, se hace muy difícil encontrar circuitos eulerianos.

2. Aplicación a un juego de mentalismo: *Adivinación cobriza*

Tomando como punto de partida los conceptos explicados, contamos ya con todas las herramientas necesarias para crear nuestro juego y entender su funcionamiento.

Recordemos que en la sucesión de de Bruijn construida en el apartado anterior, utilizamos un alfabeto de dos símbolos (k = 2), compuesto por el 0 y por el 1 y que la longitud de las cadenas era n = 4, lo que nos permitía crear la sucesión 0000111101100101 compuesta por 16 dígitos.

Gracias a que la sucesión es cíclica y a que las 16 cadenas o subsucesiones que la componen no se repiten, podemos diseñar un juego de mentalismo en el que seremos capaces de adivinar los medios de transporte en los que están pensando 4 personas. Para ello vamos a elaborar en primer lugar una tabla en la que aparezcan distintos tipos de vehículos, clasificándolos en terrestres, aéreos y marítimos.

Tabla 2. Clasificación de vehículos

Vehículos terrestres	**Vehículos aéreos**	**Vehículos marítimos**
Automóvil	Ala delta	Buque
Autobús	Avión	Canoa
Bicicleta	Cohete	Ferry
Camión	Dirigible	Moto acuática
Motocicleta	Dron	Submarino
Patinete	Globo aerostático	Transatlántico
Tren	Helicóptero	Velero
Trineo	Parapente	Yate

De los vehículos anteriores elegiremos un total de 16, que escribiremos o dibujaremos en otras tantas tarjetas, preferiblemente recortadas de una cartulina de buena calidad. Para este juego, seleccionaremos 8 vehículos terrestres, 4 aéreos y 4 marítimos, según se refleja a continuación:

Tabla 3. Clasificación de vehículos seleccionador para el juego

Vehículos terrestres	**Vehículos aéreos y marítimos**
Automóvil	Avión
Autobús	Canoa
Bicicleta	Globo aerostático
Camión	Moto acuática
Motocicleta	Helicóptero
Patinete	Submarino
Tren	Parapente
Trineo	Velero

La clasificación anterior nos va a permitir asociar estos vehículos a la sucesión de de Bruijn 0000111101100101, de tal manera que los vehículos terrestres se pueden vincular al valor 1 y los vehículos no terrestres, es decir, la selección final que hemos hecho de vehículos aéreos y marítimos al valor 0.

Las tarjetas irían colocadas de arriba a abajo en el mismo orden que la sucesión según se muestra en la *Tabla 4*, de manera que si colocamos el grupo de dieciséis tarjetas cara abajo sobre la palma de la mano, la primera de ella sería la que tiene escrita la palabra *Avión* y la última, la que reposa sobre nuestra palma, la que contiene la palabra *Trineo*.

Tabla 4. Asignaciáon de vehículos a cada dígito de la sucesión de de Bruijn

0	Avión
0	Canoa
0	Globo aerostático
0	Moto acuática
1	Automóvil
1	Autobús
1	Bicicleta
1	Camión
0	Helicóptero
1	Motocicleta
1	Patinete
0	Submarino
0	Parapente
1	Tren
0	Velero
1	Trineo

Recordemos ahora que de la sucesión anterior se derivan 16 cadenas diferentes. Cada una de ellas es única y podemos asignarle los vehículos siguiendo el mismo orden que aparece en la *Tabla 4*. Una vez realizada la asignación, tendríamos lo siguiente:

Tabla 5. Asignación de vehículos a cada subsucesión o cadena

0	0	0	0	Avión	Canoa	Globo aerostático	Moto acuática
0	0	0	1	Canoa	Globo aerostático	Moto acuática	Automóvil
0	0	1	1	Globo Aerostático	Moto acuática	Automóvil	Autobús
0	1	1	1	Moto acuática	Automóvil	Autobús	Bicicleta
1	1	1	1	Automóvil	Autobús	Bicicleta	Camión
1	1	1	0	Autobús	Bicicleta	Camión	Helicóptero
1	1	0	1	Bicicleta	Camión	Helicóptero	Motocicleta
1	0	1	1	Camión	Helicóptero	Motocicleta	Patinete
0	1	1	0	Helicóptero	Motocicleta	Patinete	Submarino
1	1	0	0	Motocicleta	Patinete	Submarino	Parapente
1	0	0	1	Patinete	Submarino	Parapente	Tren
0	0	1	0	Submarino	Parapente	Tren	Velero
0	1	0	1	Parapente	Tren	Velero	Trineo
1	0	1	0	Tren	Velero	Trineo	Avión
0	1	0	0	Velero	Trineo	Avión	Canoa
1	0	0	0	Trineo	Avión	Canoa	Globo aerostático

