LOS CURSOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL DE RIEGER EN EL COLEGIO IMPERIAL DE MADRID

Joaquim Berenguer Clarià
Universitat Politècnica de Catalunya*

Resumen

Uno de los matemáticos y enseñantes que introdujeron el cálculo diferencial e integral en España, a mediados del siglo XVIII, fue Christian Rieger (1714–1780). Este matemático jesuita se trasladó de Viena al Colegio Imperial de Madrid en 1761, ejerciendo como primer profesor de matemáticas de este Colegio hasta 1765. Se han encontrado, entre los documentos pertenecientes a los jesuitas del Colegio Imperial, dos textos manuscritos, introductorios al cálculo diferencial, que pueden ser atribuidos a Rieger: "In methodum fluxionum" e "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones". Los dos textos están escritos bajo la visión geométrico–cinemática newtoniana y el escrito en castellano que, en principio, es la traducción del latino, no recoge todo el contenido del primero ni tampoco se ciñe al texto en latín, incorporando muchos apartados del libro de Thomas Simpson (1710–1761), *The Doctrine and Application of Fluxions*. Todo ello hace pensar que Miguel Benavente (1726–?), traductor de la obra de Rieger, probablemente tuvo un papel relevante en la redacción de "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones". Analizar este texto, donde confluyen diversas influencias, es una manera de conocer cómo se desarrollaron las primeras enseñanzas del cálculo diferencial e integral en España.

Abstract

One of the mathematicians and teachers who introduced Differential and Integral Calculus in Spain in the mid–18th century was Christian Rieger (1714–1780). This Jesuit mathematician moved from Vienna to the Imperial College in Madrid in 1761, and was the first professor of mathematics at this

* En la actualidad miembro del Grup de Recerca d'Història de la Ciència i de la Tècnica (GRHCT) de la Universitat Politècnica de Catalunya, acogido al proyecto de investigación HAR2016–75871–R.

Recibido el 1 de abril de 2020 — Aceptado el 29 de junio de 2020
https://doi.org/10.47101/llull.2021.44.88.berenguer
LLULL, Vol. 44 (N.º 88) 2021 - ISSN: 0210-8615, pp. 15-47

college until 1765. Two manuscripts, introductory to Differential Calculus, have been found among the documents belonging to the Jesuits of the Imperial College, which can be attributed to Rieger: "In methodum fluxionum" and "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones". Both texts are written under Newton's geometrical–kynematical vision and the one written in Spanish which, in principle, is the translation from Latin, does not reflect all the content of the first one nor does it strictly follow the Latin text, incorporating many sections of Thomas Simpson's (1710–1761) book, *The Doctrine and Application of Fluxions*. All this suggests that Miguel Benavente (1726–?), the translator of Rieger's work, probably played an important role in the writing of "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones". Analyzing this text, where diverse influences converge, is a way to know how the first teachings of Differential and Integral Calculus were developed in Spain.

Palabras clave: Cálculo diferencial, fluxión, Siglo XVIII, España, Rieger.

Keywords: Differential Calculus, fluxion, 18th Century, Spain, Rieger.

1. Introducción

Durante el siglo XVIII las Matemáticas se caracterizaron por el desarrollo del cálculo diferencial e integral en toda Europa. La introducción del nuevo cálculo en España reflejó tanto los progresos como las controversias que este desarrollo tenía en la Gran Bretaña y en todo el continente europeo. Varios historiadores como Elena Ausejo [2010], Norberto Cuesta Dutari [1976–1983], Santiago Garma Pons [1978, 1980, 1988, 2002], Víctor Navarro Brotóns [2002, 2003, 2006] y Juan Navarro Loidi [2008, 2013] han realizado estudios de gran relevancia sobre los inicios del cálculo diferencial e integral en España, pero creemos que este tema continúa estando muy abierto y siempre necesita de nuestra atención.

Los principales matemáticos y enseñantes que introdujeron el cálculo diferencial en España, a mediados del siglo XVIII, fueron Tomàs Cerdà (1715–1791), Christian Rieger (1714–1780), Johannes Wendlingen (1715–1790), Esteban Bramieri (1720–1794) y Pedro Padilla (1724–1807?). Algunos historiadores[1] han estudiado, en particular, las aportaciones de Rieger especialmente en el campo de la arquitectura. Sin embargo, pocos han analizado su aportación en el campo del cálculo diferencial durante su estancia en el Colegio Imperial[2]. De hecho, dicho matemático no publicó nada sobre cálculo diferencial pero se han encontrado diversos manuscritos sobre este campo, conservados en la Real Academia de la Historia (Madrid), que se le pueden atribuir. El objetivo fundamental de este artículo es analizar cuál fue la aportación de Rieger durante su estancia en Madrid, desde el año 1761 hasta 1765, en el campo del cálculo diferencial. Dicho análisis nos conducirá a otro matemático, Miguel Benavente (1726–?), también profesor del Colegio Imperial, directamente implicado en la obra de Rieger, y nos proporcionará un buen ejemplo de cómo en este período, de mediados de siglo XVIII, cuando el cálculo diferencial e integral distaba mucho de estar generalizado en España, en el Colegio Imperial ya se empezaban a dar clases de esta materia.

2. Rieger, un jesuita austríaco, profesor de matemáticas en el Colegio Imperial

Christian Rieger nació el 14 de mayo de 1714 en Viena e ingresó en la Sociedad de Jesús a los diecisiete años. Estudió filosofía y teología en la Universidad de los jesuitas en Graz y, entre los años 1748 y 1761, fue profesor de matemáticas, física experimental y arquitectura en la Academia Teresiana (Theresanium) de Viena, la mejor Universidad de los Habsburgo, reservada a la alta nobleza [Južnič, 2010, p. 199–200].

En 1756 se publicaron, bajo el título de *Universae Architecturae Civilis*, las lecciones de arquitectura que Rieger estaba impartiendo en Viena.Y en 1758 las correspondientes lecciones de arquitectura militar, *Universae Architecturae Militaris*. Los textos de Rieger cubrieron casi todas las ciencias militares y de ingeniería de la época. Los hijos de la alta nobleza en Viena utilizaron los manuales de Rieger durante los tres años que duraban los estudios de ingeniería militar. Según Južnič [2010] las lecciones de Rieger se basaban en la geometría de Christian Wolff (1679–1754) y en la de Bernard Forest de Belidor (1698–1761).

En 1761 Rieger se incorporó al Colegio Imperial de Madrid, el principal colegio de los jesuitas en España, como profesor de matemáticas y Cosmógrafo Real de Indias, substituyendo a Wendlingen. Este mismo año fue nombrado miembro de la Real Academia de San Fernando. Participó en las observaciones del tránsito de Venus delante del Sol el día 7 de mayo de 1761 publicando un pequeño texto que lleva por título *Observación del tránsito de Venus*. En 1763 se publicó, en Madrid, la traducción al castellano de sus lecciones de arquitectura civil con el título *Elementos de toda la Arquitectura Civil* cuyo traductor fue el jesuita y también profesor del Colegio Imperial, Benavente. La última obra publicada por Rieger, en España, fue *Observaciones physicas* (1763) sobre experimentos con electricidad estática. En esta obra agradece a Esteban Terreros (1707–1782) la ayuda que le ha proporcionado en la redacción en castellano del texto.

En 1765 [Udías, 2005], antes de la expulsión de los jesuitas de España, Rieger volvió al Theresianum de Viena. Posteriormente fue rector en Passau y en Lubliana para regresar, como profesor de las leyes canónicas, a Viena, donde murió en 1780.

