EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA LA OBTENCIÓN DE RAÍCES DE ECUACIONES MEDIANTE PROGRAMACIÓN EN MATHCAD. ALGORITMO DE CÁLCULO

The Newton-Raphson method for obtaining roots of equations by programming in mathcad. Calculation algorithm

CARLOS M. MATA RODRÍGUEZ*

Recibido: 2 de noviembre de 2016. Aceptado: 12 de diciembre de 2016
DOI: http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2017.v4.n7.a25

Resumen

El método de Newton-Raphson es un procedimiento algorítmico que permite hallar raíces de funciones, conocido un valor numérico cercano a la raíz. Es un método iterativo, en general de rápida convergencia, muy útil para el cálculo de raíces cuadradas y de mayor grado.

Palabras clave: método de Newton-Raphson.

Abstract

Newton's method, also called the Newton-Raphson method, is a root-finding algorithm that uses the first few terms of the Taylor series of a function in the vicinity of a suspected root. Newton's method is sometimes also known as Newton's iteration, although in this work the latter term is reserved to the application of Newton's method for computing square roots.

Keywords: Newton-Raphson method.

I. Introducción

Uno de los problemas más comunes que se presentan en Matemáticas, es resolver una ecuación, pero debido a las características algebraicas que esta posee, el procedimiento puede tornarse largo y complejo.

Supongamos que se desea calcular una raíz de la ecuación f(x) = 0, la cuestión en sencilla cuando la ecuación es lineal o cuadrática y, aunque sea menos conocida existen fórmulas para resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado, pero en el caso de ecuaciones de grado quinto o superior, no se dispone en general de fórmulas algebraicas para resolverlas, esta conclusión es debida al matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) [1].

El método que se expondrá en el siguiente trabajo posee las siguientes ventajas [2] [3].

a) Se aplica a una ecuación de cualquier grado, incluso a las ecuaciones no algebraicas, (transcendentes) es un método iterativo.

b) Proporciona la respuesta en forma numérica, pudiendo continuar los cálculos hasta lograr el grado de aproximación deseado.

Su inconveniente es que exige operaciones de cálculo largas y tediosas, salvo que se disponga de un sistema de cómputo, tal como se mostrará en el contexto del documento.

* Profesor Licenciado en Matemáticas. Consultor para la Formación de Personal en Informática. Miembro de la ANIR (Asociación Nacional de Inventores y Racionalizadores). Actualmente Departamento de Matemáticas, Universidad de Ciego de Ávila. Cuba. Correo electrónico:camaro@unica.cu

II. Desarrollo

En análisis numérico, el método de Newton (conocido también como el método de Newton-Raphson), es un algoritmo eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real [4].

Fig. 1. Joseph Raphson (1648-1715).

Fig. 2. Isaac Newton (1643-1727).

El método es llamado así por el matemático inglés Joseph Raphson (contemporáneo de Newton) siendo miembro de la Royal Society en 1691 por su libro «Aequationum Universalis», publicado en 1690, que contenía este método para aproximar raíces. Newton en su libro «Método de las fluxiones» describe el mismo método, en 1671, pero no fue publicado hasta 1736, lo que significa que Raphson había publicado este resultado 46 años antes. Aunque no fue tan popular como los trabajos de Newton, se le reconoció posteriormente [5].

Un procedimiento sencillo para determinar las posibles raíces de una función $y = f(x)$ es mediante el empleo del Teorema de Bolzano, pues se cumple que si dada una función continua definida en

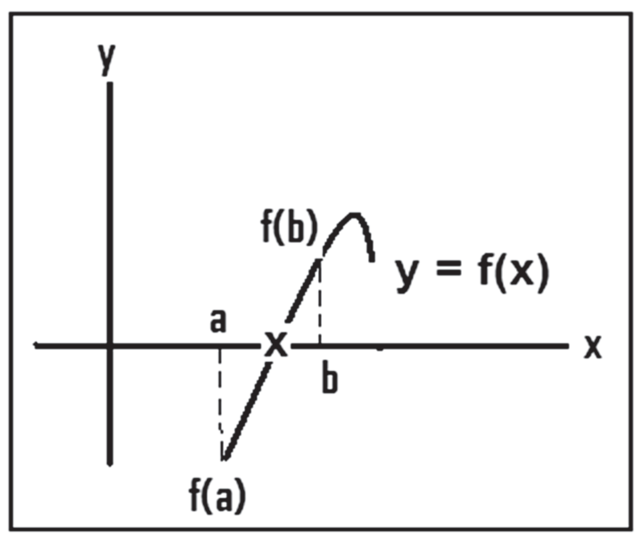


Fig. 3. Función y=f (x).

un intervalo [a,b] $f(a)*f(b)<0$, existirá un valor x dentro de dicho intervalo que representará la raíz (cero) de la función [6].

La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial (x, en el algoritmo llamado alfa) lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Así, se ha de comenzar la iteración con un valor razonablemente cercano al cero (valor supuesto). La relativa cercanía del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función.

Con ayuda de Mathcad, es posible graficar la función y de este modo tener una idea aproximada de su raíz (como se muestra en la gráfica).

