

UN CURSO ONLINE DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS PARA LA ATENCIÓN AL ESTUDIANTADO CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

An online course of mathematical competitions to gifted students

Rotger, L., Ribera, J.M.

Universidad de La Rioja (España)

Resumen

La resolución de problemas de matemáticas es uno de los contenidos de más interés para el estudiantado con altas capacidades matemáticas. En esta propuesta se presenta las características del Curso Online de Olimpiadas Matemáticas creado por un equipo docente interuniversitario con la finalidad de disponer de un material complementario en la formación en resolución de problemas. Se incluye, además, recomendaciones tanto para el diseño de vídeos educativos como para la elaboración de secuencias de vídeos. Por último, se facilita el acceso a todo el material generado y se pone a disponibilidad de toda la comunidad educativa.

Palabras clave: *talento matemático, resolución de problemas, estrategias de resolución, vídeos educativos*

Abstract

Math problem solving is one of the most interesting contents for mathematically talented students. In this proposal, we detail the characteristics of the Mathematical Olympics Online Course created by an interuniversity team to have complementary material in problem-solving training. It is also included recommendations both for the design of educational videos and for the production of video sequences. Finally, access to all the material generated is facilitated and made available to the entire educational community.

Keywords: *mathematical talent, problem solving, resolution strategies, educational videos*

INTRODUCCIÓN

La deslocalización del estudiantado con alta capacidad matemática (ACM) es uno de los factores fundamentales para la búsqueda de alternativas que favorezcan su aprendizaje autónomo de matemáticas. Su deslocalización dificulta el acceso a contenido extracurricular de matemáticas que pueda ser de su interés. Este estudiantado, en particular, presenta una sensibilidad más desarrollada para la resolución de problemas, cálculo o geometría (Gutiérrez y Jaime, 2013). Así mismo, la resolución de problemas toma un papel relevante en la investigación del estudiantado con ACM, siendo usada tanto para la caracterización del talento como para la intervención (Davis, Rimm y Siegle, 2014).

Más allá de los programas de atención al talento matemático, como Estalmat, existe un gran número de competiciones matemáticas en el que este estudiantado puede participar activamente entre las que destacan internacionalmente la International Mathematical Olympiad

(<https://www.imo-official.org/>) y la prueba Canguro (<http://www.aksf.org/>). En la preparación para dichas competiciones se pueden utilizar diversas plataformas como puede ser la base de datos NRich Project de la Universidad de Cambridge (<http://nrich.maths.org>), Art of Problem Solving (<https://artofproblemsolving.com/>) o Brilliant (<https://brilliant.org/>). Además, existe un amplio número de textos dedicados al perfeccionamiento de las destrezas de resolución de problemas como Lehoczyk y Rusczyk (1994), Rusczyk y Lehoczyk (1994), Engel (1998), Andreescu y Gelca (2008), Larson (2012) y Schoenfeld (2014). Sin embargo, el contenido en vídeo para la formación en resolución de problemas de matemáticas es muy reducido.

Paralelamente, la disponibilidad de dispositivos tecnológicos entre la sociedad aporta un canal de comunicación con el estudiantado que puede ser aprovechado para compartir contenido educativo, como puede ser el vídeo. Los vídeos educativos son uno de los recursos más utilizados por los estudiantes para complementar el material de las clases de matemáticas que están cursando (Howard, Meehan y Parnell, 2017). Por ello, se hace patente la necesidad de disponer de materiales audiovisuales evaluados por especialistas y diseñados con el objetivo de atender a la curiosidad que el estudiantado con ACM muestra.

Por todo esto, el objetivo principal de esta comunicación es la presentación de las características del Curso Online de Olimpiadas Matemáticas (COOM) de la Universidad de La Rioja disponible en una plataforma abierta para el perfeccionamiento de las destrezas de resolución de problemas entre el estudiantado con ACM.

CURSO ONLINE DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

Este curso está formado por una colección de aproximadamente veinte módulos correspondientes a diferentes destrezas de resolución de problemas de matemáticas. Cada uno de estos módulos ha sido diseñado por un docente participante del proyecto; entre los que se encuentra profesorado de secundaria, universidad e incluso estudiantado de grado que presenta ACM y que quiere compartir su experiencia.

Diseño de los módulos del COOM

Cada uno de los módulos confeccionados en el proyecto está formado por una secuencia de más de cuatro vídeos y un material complementario a la visualización de los vídeos.