3. Los manuscritos atribuidos a Rieger

En el legajo 9/2792 de la colección “Cortes” de la Real Academia de la Historia podemos encontrar un texto titulado “Curso completo de matemáticas que parece ser del P. Rieger” que, como todos los libros y legajos de esta colección, es uno de los documentos provenientes del Colegio Imperial de Madrid después de la expulsión de España de los jesuitas[3]. Según Udías[4] [2005] este curso estaría dividido en tres tratados, el primero “De la arithmética”, el segundo sería “Tratado de álgebra” y el tercero el “Tratado de lugares geométricos”. Al final del primer tratado se puede leer la frase “explicaba esto mismo muy bien mi hermano el P. Christiano Rieger”, de lo cual Udías [2005, p. 409] deduce que el texto estaría basado en las clases impartidas por Rieger pero escrito, posiblemente, por Benavente, del que se sabe que era traductor de su obra de arquitectura civil. También según Udías, el manuscrito "Adiciones a la astronomía de la Caille" formaría parte de las "Instituciones astronómicas" que dictó Rieger el año 1763. En este manuscrito se puede leer una defensa del sistema copernicano, de donde se comprueba que Rieger fue uno de los primeros en defender claramente el sistema heliocéntrico en España. Igualmente Udías considera probable que los manuscritos sobre mecánica "De las máquinas en general", "Anotaciones y addiciones a la mecánica de Mr. De la Caille", "Instituciones mechanicas" e "Institutiones mechanicae" fuesen lecciones dictadas por Rieger. Así como unos manuscritos sobre hidrostática, cronología y óptica. La conclusión de Udías [2005] es que los manuscritos atribuidos a Rieger muestran la amplitud de los temas tratados por el matemático austríaco siendo sus fuentes, por un lado, la mecánica de Isaac Newton (1642–1727) y, por otro, Wolff y Nicolas Louis de La Caille (1713–1762).

Sin embargo, respecto al texto que lleva por título "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones", que Garma [1988, p. 93–127] también atribuye a Rieger, Udías no considera que Rieger sea su autor. Las razones para negarle la autoría son sólidas y se basan en que Rieger, austríaco, nunca hubiera utilizado el término "fluxión" y la terminología newtoniana, como así aparece en el texto en cuestión, sino que hubiese utilizado la notación leibniziana para el cálculo diferencial, siguiendo a Wolff, autor citado por Rieger en varias ocasiones. Por todo ello Udías [2005] se decanta por considerar a Cerdà como autor del texto "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones". Avancemos nuestras propias conclusiones al respecto, afirmando que, en cualquier caso, tal como hemos defendido en nuestra tesis doctoral [Berenguer, 2016], este texto no puede ser de Cerdà, el cual, aunque se basó en el concepto de fluxión, utilizó siempre la notación leibniziana de diferencial y que, por otro lado, la letra del texto referido no corresponde a la de Cerdà, el cual siempre escribió sus propios textos con una grafía bien característica.

Si ponemos de relieve la reticencia de Udías por aceptar la autoría de Rieger, del texto titulado "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones", no es con afán de polemizar sino para justamente subrayar el caso tan particular de Rieger, dentro del campo del cálculo diferencial, en Europa.

4. *"In methodum fluxionarum"*

Antes de analizar con más detalle el polémico texto "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones", vamos a referirnos a otro. Se trata de un texto en latín de ocho folios, escritos en 8º, titulado "In methodum fluxionum" [Rieger, *In methodum fluxionarum*] del que Udías [2005] sugiere que su autor podría ser Rieger o Wendlingen. Nosotros nos inclinamos por pensar de que se trata de un texto escrito por Rieger por su similitud, en algunos fragmentos, con el texto "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones", del que no nos cabe duda de que recoge lecciones dadas por Rieger, como veremos más adelante. Se hace difícil determinar en qué años pudo haber sido escrito dicho texto ya que, aunque Rieger llegó al Colegio Imperial de Madrid en 1761, el texto pudo haber sido escrito con anterioridad, cuando Rieger estaba en Viena.

"In methodum fluxionarum", de solo 8 folios, estaría incluido dentro de un tratado más extenso que constaría de otras partes: "De Compositione et Resolutione Virium", "De Descensu Corporum Gravium", "De Potentiis easumque Indicibus",... La parte "In methodum fluxionarum", de hecho, lleva en el título la palabra "Introductio", probablemente para indicar que se trataba de un texto para iniciarse en el tema, en aquel momento no demasiado conocido. Consta de los siguientes capítulos: "De Algorithmo Fluxionum" (tres folios), "De Methodo ducendi Tangentes" (un folio y medio) y "De Doctrina Maximorum et Minimorum" (tres folios y medio). No tenemos completo el último capítulo y no sabemos, por lo tanto, si el texto original constaba de más.

1. El primer capítulo, "De Algorithmo Fluxionum", está dividido en distintos apartados:
    - "Definitio" y "Scholium", donde se define la fluxión como un aumento de una variable en un intervalo de tiempo si la velocidad se mantuviese constante.
    - Corolarios I y II, donde queda definida la fluxión de una cantidad constante y la de la suma.
    - Lema, donde se demuestra que los aumentos del producto de variables en intervalos de tiempo iguales no son iguales sino que están en progresión aritmética.
    - Problemas I y II, donde se trata de la fluxión del producto de variables, de la de la potencia y la de la fracción.
2. El segundo capítulo es el "De Methodo ducendi Tangentes" y está dividido en los siguientes apartados:
    - Problema III, donde se introduce la fórmula general que relaciona las fluxiones de las variables de una curva con la sub–tangente en un punto dado. La manera de hacerlo es suponer que los puntos de la recta secante se acercan más y más hasta que se considera que la secante coincide con la tangente.
    - Ejemplos I, II y III, donde se aplica la fórmula obtenida a algunas cónicas.
3. El tercer capítulo es el "De Doctrina Maximorum et Minimorum", dividido en los siguientes apartados:
    - Problema IV. Aquí el autor define lo que entiende por problema de máximos y mínimos y enuncia su relación con la fluxión de la variable.
    - Ejemplos I y II. Dos ejemplos aritméticos de aplicación de la fórmula enunciada.
    - Ejemplo III. Un ejemplo algebraico que permite aplicar un criterio general para distinguir un máximo de un mínimo.
    - Ejemplos IV, V y VI. Son ejemplos aplicados a la dinámica.

El texto está escrito bajo la visión fluxional newtoniana, sin, de todos modos, abandonar el recurso a los infinitésimos.

5. "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones"

El texto "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones", de 15 folios, es introductorio; además de las definiciones de los conceptos básicos como fluxión y fluente y de las principales reglas para calcular las fluxiones y deducir las fluentes, trata de las aplicaciones para calcular tangentes a curvas, problemas de máximos y mínimos, áreas por debajo de curvas y volúmenes de sólidos. Concretamente consta de siete capítulos: 1. "De la naturaleza e investigación de las fluxiones", 2. "Del modo de sacar las fluxiones de las cantidades que se propongan", 3. "Uso de las fluxiones para tirar las tangentes", 4. "Aplicación de las fluxiones a la solución de Problemas de *maximis et minimis*", 5. "Del método inverso de las fluxiones o de la manera de determinar las fluentes de las fluxiones dadas", 6. "Uso de las fluxiones para hallar las Áreas de las Curvas", 7. "De la aplicación de las fluxiones para hallar el contenido de los sólidos". Queda claro que se está ante un texto para ser utilizado en las clases. Este texto, que al pertenecer a la Colección "Cortes" procede del Colegio Imperial, con toda seguridad fue escrito entre 1763 y 1765. La primera fecha viene determinada por una referencia, que aparece al final del texto, al libro *Elementos de toda la Arquitectura Civil* de Rieger publicado en 1763. Y la segunda fecha corresponde al retorno de Rieger a Viena.