Necesitarás también un cuaderno de los que tienen las páginas unidas por una espiral en el lado izquierdo. En él escribirás o pegarás en la parte interior de la portada una nota impresa con el contenido de la *Tabla 5,* en la que se relaciona cada cadena de cuatro dígitos con los cuatro vehículos correspondientes. Sin embargo, en lugar de reproducir la tabla anterior tal y como la hemos presentado, una alternativa mejor consistiría en organizar las cadenas en orden creciente, para que a la hora de localizar la que te interesa el proceso sea más rápido. Además, la tabla se podría imprimir con una tonalidad más suave para que pase totalmente desapercibida tal y como se muestra en la *Figura 4*. La finalidad, como verás en detalle más adelante, es que puedas consultar la información que te permite saber los vehículos pensados por los espectadores sin que estos puedan sospechar en ningún momento que en realidad lo estás haciendo con la ayuda del propio cuaderno. Por otro lado, la manera de manejarlo durante el transcurso del juego impide que el público pueda ver los datos que contiene y que son la clave para realizar con éxito la adivinación.

La información, una vez optimizada para nuestros propósitos, presentaría el siguiente aspecto:

0	0	0	0	Avión	Canoa	Globo aerostático	Moto acuática
0	0	0	1	Canoa	Globo aerostático	Moto acuática	Automóvil
0	0	1	0	Submarino	Parapente	Tren	Velero
0	0	1	1	Globo Aerostático	Moto acuática	Automóvil	Autobús

0	1	0	0	Velero	Trineo	Avión	Canoa
0	1	0	1	Parapente	Tren	Velero	Trineo
0	1	1	0	Helicóptero	Motocicleta	Patinete	Submarino
0	1	1	1	Moto acuática	Automóvil	Autobús	Bicicleta

1	0	0	0	Trineo	Avión	Canoa	Globo aerostático
1	0	0	1	Patinete	Submarino	Parapente	Tren
1	0	1	0	Tren	Velero	Trineo	Avión
1	0	1	1	Camión	Helicóptero	Motocicleta	Patinete

1	1	0	0	Motocicleta	Patinete	Submarino	Parapente
1	1	0	1	Bicicleta	Camión	Helicóptero	Motocicleta
1	1	1	0	Autobús	Bicicleta	Camión	Helicóptero
1	1	1	1	Automóvil	Autobús	Bicicleta	Camión

Figura 4. Cadenas organizadas en orden creciente

Supondremos que los espectadores se encuentran situados en frente de la persona que realiza el juego. Se puede presentar diciendo que tienes varias tarjetas en las cuales está escrito el nombre de un vehículo, al tiempo que las muestras nombrando varios de ellos y mencionando que los vehículos pueden ser terrestres, aéreos o marítimos. A continuación, le pedimos a un espectador que sujete el grupo de tarjetas cara abajo y que corte tantas veces como quiera. Después le puedes indicar que se lo entregue a alguien más para que corte también. Una vez finalizado este proceso, darás instrucciones a la persona que está sujetando las tarjetas para que mire la que ha quedado arriba del todo (Tarjeta 1) y que la guarde por un momento en su bolsillo, que entregue la siguiente (Tarjeta 2) al espectador que tiene a su izquierda, otra más (Tarjeta 3) al que está a continuación de este y una última tarjeta (Tarjeta 4) al siguiente. La manera en la que se distribuyen los espectadores y las tarjetas es muy importante para facilitar los siguientes pasos del juego. Desde tu posición, la distribución descrita se podría representar esquemáticamente de la siguiente forma:

Tabla 6. Posición de los espectadores en frente de la persona que realiza el juego

Espectador 1	**Espectador 2**	**Espectador 3**	**Espectador 4**
Tarjeta 1	Tarjeta 2	Tarjeta 3	Tarjeta 4

Para continuar, pedirás al primer espectador que te entregue las tarjetas sobrantes, que guardarás sin necesidad de mirarlas, y que vuelva a tomar la que dejó en el bolsillo. Recuerda que le dijimos que lo hiciera para poder entregar las otras tres tarjetas a los espectadores que estaban a su izquierda. Ahora solicitarás que todos ellos se concentren en el vehículo que han visto escrito y que se imaginen que están viajando en él porque vas a tratar de adivinar cuál es. Sacas a continuación el cuaderno que habías preparado de antemano y dices que vas escribir el nombre de los vehículos que te vayan transmitiendo mentalmente, aunque todavía no lo abrirás. Llegado el momento, también puedes optar por dibujarlos si se te da bien. Simulas concentrarte y tras unos segundos comentas que te llegan varias imágenes entremezcladas. Continúas explicando que hay vehículos terrestres, aéreos y marítimos y pides que levanten la mano los espectadores que estén pensando en algún vehículo terrestre. Podría ocurrir que todos levanten la mano, que no la levante ninguno, o que la levanten una, dos o tres personas. En cualquiera de los cinco casos y gracias a la sucesión de de Bruijn sabrás en qué vehículo está pensando cada espectador. Por ejemplo, vamos a suponer que el segundo y el tercer espectador levantaron la mano. Les pedirás que la bajen y que se concentren en su vehículo. Ahora abres tu cuaderno de manera que a la derecha se encuentre la primera página en blanco y a la izquierda la imagen del interior de la portada. Te fijarás en la secuencia 0110 ya que es la que nos indica que en la segunda y tercera posición hay un vehículo terrestre:

Tabla 7. Vehiculos pensados por los espectadores

0	1	1	0	Helicóptero	Motocicleta	Patinete	Submarino

Por lo tanto, el primer espectador estará imaginando que vuela en un helicóptero, el segundo que conduce una motocicleta, el tercero que se desplaza en un patinete y el cuarto que se encuentra a bordo de un submarino. Adivinas en primer lugar el vehículo del segundo espectador y lo escribes en letras mayúsculas (o lo dibujas) mostrándolo para que te diga si es correcto. La manera de enseñarlo es muy sencilla: con el cuaderno abierto y mirando hacia ti, girarás hacia los espectadores el bloque completo de páginas para mostrarles lo que acabas de escribir en la primera de ellas, de manera que el interior de la portada con la información que has consultado quedará frente a ti y oculto a la vista de los espectadores. Si quieres, puedes arrancar la página y continuar adivinando los vehículos elegidos por los otros tres espectadores de la misma manera. En realidad, como ya conoces los cuatro vehículos elegidos, no necesitas volver a consultar la tabla con la información, de manera que lo que puedes hacer es pasar a la segunda página del cuaderno para escribir el vehículo del tercer espectador y proceder igualmente con el primero y el cuarto. La ventaja de hacerlo así, es que en las siguientes ocasiones en las que muestres el cuaderno lo podrás hacer de forma totalmente despreocupada porque la información que consultaste quedará oculta por las páginas previas.

Este juego está basado en la dualidad que podemos encontrar en el tipo de elementos que utilizamos. En el caso de los vehículos, el juego funciona porque, aunque todos ellos son diferentes, los estamos clasificando en dos tipos: los terrestres y todos los demás (aéreos y marítimos). Por lo tanto, la idea es extrapolable a cualquier grupo de elementos en el que podamos encontrar esa dualidad, como por ejemplo instrumentos musicales (de cuerda por un lado y de viento y percusión por otro), las cartas de una baraja (rojas y negras) o diferentes tipos de alimentos[1]. Además, este efecto también se puede realizar con conjuntos de menor o mayor tamaño, como aquellos compuestos por 8 o 32 objetos.

1 Artur Antúnez Vitales, profesor de secundaria de Gerona, presentó en el II Encuentro de Ciencia, Magia y Educación celebrado en diciembre de 2017 varios juegos basados en las sucesiones de de Bruijn, entre ellos uno en el que tres espectadores elegían cada uno una carta en la que aparecía representado un alimento. En este caso particular la dualidad venía dada por el hecho de que el alimento fuera una comida o una bebida.

En caso de que te hayas preguntado en algún momento por qué el juego se titula *Adivinación cobriza*, se da la circunstancia de que el apellido neerlandés *de Bruijn* hace referencia al color marrón, probablemente en alusión al cabello. Dado que el juego se basa en las sucesiones de de Bruijn y con la finalidad de que el título no pudiera dar pistas sobre el método empleado para realizar las adivinaciones, la solución pasó por buscar algún sinónimo de *marrón* que pudiera resultar sugerente como título.

Referencias

[1] DE BRUIJN, Nicolaas Govert. *A combinatorial problem*. Proceedings of the Section of Sciences of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Vol. 49, Nº 7, pp. 758-764, the Netherlands, 1946.

[2] FLYE SAINTE-MARIE, Camille. *"Solution to question nr. 48"*. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1, pp. 107–110, 1894.

[3] DE BRUIJN, Nicolaas Govert. *Acknowledgement of priority to C. Flye Sainte-Marie on the counting of circular arrangements of 2^n zeros and ones that show each n-letter word exactly once*, EUT report. WSK, Dept. of Mathematics and Computing Science; Vol. 75-WSK-06, Technological University Eindhoven, the Netherlands, 1975.

[4] DIACONIS, Persi, GRAHAM, Ron. *Magical Mathematics: the mathematical ideas that animate great magic tricks*, pp. 18-24, Princeton University Press, New Jersey, 2012.

Sobre el autor:
Nombre: Aurelio Sánchez Estévez
Correo Electrónico: contacto@ilusionesmatematicas.com
Institución: www.ilusionesmatematicas.com