Aspectos técnicos

Desde un punto de vista técnico (Pérez-Navío, Rodríguez y García, 2015), se recomienda que los vídeos educativos tengan duraciones de entre cinco y diez minutos, no superando esta última duración en ningún caso. Así mismo, se considera necesario que los vídeos formativos incluyan tanto elementos gráficos como elementos narrativos que pueden ser introducidos tanto en la grabación como en el momento de la edición. Debido a las limitaciones de tiempo, se recomienda realizar tanto una introducción con los puntos a tratar en el vídeo como un breve resumen final donde se recojan todas las ideas tratadas en el vídeo y la relación con otros vídeos de la secuencia.

Además de las recomendaciones anteriores, se debe cuidar tanto la calidad de la visualización como la del audio. De esta forma, se han usado diferentes metodologías de grabación que permitieran eliminar las posibles problemáticas técnicas. Así, en los vídeos del COOM se pueden encontrar unos pocos vídeos grabados en un aula habitual, donde se producían ocultaciones, al interponerse el docente entre la cámara y la pizarra, y alteraciones de audio producidas por no desarrollar el discurso directamente hacia el micrófono. Esto ha provocado la necesidad de modificar el proceso de grabación mediante la construcción de una pizarra de luz hecha por el proyecto (Ribera, Sota y Rotger, 2020). Con la pizarra de luz se ha podido resolver la

problemática presentada anteriormente, a la vez que facilita la labor de grabación del docente. Otras alternativas de grabación usadas ha sido el aprovechamiento de programas de captura de pantalla y el uso de pizarras blancas digitales que registran la interacción del docente con ellas. Estas últimas grabaciones, además, se pueden realizar con los equipos informáticos personales sin la necesidad de trasladarse a las aulas de grabación.

Aspectos metodológicos

Por otro lado, cada una de las secuencias de vídeos diseñados sigue la estructura metodológica propuesta por Rotger y Ribera (2019) y que se especifica de la siguiente forma:

1. *Introducción*: Se presenta una motivación para el uso de la destreza de resolución de problemas o un ejemplo de aplicación de cierto contenido matemático en la resolución de problemas.
2. *Elementos teóricos*: Se detalla la estrategia de resolución de problemas desde un punto de vista formal, tratando de aportar ejemplos sencillos que favorezcan la comprensión de esta.
3. *Ejemplos de aplicación*: Se aplica la destreza presentada en ejercicios de resolución directa o casi directa y en problemas de olimpiadas matemáticas preuniversitaria de nivel local. En algunos casos se proponen problemas alternativos abiertos para facilitar el perfeccionamiento de la destreza.
4. *Aplicación en problemas olímpicos de matemáticas*: Se muestra el potencial de la destreza en la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas preuniversitarias de nivel nacional o internacional. En algunas destrezas, este punto se encuentra en más de un clip de vídeo con la finalidad de mostrar diferentes aplicaciones de una misma destreza en problemas de diferente tipo.

El esquema presentado ha sido aplicado por los integrantes del proyecto de forma variada tratando de adecuarlo a las destrezas y contenidos de resolución de problemas diferentes. Aunque inicialmente el curso estuviera formado por destrezas habituales de las competiciones matemáticas preuniversitarias como son el principio del palomar, el principio extremal, el principio de invarianza, la coloración, la inducción matemática, la aritmética modular, la potencia de un punto o los teoremas de Ceva; estas se han completado con otras secuencias de interés para la formación en resolución de problemas. Entre las secuencias, se encuentran contenidos formativos correspondientes a la matemática universitaria que pueden ser aplicados en la resolución de problemas (como la teoría de grafos o la variable compleja) y otras secuencias en las que se presentan consejos para la resolución de problemas en competiciones matemáticas basados en la experiencia de participantes recientes.

Además de las secuencias de video, se han generado otros materiales que favorecen el aprendizaje de las destrezas. Así, se han enlazado las secuencias de vídeo a un material teórico generado por el Seminario de problemas para alumnos de ESO y Bachillerato de la Universidad de La Rioja. Este material, en texto, sirve de apoyo para el estudiantado y puede ser consultado en la realización de los problemas propuestos en el COOM.

Por último, se ha completado todo el material formativo con dos instrumentos para la autoevaluación. Por un lado, se ha generado una colección de problemas abiertos en vídeo asociados a cada una de las destrezas que en los que poder aplicar los conocimientos obtenidos a partir de la visualización para la resolución de problemas en los que interviene la destreza presentada. Estos vídeos, a su vez, están acompañados de otros vídeos donde se presenta la solución detallada de los planteamientos, lo cual favorece el análisis de las soluciones propias por parte de los participantes. Por otro lado, se ha planteado una prueba de autoevaluación con

corrección automática asociada a cada destreza grabada. En esta prueba, de tipo test, se han diseñado preguntas que atienden tanto al contenido grabado en los vídeos como a la aplicación particular de mismo en la resolución de problemas.