En general, el texto adopta la visión newtoniana, es decir la visión geométrico–cinemática, y utiliza la notación newtoniana. Sin embargo en él aparecen algunos elementos –que analizaremos más adelante con mayor detalle– que parecen provenir de la corriente continental del cálculo diferencial, como es la expresa referencia al infinito con la utilización del símbolo ∞, además de la explícita referencia al marqués de l'Hospital (1661–1704), a Jean Pierre Crousaz (1163–1750) y a Christoph Friedrich Vellnagel (1714–1798), todos ellos matemáticos y filósofos leibnizianos. Lo que resulta particularmente interesante es que, por un lado, muchos de los apartados del texto son la traducción al castellano de partes del "In Methodum Fluxionum", escrito en latín, y, por otro, dicho texto reproduce íntegramente algunas secciones del libro de Thomas Simpson (1710–1761), *The Doctrine and Application of Fluxions*. De manera que el tratado "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones" se habría confeccionado básicamente a partir de estas dos fuentes.

Hay varias razones para concluir que Rieger fue el autor, directo o indirecto, de este tratado. En primer lugar, porque hay que considerarlo formando de los escritos encabezados con el título "Curso completo de matemáticas que parece ser del P. Rieger", en los que la letra del tratado sobre fluxiones coincide con la de la parte dedicada a la aritmética de este curso completo, en la que, además, se hace una referencia explícita a Rieger[5]. En segundo lugar, al final del tratado se puede leer la frase "Véanse los elementos de la Arquitectura Civil" que, con toda seguridad, se refieren al libro sobre arquitectura de Rieger. Finalmente el hecho de citar un autor como Vellnagel, que publicó en latín y alemán, y de recoger conceptos leibnizianos conduce a pensar que el autor había recibido una influencia de autores centro–europeos. En el Colegio Imperial, en aquel momento, pocos cumplían estas condiciones. Según Udías [2010, p. 26], los matemáticos que impartían enseñanza en este Colegio o en el Seminario de Nobles, durante el período que estamos considerando y de los que hemos comprobado alguna aportación al cálculo diferencial, fueron Wendlingen, entre 1750 y 1767, Esteban Terreros y Pando (1707–1782), entre 1755 y 1767, Benavente, entre 1761 y 1767, Bramieri, entre 1757 y 1767, y Cerdà, entre 1765 y 1767.

A Wendlingen se le atribuyen los manuscritos "Elementos de Matemáticas. Tomo VIII. Analysis de los infinitos" y "Tomo IX. Cálculo Exponencial, Diferencio–diferencial y Arithmética de los infinitos" (1756–1761) que se conservan en la RAH[6]. Estos tomos serían la continuación de los cuatro de los *Elementos de mathemática* (1753–56) que Wendlingen ya había publicado. Se trata de unos manuales que siguen muy fielmente el texto de Wolff, *Elementa Matheseos Universae* (1713–1715), tal como el mismo Wendlingen reconoce en su introducción [Wendlingen, 1756–1761, RAH, Cortes 9/2812; f. 59].

Por otro lado, ya en 1751 Terreros había dirigido unas "Conclusiones matemáticas"[7] con un programa que incluye un apartado de álgebra, dentro del cual hay cuatro temas dedicados al cálculo diferencial e integral. Estas "Conclusiones" constituyen uno de los primeros documentos impresos que demuestran la existencia de una enseñanza dedicada al cálculo diferencial e integral, al menos en el Seminario de Nobles de Madrid, a mediados del siglo XVIII, pero también, muy probablemente, en el Colegio Imperial, debido a la estrecha conexión entre las dos instituciones. El programa de cálculo pone de manifiesto el enfoque leibniziano de este y concretamente la influencia de Wolff.

Otras "Conclusiones" localizadas[8] y relacionadas con el cálculo diferencial son las dirigidas por Bramieri, profesor del Seminario de Nobles, celebradas en este centro en 1760. Como en el caso de Terreros, también en el apartado dedicado al álgebra hay un subapartado sobre cálculo diferencial. De nuevo se puede observar la influencia de Wolff en este texto de Bramieri.

Entre los manuscritos pertenecientes a la Colección Cortes también hemos localizado un texto que lleva por título "Tratado del Cálculo Diferencial"[9]. Nuestra investigación nos ha conducido a la conclusión [Berenguer 2016, p. 145] que se trata de un texto atribuíble también a Bramieri, escrito entre 1757 y 1760, justo antes de las "Conclusiones mathematicas" presididas por este autor. Muchos enfoques y ejercicios aparecen en el tratado de Wolff ya mencionado aunque el texto de Bramieri dista de ser una mera traducción del libro de Wolff.

Todos los textos mencionados tienen, pues, en común la influencia de Wolff, donde la terminología es claramente leibniziana, apoyándose en el concepto de diferencial como una cantidad infinitésima. No resulta pues extraño que se encuentren similitudes entre los textos de Wendlingen, Terreros y Bramieri desde el momento que todos ellos se inspiran en el texto de Wolff.

Finalmente, el otro gran matemático que contribuyó a la difusión del cálculo diferencial e integral, con el texto titulado "Tratado de fluxiones" [Berenguer 2016], es Cerdà. Y en este texto la orientación es claramente newtoniana a partir del concepto de fluxión, aunque también se utilice la notación de diferencial.

No resulta, pues, plausible que ninguno de estos matemáticos fueran los autores del texto “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones”. En el caso de Wendlingen y Bramieri sabemos que ya habían escrito otros tratados de cálculo diferencial con un enfoque muy diferente, teniendo en cuenta, además, que las letras de sus manuscritos no coinciden con la del texto “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones”. En el caso de Terreros, las “Conclusiones” presididas por él, también siguen una orientación muy alejada de la newtoniana del texto en cuestión. Y, finalmente, Cerdà, que es el único que sigue una orientación fluxionaria, como en el texto analizado, tampoco puede ser autor, tanto por la letra como por la notación.

Otra cuestión es quien fue la persona que directamente escribió este texto. Tal como hemos dicho, el tratado “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” podría haber sido escrito por Benavente. Probablemente Rieger no se expresaba bien en castellano y Benavente, que ya había traducido el libro de arquitectura de Rieger, le hacía de traductor. ¿Benavente fue el traductor del texto originalmente escrito en latín, o de unas clases dictadas por Rieger? La conclusión más razonable es pensar que el texto en latín “In Methodum Fluxionum” lo escribió Rieger; Benavente, posteriormente, lo tradujo al castellano. Por lo tanto, hay que situar cronológicamente, en primer lugar el texto en latín y en segundo lugar el tratado “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones”. Pero ¿quien añadió los apartados del libro de Simpson? ¿El mismo Rieger o Benavente, que también era profesor de matemáticas en el Colegio Imperial? En cualquier caso, lo que parece evidente es que el tratado “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” está directamente vinculado a ambos autores: Rieger y Benavente.

6. Las fuentes de “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones”

Para poder analizar con más detalle el texto en cuestión es preciso partir de que su principal valor radica justamente en ser un tratado donde confluyen, como mínimo, dos textos: *The Doctrine and Application of Fluxions* de Simpson y “In Methodum Fluxionum” de autor desconocido, pero con toda probabilidad del mismo Rieger. De la comparación del tratado “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” con estos dos textos –el inglés y el latino– se puede entender mejor el valor de dicho tratado y, por consiguiente, de qué forma el conocimiento matemático se transmitía en centros de enseñanza en aquel momento.