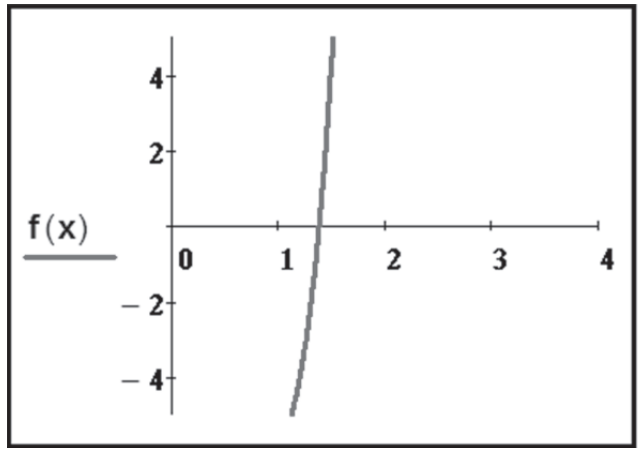
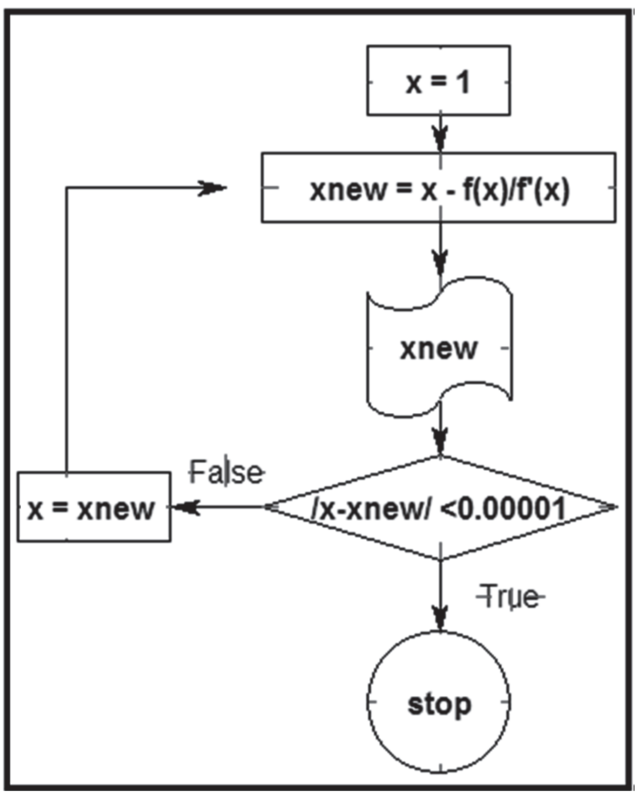


Fig. 4. Gráfica.

III. Fundamento analítico [4]

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

A. Algoritmo para el cálculo [3]



Donde alfa es el valor inicial, indicado en el diagrama de bloques como la variable x.

B. Ejemplo demostrativo

$f(x) := x^6 - 7$ FUNCION

$alfa := 1$ VALOR INICIAL

C. Programación en Mathcad [7]

```
newton(alfa) := | x ← alfa
                | t ← 0
                | r[1,1] ← "I"
                | r[1,2] ← "Raiz"
                | while 1
                |   | xnew ← x - f(x) / (d/dx f(x))
                |   | break if |x - xnew| ≤ 0.00001
                |   | x ← xnew otherwise
                |   | t ← t + 1
                |   | r[t+1,1] ← t
                |   | r[t+1,2] ← x
                | r
```

D. Resultado de la iteración

Como se puede observar al valor de la raíz de la función es <u>1.38</u> aproximadamente, sólo bastaron seis iteraciones para encontrar el resultado correcto.

$$\text{newton}(\text{alfa}) = \begin{pmatrix} \text{"I"} & \text{"Raiz"} \\ 1 & 2 \\ 2 & 1.70312 \\ 3 & 1.50069 \\ 4 & 1.40386 \\ 5 & 1.38384 \\ 6 & 1.38309 \end{pmatrix}$$

IV. Problema

Calcular la raíz de la función f(x) = x2 + 0.4x – 14.4 en el intervalo [3.4]. Realizar un trazado de la función.

Resultado: 3.6.

V. Conclusiones

El método de Newton – Raphson, es un método de rápida convergencia, aunque su rapidez depende fundamentalmente de la función f(x) y la aproximación inicial que se elija, experimentalmente se demuestra que con cinco o seis iteraciones se obtiene la raíz con excelente precisión. Su uso requiere el cálculo de la primera derivada de la función (dejando sentada su continuidad) por lo que podemos considerarlo como un procedimiento de matemáticas superior [1].

Este método es uno de los más utilizados para localizar raíces ya que en general es muy eficiente y siempre converge para una función polinómica.

Se requiere que las funciones sean diferenciables, y por tanto, continuas, para poder aplicarlo.

Se debe partir de un valor inicial para la raíz: x, este puede ser cualquier valor, el método convergirá a la raíz más cercana.

En los casos donde si converge a la raíz lo hace con una rapidez impresionante, por lo cual es uno de los métodos preferidos por excelencia.

Uno de los inconvenientes del método de Newton es la posibilidad de que se divida entre cero lo que ocurriría si $\mathbf{f'(x_n)=0}$.

Referencias

[1] T. Finney. Calculus and Analytic Geometry. London, Addison Wesley, 1980.

[2] P. Henrici. Elements of Numerical Analysis, New York, Wiley International Edition, 1967.

[3] D. McCracken. Programación Fortran. México, Editorial LIMUSA, 1974.

[4] P. M. Merino. Elementos de Algebra Superior. Cultural S.A. La Habana, 1943.

[5] J. Hofmann. Historia de la Matemática. Editorial Labor, Buenos Aires, 1960.

[6] M- Spivak. CALCULUS, Editorial Reverte. Madrid, 1970.

[7] Mathematical Solutions, Mathcad 14. User's Guide.