Caso práctico: Principio extremal

A modo de ilustración de la propuesta, se comparte la secuencia de problemas donde se aplica el principio extremal diseñada por la profesora Ana Navarro de la Universitat de València. Esta técnica de resolución de problemas se basa en examinar los objetos que maximizan o minimizan una función relacionada con la condición del problema con el objetivo de llegar a una contradicción. Entre los problemas propuestos se encuentran los siguientes:

1. *Problema de Introducción:* $n\sqrt{2}$ no es entero para cualquier entero positivo n .
2. *Problema de aplicación directa:* Sea S un conjunto finito de puntos en el plano, con la propiedad de que la recta determinada por dos puntos cualquiera del conjunto S pasa al menos por un tercer punto de S . Entonces, todos los puntos de S están alineados.
3. *Problema de competición matemática local:* Todas las calles de Valdemadera son de un único sentido. Cada par de casas están conectadas exactamente por un camino de sentido dirigido. Mostramos que existe una casa que se puede alcanzar desde cada casa directamente o, como mucho, vía otra vivienda.
4. *Problema de competición matemática internacional:* Considera un camino en el plano siguiendo las siguientes reglas. Dado un punto (x, y) nos podemos mover en un paso a uno de los cuatro puntos $(x, y + 2x)$, $(x, y - 2x)$, $(x + 2y, y)$, $(x - 2y, y)$ con la restricción que no podemos volver atrás un paso que acabamos de hacer. Probar que, si comenzamos en el punto $P = (1, \sqrt{2})$ no podemos volver a dicho punto.
5. *Otro problema de competición matemática internacional:* No existen cuatro enteros positivos (x, y, z, u) que cumplan la siguiente relación: $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ (Figura 1).

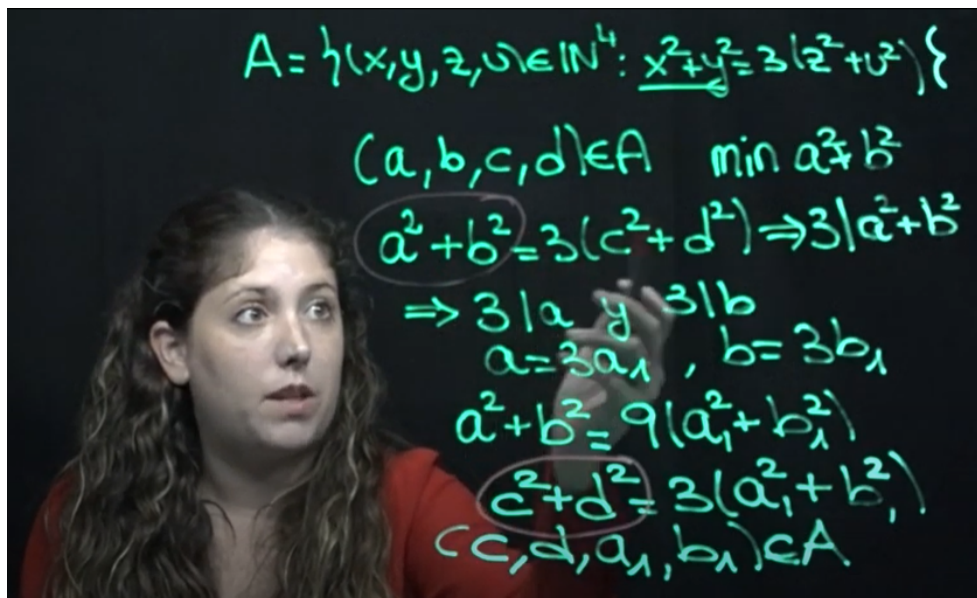


Figura 1. Ejemplo de resolución de problema de la secuencia sobre pizarra de luz.

De forma complementaria, en la plataforma donde se aloja el COOM se pueden encontrar otros problemas y una prueba para la autoevaluación de los conocimientos adquiridos en el aprendizaje de esta destreza.

CONCLUSIONES

Se ha generado un material en vídeo en español para la atención al estudiantado con ACM abierto y disponible para el perfeccionamiento de las destrezas en resolución de problemas. Este material está formado por una colección de secuencias (Figura 2) que aglutinan tanto destrezas de resolución de problemas como contenido matemático universitario. Está previsto que el material se siga ampliando en número de secuencias y en número de vídeos en cada secuencia.