6.1. Capítulo 1. De la naturaleza e investigación de las fluxiones

El primer capítulo está estructurado en forma de catorce apartados. Se trata del capítulo de las introducciones y definiciones. Y ya el primer párrafo de dicho capítulo parece avisar al lector del carácter controvertido de los infinitesimales, lo cual no encontramos en el texto en latín:

> Para evitar algunas dificultades metafísicas que nacen en estos cálculos acerca de los elementos infinitamente pequeños, no usaremos aquí otras ideas, ni principios sino los que se infieren claramente de la doctrina elemental de la geometría y del movimiento. Y son cómo se siguen. [Rieger, 1763–1765, “Cap. 1”][10].

A continuación expone las líneas básicas de la visión geométrico–cinemática en donde el punto, con su movimiento, es generador de una línea, la línea genera una superficie y esta superficie genera un sólido. Y en el apartado 6 de este capítulo se puede encontrar la definición de fluxión, como un incremento de la variable en un intervalo de tiempo en que se supone constante la velocidad, que es prácticamente la traducción al castellano de la que aparece en el texto en latín “In Methodum Fluxionum” y que coincide en algunos aspectos con la definición de fluxión dada por Simpson en su libro:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones	[…] represente *AB* una parte del tiempo, un momento de tiempo sea éste finito o infinitamente corto, es lo mismo. Termínese este (momento) tiempo con dos instantes *A*, *B* y sea x la cantidad variable […] Concíbase que es tal la celeridad de esta cantidad variable en el instante *A* que si se continuase el movimiento por todo el momento *AB* tendría algún aumento, será este aumento la fluxión del valor x y se notará este aumento con un punto puesto sobre la letra que representa la cantidad variable así $\dot{x}$. Y $\dot{x}$ será la fluxión de x por el instante *A*, cuando el valor de la variable fue x. [RIEGER, 1763–1765, §6].
In methodum fluxionarum	Sea *AB* un momento temporal finito o infinitamente pequeño, es lo mismo, terminado en dos instantes *A* y *B*; sea x el valor de la fluente o cantidad creciente en el instante *A*, que [tiene] una velocidad instantánea, y, si durante todo el momento *AB* fluyese con esta velocidad, adquiriría un cierto incremento expresado por $\dot{x}$; será esta cantidad $\dot{x}$ llamada Fluxión de x en el instante *A*, cuando el valor de la cantidad fluente era x.[11]
The Doctrine and Application of Fluxions	Cada cantidad así generada es denominada variable, o Cantidad fluente. Y la magnitud con la que cualquier Cantidad fluente se incrementase uniformemente en un intervalo de tiempo dado, con la Celeridad generatriz en una determinada Posición, o Instante (ésta continuaría invariable desde allí) es la Fluxión de dicha Cantidad en esta Posición o Instante. [12]

Como puede observarse, la definición que aparece en ambos textos del Colegio Imperial es idéntica, pero ciertamente un poco confusa si la comparamos con la de Simpson. De todas formas, el apartado 7 de “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones”, que sigue a esta definición, no coincide exactamente con el escolio que, en “In Methodum Fluxionum”, complementa la misma definición. Hay que subrayar que en el texto en latín el principal argumento para considerar válida la fluxión es que el intervalo de tiempo considerado es infinitamente pequeño mientras que en el texto en castellano aparece, de nuevo, la definición de fluxión como un incremento si la velocidad de la fluente se mantiene constante:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones	*In methodum fluxionarum*
Si *x* se moviera y fluyera uniformemente o con movimiento uniforme, no era necesario más que lo dicho para formar una idea perfecta de la fluxión. Pero como su celeridad puede sea muy diferente, de suerte que no sea en el instante *B* la que fue en el instante *A*, no permanece la misma fluxión adquirida en el tiempo *AB* sino es que sea diferente en razón del aumento adquirido, según que el tiempo *AB* es mayor o menor. […] Por esto, para formar un concepto claro de la fluxión, se han de comparar y reducir los aumentos y disminuciones de las magnitudes al movimiento uniforme. Y podrá señalarse una definición cabal y adecuada de la fluxión, así .. 9. <u>Fluxión</u> es la magnitud en que se aumentaría uniformemente una cantidad variable en la porción de tiempo señalada con una celeridad engendradora que corresponde a alguna posición o instante. (Con la que después como se supone continuaría su movimiento sin variación). [RIEGER, 1763–1765, §8–9].	De esta definición se desprende que el incremento de *x* adquirido en el tiempo *AB*, si *x* fluye de una manera uniforme, es el mismo definido anteriormente, pero si *x* no fluye de una manera uniforme, es decir, si su velocidad en el instante *B* no es la misma que en el instante *A*, entonces el crecimiento adquirido en el momento *AB* no será el mismo que la fluxión definida anteriormente sino diferirá más o menos según el tiempo *AB* sea mayor o menor. Sin embargo, si el tiempo *AB* es infinitamente pequeño entonces, aunque la velocidad de *x* en el instante *B* no sea la misma, matemáticamente hablando, que la velocidad en el instante *A,* la diferencia que existe es infinitamente pequeña en comparación con toda la velocidad y se puede despreciar cuando solamente se están considerando razones finitas de la fluxión. Y este crecimiento y la fluxión descrita pueden tomarse uno por la otra, es decir, la cantidad *x*, en un tan pequeño tiempo, puede ser considerada como fluyendo uniformemente.[13]

Gran parte de los textos coinciden, es decir el castellano es una traducción del latino, aunque a veces resulta más inteligible el texto en latín que el castellano[14]. En todo caso, si bien, en el texto en latín, se dice que cuando el intervalo de tiempo es infinitamente pequeño se puede considerar que la fluxión –donde la velocidad de la variable se supone constante– es igual al incremento real de dicha variable, en el texto en castellano se está diciendo que la fluxión es un incremento condicionado a que la velocidad de la variable sea constante, sin necesidad que el intervalo de tiempo sea infinitamente pequeño. Se puede concluir que la versión española se acerca más a la visión newtoniana de Simpson, sin ser una traducción literal una de otra.

Efectivamente, los apartados del tratado “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” que vienen a continuación, donde se introduce la definición de fluxión de una línea y de una superficie rectilínea, son prácticamente idénticos a los correspondientes del libro de Simpson:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones

10. Muévase el punto *m* desde *A* y nazca la línea variable *Am* con cualquiera continuación del movimiento. Y luego que llegue el dicho punto a cualquiera determinada posición *R* sea su celeridad tal que alcance a formar la línea *Rr* con movimiento uniforme desde el dicho punto, y en el tiempo señalado para la fluxión: será *Rr* la fluxión de la variable *Am* por aquella posición *R*.

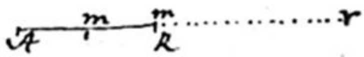


Figura 1. [Rieger, 1763–1765, §10]

11. Para formar concepto de la fluxión de una superficie concíbase el movimiento de la línea recta *mn* paralelo a la misma línea y en un plano entre dos líneas *AF*, *BC* paralelas y fijas:

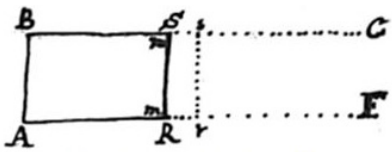


Figura 2. [Rieger, 1763–1765, §11]

Tómese *Rr* para expresar la fluxión de la línea *Am*. Acábese el rectángulo *Rs*, será éste como es el espacio que describiría uniformemente la línea engendradora *mn* en el tiempo en que *Am* se aumentaría en la cantidad *mr* que es la fluxión del rectángulo *Bm* por aquella posición o instante. [Rieger, 1763–1765, §10–11].

The Doctrine and Application of Fluxions

Así, concíbase el Punto *m* moviéndose desde *A*, y que genera la línea Recta variable *Am*, con un movimiento de alguna forma regulado; sea la Velocidad de éste, cuando llega a una Posición *R* determinada, tal que si continuara uniforme desde este Punto, sería suficiente para describir la Distancia o Línea *Rr*, en un Tiempo dado por la Fluxión. Entonces *Rr* será la fluxión de la Línea variable *Am*, en esta Posición.

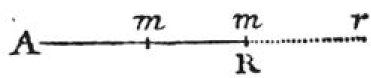


Figura 3. [Simpson, 1750, Part I, 2]

3. La fluxión de una Superficie plana se concibe de la misma manera, suponiendo un línea recta dada *mn* que se mueve paralelamente a ella misma en el Plano de las líneas *AF* y *BD* inmóviles y paralelas.

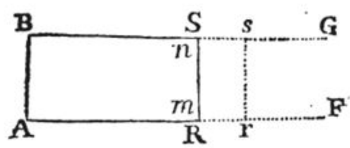


Figura 4. [Simpson, 1750, Part I, 3]

Entonces, si se toma (como anteriormente) *Rr* como la Fluxión de la línea *Am*, y se completa el Rectángulo *RrsS*, este rectángulo, siendo el Espacio que la Línea generatriz *mn* describiría, en el Tiempo que *Am* se incrementaría uniformemente con *mr*, es por lo tanto, la Fluxión del Rectángulo generado *Bm*, en esta Posición, de acuerdo con el verdadero significado de la Definición.[15]

Sin embargo estos apartados, en los que se aplica por primera vez la definición de fluxión tomada de Simpson, no aparecen en el anterior texto en latín.

Resulta de gran relevancia comprobar cómo “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” también incorpora, del texto de Simpson, la fluxión de una superficie curvilínea que después va a permitir a Simpson la deducción de la fluxión del producto de dos variables:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones

13. Siendo la línea engendradora *mn* una línea que siempre varía, se considera la fluxión del área como un rectángulo comprendido entre esta línea, y la fluxión de la abscisa tomada por base del rectángulo.

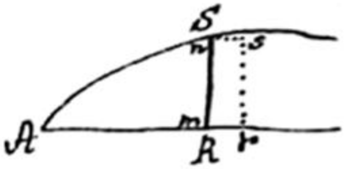


Figura 5. [Rieger, 1763–1765, §13]

Porque también en este caso será el rectángulo *RrsS* la fluxión del espacio engendrado *Amn*: porque si la longitud y la celeridad de la línea *mn* fuera la misma en adelante que es en *RS*, naciera el rectángulo *RrsS*, por medio de un movimiento uniforme y con aquella misma celeridad con que empieza a nacer el tal rectángulo en *RS*, y con la que el espacio *Amn* toma su aumento en aquella posición *RS*. [Rieger, 1763–1765, §13].

The Doctrine and Application of Fluxions

4. Si la Longitud de la Línea generatriz *mn* varia continuamente, la Fluxión del Área también vendrá expresada por el Rectángulo debajo de la Línea y la Fluxión de la Abscisa, o Base.

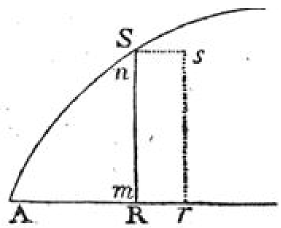


Figura 6. [Simpson, 1750, Part I, 4]

En efecto, sea el Espacio curvilíneo *Amn* generado por el movimiento continuo y paralelo de la Línea (ahora) variable *mn*, y sea *Rr* la Fluxión de la Base, o Abscisa, *Am* (como antes); entonces el rectángulo *RrsS* será, aquí también, la fluxión del espacio generado *Amn*. Ya que, si la Longitud y Velocidad de la Línea generatriz *mn* continuase invariable desde la posición *RS*, el rectángulo *RrsS* estaría, entonces, uniformemente generado, con la precisa Velocidad con la que este empezó a ser generado, o con la que el Espacio *Amn* es incrementado en aquella Posición.[16]

En resumen, en este primer capítulo del tratado “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” se puede observar cómo la definición de fluxión, tomada del texto en latín, responde a la concepción geométrico–cinemática pero sin coincidir del todo con el texto de Simpson. Por otro lado, el texto español no reproduce al pie de la letra el “In Methodum Fluxionum” y la voluntad de evitar los infinitésimos, manifestada al principio, se aplica efectivamente al obviar alguna referencia a cantidades infinitamente pequeñas que podemos encontrar en el texto en latín. Por último, en las primeras aplicaciones del concepto de fluxión –fluxión de una línea y de una superficie– el texto español abandona del todo el texto en latín y sigue, con todo detalle, el libro de Simpson.

6.2. Capítulo 2. Del modo de sacar las fluxiones de las cantidades que se propongan

El segundo capítulo está dividido en trece apartados donde se explican las reglas más elementales para calcular fluxiones: la suma, el producto, el cociente y la potencia. Es de destacar en este capítulo la regla para deducir el producto de dos variables, que es la traducción del texto en latín:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones	*In methodum fluxionarum*
17. Probl. 1º. Hallar las fluxiones de las cantidades que se multiplican mutuamente entre sí. Caso 1º. Sean *v*, *x* los valores de dos cantidades que fluyen uniformemente en cada instante señalado. Es evidente que en el momento de tiempo que precede al instante señalado sus valores fueron $v-\dot{v}$; $x-\dot{x}$ y el producto de estos valores $vx-v\dot{x}-x\dot{v}+\dot{v}\dot{x}$. Por consiguiente el aumento adquirido por medio del producto en este momento fue $v\dot{x}+x\dot{v}-\dot{v}\dot{x}$; pero el aumento adquirido con el producto en un momento igual y que siguió al instante señalado se halló = $v\dot{x}+x\dot{v}+\dot{v}\dot{x}$(16) y este aumento posterior excede a la verdadera fluxión del producto en tanto en cuanto el otro de aquélla, luego la verdadera fluxión de *vx* por el instante en que érase los factores *v*, *x*, es ésta $v\dot{x}+x\dot{v}$ que es lo que se buscaba. [RIEGER, 1763–1765, §17].	Sean *v*, *x* los valores de dos cantidades fluentes en un instante temporal determinado, suponiendo que las cantidades fluyen uniformemente… antes del instante dado los valores eran $v-\dot{v}$ *y* $x-\dot{x}$; su producto $vx-v\dot{x}-x\dot{v}+\dot{v}\dot{x}$: sin embargo el incremento adquirido por el producto en un momento igual inmediatamente siguiente al instante dado es $v\dot{x}+x\dot{v}+\dot{v}\dot{x}$; y el incremento posterior, según el Lema anterior, excede la fluxión del producto tanto como el otro le falta; por tanto la fluxión verdadera del producto *vx* en el instante temporal cuyos factores son *v* y *x*, es $v\dot{x}+x\dot{v}$.[17]

Se trata de hacer desaparecer el término $\dot{v}\dot{x}$, pero en lugar de aplicar el método de cancelación, como era habitual entre los leibnizianos, o un método geométrico, como lo hace Simpson, se intenta seguir un razonamiento algebraico. Según el texto anterior, tenemos tres posiciones del producto (*vx*): la inicial, una anterior a la inicial y otra posterior. La diferencia del producto entre la posición inicial y la anterior $(v\dot{x}+x\dot{v}-\dot{v}\dot{x})$ debe ser igual a la diferencia entre la posterior y la inicial $(v\dot{x}+x\dot{v}+\dot{v}\dot{x})$. Y, sin explicar exactamente cómo, el último término, que en un caso es positivo y en el otro negativo, desaparece. Esta es una "demostración" que, en cualquier caso, no encontramos en el texto de Simpson ni, en general, en los manuales de la época. Sí, en cambio, en los *Principia* de Newton [1687, Book II, Lemma II] donde hay un desarrollo parecido cuando se aborda el "momento del producto"[18], lo cual nos lleva a pensar que Rieger, al escribir su texto en latín, se guió por el texto newtoniano o tuvo alguna fuente que le condujo a dicho texto.