- | | |
|---|--|
| > Técnicas Básicas de Resolución (Miguel Bastida) | |
| > Conjugado de un número (Adrián Latorre) | > Aritmética Modular (Miguel Marañón) |
| > El principio del palomar (Víctor Lanchares) | > Series Numéricas (Daniel José Rodríguez) |
| > Geometría plana (Jesús Murillo) | > Recurrencias (José Manuel Gutiérrez) |
| > Problemas de coloración (Eva Primo) | > Potencia de un punto (Adrián Rodrigo) |
| > Principio Extremal (Ana Navarro) | > Teoremas de Ceva y Menelao (José Ignacio Extremiana) |
| > Principio de Inducción (Judit Mínguez) | > Teoría de Grafos (Patricia Pascual) |
| > Aritmética Modular (Jorge Roldán) | > Experiencia Olímpica OME (Alejandro Mahillo) |

Figura 2. Listado de secuencias de vídeos completas en el COOM.

Este material ha sido evaluado por estudiantado con ACM del grado en matemáticas de la Universidad de La Rioja siguiendo la rúbrica generada en Ribera y Rotger (2020). Su evaluación ha permitido identificar los problemas de ocultamientos y de autocontenido que presentaban algunos vídeos. En lo que sigue, se pretende evaluar el uso del material y la utilidad para la enseñanza-aprendizaje en el estudiantado con ACM.

Debido a las condiciones especiales de alerta sanitaria vividas, el equipo docente del COOM, ha dejado disponible todo el material para toda la comunidad educativa. Este material se puede encontrar en la plataforma Moodle de la Universidad de La Rioja <<https://urabierta.unirioja.es/>>.

AGRADECIMIENTOS

Los contenidos presentados son parte del proyecto de investigación Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: análisis racional y empírico (EDU2017-84377-R, AEI/FEDER) y del proyecto Evaluación y puesta en marcha del Curso Online de Olimpiadas Matemáticas (EVACOOM) financiado por los proyectos de Innovación Docente de la Universidad de La Rioja.

REFERENCIAS

- Andreescu, T. y Gelca, R. (2008). *Mathematical olympiad challenges*. Berlín: Birkhäuser.
- Davis, G. A., Rimm, S. B. y Siegle, D. (2014). *Education of the gifted and talented* (6th ed.). Boston, MA: Pearson.
- Engel, A. (1998). *Problem-solving strategies*. Berlín: Springer.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.
- Howard, E., Meehan, M. y Parnell, A. (2017). Live lectures or online videos: students' resource choices in a first-year university mathematics module. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. DOI: 10.1080/0020739X.2017.1387943
- Larson, L. (2012). *Problem-solving through problems*. Cham, Suiza: Springer.
- Lehoczky, S. y Rusczyk, R. (1994). *The art of problem solving, vol. 1: the basics*. Alpine, CA: AoPS Incorporated.

Rotger, L. y Ribera, J.M.

- Pérez-Navío, E., Rodríguez, J. y García, M. (2015). El uso de mini-videos en la práctica docente universitaria. *EDMETIC. Revista de Educación Mediática y TIC*, 4(2), 51-70.
- Ribera, J. M. y Rotger, L. (2020). *Herramientas para la evaluación técnica y didáctica de la creación de vídeos cortos de resolución de problemas de matemáticas*. Pendiente de publicación.
- Ribera, J.M., Sota, J.M. y Rotger, L. (2020). Uso de una pizarra de luz para la creación de vídeos de resolución de problemas de matemáticas. Una aproximación «DIY». En A. I. Allueva y J. L. Alejandre (Ed.), *Prácticas docentes en los nuevos escenarios tecnológicos de aprendizaje* (pp. 161-168). Prensas de la Universidad de Zaragoza.
- Rotger, L. y Ribera, J.M. (2019). Designing a video course. The case of the online course of mathematical olympiads. En L. Uden, D. Liberona, G. Sanchez y S. Rodríguez-González (Eds.), *Learning technology for education challenges 2019. Communications in computer and information science 1011*, (pp. 79-89). Cham, Suiza: Springer.
- Rusczyk, R. y Lehoczky, S. (1994). *The art of problem solving, vol. 2: and beyond*. Alpine, CA: AoPS Incorporated.
- Schoenfeld, A. (2014). *Mathematical problem solving*. Amsterdam: Elsevier.