A continuación, hay un apartado en el texto en latín, que no tiene su correspondiente en el castellano. Justamente en este apartado explica la fluxión del producto utilizando el concepto del intervalo de tiempo infinitamente pequeño para aplicar el principio de cancelación, de forma similar al método seguido por los leibnizianos:

> De otra manera
> El incremento adquirido por el producto en el tiempo *AB* / ver Lema / es $v\dot{x} + x\dot{v} + \dot{v}\dot{x}$. Sea el tiempo *AB* infinitamente pequeño, es evidente por lo tanto, que la cantidad $\dot{v}\dot{x}$, infinitamente pequeña con respecto al resto, podrá ser despreciada debido a su inutilidad, por lo tanto, ambos, incremento y la fluxión del producto son $v\dot{x} + x\dot{v}$[…] por lo tanto $v\dot{x} + x\dot{v}$ será la fluxión del producto *vx*.[19]

Sin embargo, la regla de la fluxión de la potencia en el tratado "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones" [Rieger, 1763–1765, §23–27] es una traducción literal de la que aparece en el texto de Simpson [1750, p.4]. Esto resulta de especial interés ya que la demostración que desarrolla el autor inglés, que también podemos encontrar en el "Tratado de Fluxiones" de Cerdà [Berenguer, 2016, p. 202], no la encontramos fácilmente en los textos de otros matemáticos del momento.[20] La forma de deducir la fluxión de la potencia en el texto en latín es a partir del producto, como aparece en otros textos de matemáticos continentales.

En este capítulo, pues, se deduce la fluxión del producto a partir del texto en latín, no utilizando para ello la demostración de la fluxión de una superficie curvilínea que se había recogido de Simpson, en el primer capítulo. De todas formas, como en el anterior capítulo, también en el texto español se omite un apartado del texto en latín, donde aparecen los infinitésimos. Finalmente, la fluxión de la potencia en el texto español es idéntica a la que desarrolla Simpson en su libro, mientras que el texto en latín sigue otra vía. En definitiva, en el texto "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones", vamos encontrando apartados de uno u otro texto – latín e inglés – y evitando las referencias a los infinitésimos.

6.3. Capítulo 3. Uso de las fluxiones para tirar las tangentes

El tercer capítulo, dedicado a la obtención de las tangentes, está dividido en ocho apartados, de los cuales los tres primeros son introductorios seguidos de cinco ejemplos. Los apartados introductorios, en los textos en castellano y en latín, coinciden básicamente entre sí y el razonamiento se basa en considerar la tangente "como límite" de la secante [Rieger, 1763–1765, §28]. Estos dos textos, sin embargo, no coinciden con el libro de Simpson, donde, siguiendo un método, de algún modo, inverso, se demuestra que la recta construida a partir de las variables es justamente la recta tangente [Berenguer 2016, p. 222–224].

Merece la atención una pequeña, pero significativa, diferencia entre el texto en castellano, en el apartado 28 de la introducción, donde desaparece una referencia a una distancia infinitésima, y el texto en latín:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones

Muévase pues la semi–ordenada *mp* paralela a sí misma, hasta llegar a *MP* y mientras dura este movimiento […]

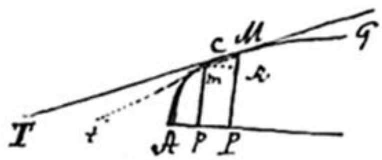


Figura 7. [RIEGER, 1763–1765, §28]

In methodum fluxionarum

Concíbase ahora que la ordenada *mp* se mueve siempre paralelamente a sí misma hasta llegar a *MP*, **o infinitamente cerca de ella** y mientras dura este movimiento […][21]

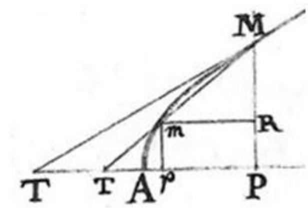


Figura 8. [RIEGER, *In methodum flusionarum*, “Problema III”]

Todos ellos, y también el texto de Simpson, llegan a expresar la subtangente en relación a las fluxiones de las variables que definen la curva:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones	Llámese pues $Ap = x$, $MP = y$, será $Pp=\dot{x}$, $RM=\dot{y}$, y la subtangente $TP = \frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$. [RIEGER, 1763–1765, §28].
In methodum fluxionarum	Y si llamamos *AP*, *x*, *MP*, *y*; tendremos finalmente $Pp = \dot{x}$, $RM = \dot{y}$, y la subtangente $TP = \frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$ [22]
The Doctrine and Application of Fluxions	Por lo tanto, si la Abscisa $AM = x$ y la ordenada $mp = y$, tendremos $mF = \frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$ [23]

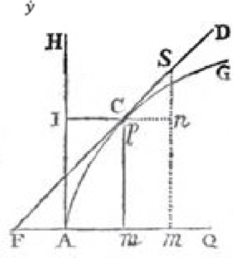


Figura 9. [SIMPSON, 1750, p. 54]

Obsérvese cómo la figura del texto en latín está elaborada y muy cuidada a diferencia de la del texto en castellano. Estas diferencias en la calidad se manifiestan en todas las figuras de ambos textos.

Como aplicación de la anterior regla, los problemas de tangentes que corresponden a los apartados del 31 al 34 son de cónicas –círculo, parábola, elipse e hipérbola– y son explicados de forma similar tanto en el texto español como en el inglés. El texto en latín sólo tiene tres ejemplos –parábola simple, parábola de orden superior y elipse– sin coincidir exactamente con los textos anteriores. El último ejemplo, desarrollado en el apartado 35, resulta de particular interés, ya que, por un lado, trata de una curva dada únicamente por su ecuación y, por otro, porque es el mismo ejemplo que aparece en el libro de Simpson:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones	*The Doctrine and Application of Fluxions*
35. Dada, pues, cualquier curva cuya ecuación sea v. g. $ax^2 + xy^2 + x^3 - y^3 = 0$, se saca en general el valor de la subtangente. Porque su fluxión será $2ax\dot{x} + y^2\dot{x} + 2xy\dot{y} + 3x^2\dot{x} - 3y^2\dot{y} = 0$ Con que $2ax\dot{x} + y^2\dot{x} + 3x^2\dot{x} = 3y^2\dot{y} - 2xy\dot{y}$ luego $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^2 - 2xy}{2ax + y^2 + 3x^2}$ y la subtangente $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^3 - 2xy^2}{2ax + y^2 + 3x^2}$ [RIEGER, 1763–1765, §35].	Ejemplo VI: 55. Sea la curva propuesta cuya Ecuación es $ax^2 + xy^2 + x^3 - y^3 = 0$. Entonces tendremos $2ax\dot{x} + y^2\dot{x} + 2xy\dot{y} + 3x^2\dot{x} - 3y^2\dot{y} = 0$ por lo tanto $2ax\dot{x} + y^2\dot{x} + 3x^2\dot{x} = 3y^2\dot{y} - 2xy\dot{y}$; $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^2 - 2xy}{2ax + y^2 + 3x^2}$, y por consiguiente $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^3 - 2xy^2}{2ax + y^2 + 3x^2}$. [24]

Podemos concluir, pues, que en este capítulo la forma de introducir la tangente como "límite" de la secante procede del texto en latín, aunque se mantiene la voluntad de omitir cualquier referencia a los infinitésimos. Por otra parte, los ejemplos, particularmente el último, proceden del libro de Simpson.

6.4. Capítulo 4. Aplicación de las fluxiones a la solución de Problemas de *maximis et minimis*

El cuarto capítulo, dedicado a los problemas de máximos y mínimos, está dividido en 24 apartados, de los cuales cuatro son introductorios, ocho ejemplos y doce en los que se desarrollan diversas consideraciones generales.

Hay una introducción similar a la del texto de Simpson, en la cual la coincidencia con el libro del autor inglés se hace evidente cuando se explica el comportamiento de la fluxión de una variable, en un máximo o un mínimo, a partir del movimiento de dos puntos. Es particularmente significativa esta coincidencia en un ejercicio donde se introduce el máximo o mínimo no a partir de una curva, como es habitual, sino a partir de un modelo cinemático:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones

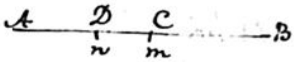


Figura 10. [RIEGER, 1763–1765, §38]

38. Para explicar esto con claridad, por medio de buenos ejemplos, concíbase el movimiento uniforme de un punto *m* en línea recta de *A* hacia *B*, y después de él, que se mueve otro punto *n*, con movimiento acelerado o retardado pero diferente que en determinado puesto, v.g. en *D* sea igual el movimiento de *n* al de *m*, que camina, como dijimos, con uniforme movimiento. Ahora, pues, considérese como creciente el movimiento de *n*; en este caso irá siendo siempre mayor la distancia de *n* detrás de *m*, hasta que los dos puntos lleguen a sus puestos *C* y *D* que han de tener a un mismo tiempo. Pero después el movimiento disminuirse ha porque siendo el movimiento de *n* hasta allí más lento que en *D*, será también más lento que el del punto *m* que va delante (por suposición); pero siendo después más veloz que el de *m*, la distancia *mn* (como se dijo poco ha) se disminuirá de nuevo, y así esta distancia es un maximum o la mayor que puede ser cuando las celeridades de los dos puntos son iguales entre sí. [RIEGER, 1763–1765, §38].

The Doctrine and Application of Fluxions

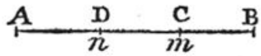


Figura 11. [SIMPSON, 1750, p. 14]

Sea un Punto *m* que se mueve uniformente en una línea recta, de *A* hacia *B*, y sea otro Punto *n* que se mueve detrás de este, con una Velocidad creciente o decreciente, pero que en una cierta posición *D* puede llegar a ser igual a la del anterior Punto *m*, que se mueve uniformemente.
Esto supuesto, consideremos en primer lugar que el movimiento de *n* es creciente; en este caso la distancia entre *n* y *m* se incrementa, hasta que los dos puntos alcancen las posiciones simultáneas *C* y *D*; pero después decrecerá de nuevo; ya que el movimiento de *n*, hasta entonces, siendo más lento que en *D*, también es más lento que el del punto precedente *m* (por hipótesis) pero convirtiéndose en más rápido que el de *m* después, la Distancia *mn* (tal como ya hemos dicho) decrecerá de nuevo. Por lo tanto es un Máximo, o el mayor de todas, cuando las velocidades de los dos Puntos son iguales entre sí.[25]

Es decir se llega a la conclusión que la distancia entre dos puntos *m* (con movimiento uniforme) y *n* (con movimiento acelerado) es máxima cuando las velocidades de los dos puntos coinciden. A continuación, con un razonamiento similar y con un movimiento retardado del punto *n*, se llega a la conclusión de que la distancia entre los dos puntos es mínima también cuando las velocidades coinciden. Considerando la distancia *mn* como una variable, su fluxión sería la diferencia de las velocidades respectivas. Luego en un máximo o un mínimo de la distancia, su fluxión será 0:

> 39. Como la distancia de *m* a *n* es un maximum o minimum cuando las celeridades de los puntos *m*, *n* son iguales y cuando esta distancia crece tanto por el movimiento de *m* cuanto se disminuye por el de *n*, su fluxión de la distancia por este instante es evidentemente = 0. Y como el movimiento de los puntos *m*, *n* se puede considerar de suerte que la distancia de *m* a *n* signifique la medida de una cantidad variable, se sigue que la fluxión de esta tal cantidad cuando esta cantidad llega a ser un maximum o minimum es = 0 [RIEGER, 1763–1765, §39].

En cualquier caso, el texto español es prácticamente idéntico al inglés.

Después de haber deducido el criterio general para un máximo o un mínimo de una variable, siguiendo el razonamiento cinemático de Simpson, merece destacar que el apartado 49 del texto en castellano nos ofrece otro método para deducir un máximo o un mínimo, a partir de las tangentes. Se trata de considerar el caso de un máximo o un mínimo como el punto en el cual la tangente es paralela al eje de las abscisas y donde tendremos $\dot{y} = 0$; $\dot{x} = \infty$.

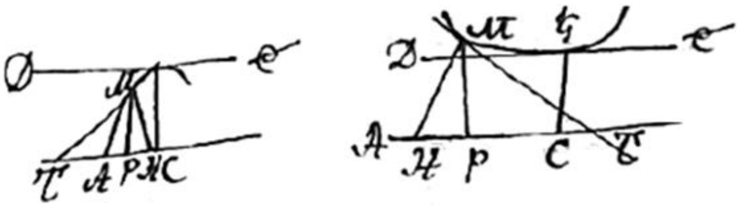


Figura 12. [RIEGER, 1763–1765, §49]

> Aplicando las Tangentes a las curvas a donde se halla un maximum o minimum, viene a suceder que la Tangente *TM* se para en *DE* que es posición paralela al eje de la curva. En este caso la normal *MH* coincide con la máxima o mínima aplicada *CG*.
> En este mismo caso del maximum o minimum la subtangente *TP* viene a ser infinita pero la Subnormal = 0. [...]
>
> Ahora pues póngase $PH = \frac{y\dot{y}}{\dot{x}}$ = 0, multiplicando por $\dot{x}$, será $y\dot{y} = \dot{x} \times 0 = 0$; y siendo, por suposición, cantidad real *y*, será $\dot{y} = 0$. Como pues $PT = \frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$ = ∞, multiplicando por $\dot{y}$, será $y\dot{x} = \infty \times \dot{y} = \infty$. Y siendo *y* cantidad real, sale $\dot{x} = \infty$. [RIEGER, 1763–1765, §49].

A continuación se dice que la tangente también puede estar en la misma dirección del eje de las ordenadas y, en este caso, tendremos $\dot{y} = \infty$, $\dot{x} = 0$, sin aclarar por qué aquí también puede haber un máximo o un mínimo. Finalmente se llega a la conclusión que para hallar un máximo o un mínimo se trata de calcular el valor de $\dot{y}$ e igualarlo a ∞ o a 0. El apartado se termina con la siguiente aseveración:

> Otras maneras de figurarse la idea con que salga $\dot{y} = 0$ o $\dot{y} = \infty$ y cual sea la razón de $\dot{y}$ con $\dot{x}$ se hallan en Hospital, Crousaz, Vellnagel[26] y otros.

Este apartado, tal como está presentado, no proviene ni del texto en latín ni del libro de Simpson. Probablemente Rieger –o Benavente– se inspiró en los autores citados pero sobre todo es de Wolff, de quien se recogió básicamente el contenido de su explicación:

> Dado que cuando en las curvas se tiene un máximo o un mínimo la tangente *TM* se convierte en *DE* paralela al eje, la normal *MH* coincide con la aplicada máxima o mínima *CG*; se cumplirá, en el caso de un máximo o un mínimo, que la subtangente *TP* será infinita y la subnormal *PH* igual a nada. Se tiene que *PH* = *ydy*: *dx*. Y si escribimos *ydy*: *dx* = 0, tendremos *dy* = 0 y debido a que *PT* = *ydx*: *dy* = ∞ (que se conoce como infinito) *dx* = ∞.

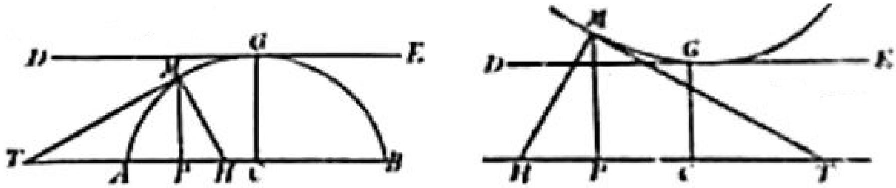


Figura 13. [WOLF, 1713–1715, *Pars Secunda, Caput* III, §63]

Los textos, tanto el español como el de Wolff, son efectivamente muy similares, especialmente las figuras que los acompañan. En el texto de Wolff también se menciona el caso en que la tangente puede ser paralela al eje de las ordenadas y una figura permite aclarar este caso:

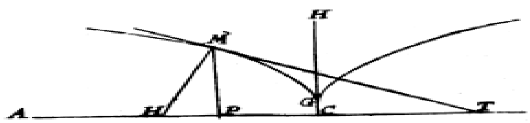


Figura 14. [WOLF, 1713–1715, *Pars Secunda, Caput* III, §63]. Tabla I, fig. 12.

Efectivamente, en el caso de la figura 14 tendremos un mínimo y la tangente en este punto sería paralela al eje de las ordenadas y, por tanto, $\dot{y} = \infty$, $\dot{x} = 0$ como se dice en el tratado que estamos analizando, o $dy = \infty$, al igual que en el texto de Wolff.

Un razonamiento similar al de Wolff se puede encontrar en el tratado *Analyse des infiniments petits* de l'Hospital [1696, §47], aunque en el texto del matemático francés no aparezca explícitamente el símbolo ∞.

Otro aspecto a destacar, en lo que se refiere a las consideraciones generales, es sobre los criterios que sirven para distinguir un máximo de un mínimo. También en este tema se puede constatar la yuxtaposición de las dos fuentes de las que venimos hablando, es decir del texto "In methodum fluxionarum" y del libro *The Doctrine and Application of Fluxions* de Simpson. En el apartado 43 aparece una explicación de cómo distinguir un máximo de un mínimo que proviene del texto en latín[28], a partir de analizar el signo de la fluxión antes y después del punto donde se anula:

> 43. Probl. 4º. Determinar cuando es un máximum o minimum la cantidad siguiente: $x^3 - 18x^2 + 96x$.
> Tomando su fluxión $3x^2\dot{x} - 36x\,\dot{x} + 96\,\dot{x}$ saldrá $x^2-12x+32 = 0$ de donde se saca la raíz $x = 4$ *y* $x = 8$. Hallándose aquí los casos del maximum y minimum, determínese cuando se da el de ser maximum. Para esto se observará si la fluxión de la cantidad propuesta es afirmativa o negativa, según que lo sea la cantidad $x^2 - 12x + 32$. Pero esta cantidad es afirmativa en el caso en que $x = 0$, por esto va creciendo la cantidad propuesta hasta que es $x = 4$ y entonces es un maximum. Después se disminuye hasta que es $x = 8$, en el cual caso es un minimum, creciendo en adelante hasta el infinito. [RIEGER, 1763–1765, §43].

Pero en los apartados 54 y 55 el texto nos vuelve a ofrecer un criterio mucho más completo para distinguir cuándo se tiene un máximo o un mínimo, planteando el estudio del signo de la fluxión a partir de su descomposición factorial, que proviene íntegramente del texto de Simpson [1750, p. 44]:

> 54. Probl. 10. Determinar los diversos valores de x, cuando el valor de
> $3x^4 - 28ax^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48b^4$ llega a ser un maximum o minimum.
> Póngase la fluxión de la expresión dada = 0, sea $12x^3 - 84ax^2 + 168a^2x - 96a^3$ o
> $x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3 = 0$. De donde (por método de divisores) se saca $x - a = 0$, $x - 2a = 0$ *o*
> $x - 4a = 0$. Luego las raíces de la ecuación o los tres valores de x son a, $2a$, $4a$.
> [...] Ahora, pues, para saber cuales raíces de éstas dan un maximum y cuales un mínimum, búsquese, si el valor de dicha fluxión, poco antes llegue a ser = 0 sea positivo o negativo. Si es positivo la raíz que satisface al caso da un maximum; si es negativo, da un minimum. La razón es ésta: mientras crece una cantidad, su fluxión es positiva, pero mientras se disminuye su fluxión es negativa. En el último ejemplo $3x^4 - 28ax^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48b^4$, la fluxión era
>
> $$12\dot{x} \times \overline{x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3} = 12\dot{x} \times \overline{x - a} \times \overline{x - 2a} \times \overline{x - 3a}$$ [29]
>
> cuyo valor antes de ser = 0 (como lo es la primera vez cuando $x = a$) es negativo (porque el producto de tres factores negativos es negativo), su primera raíz (a) indica por esto un minimum. De donde se saca sin considerar más que la siguiente raíz ($2a$) da un maximum, y la 3ª ya ($4a$) otro minimum. [Rieger, 1763–1765, §54–55].

En estos apartados la explicación es mucho más completa y clara. Cabe señalar que la reproducción del texto de Simpson es tan fidedigna que también reproduce algún error que hay en el texto inglés. En los apartados siguientes, hasta el 60, el autor del texto español continúa reproduciendo el texto de Simpson sobre el análisis de los puntos en que la fluxión se anula pero no son ni mínimos ni máximos.

Finalmente, hay que señalar que de los ocho ejemplos de máximos y mínimos que se exponen, seis son de geometría, uno de aritmética y otro de dinámica. Los de aritmética y dinámica provienen del texto en latín y los de geometría del libro de Simpson. Parece claro, pues, qué es lo que aporta cada fuente original.

El texto "In methodum fluxionarum", o lo que, de momento, nos ha llegado de él, termina con este capítulo.

En definitiva, podemos concluir que el tratado "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones", en cuanto al criterio para hallar un máximo o un mínimo recoge, por un lado, la visión geométrico–cinemática muy particular de Simpson y, por otro, el enfoque de la corriente continental del cálculo infinitesimal representada por Wolff, manteniendo, en cualquier caso, la notación newtoniana de la fluxión, sin seguir, en este apartado, ni el texto en latín ni el de Simpson. En cuanto al criterio para distinguir un máximo de un mínimo se puede hablar de una cierta yuxtaposición de las dos fuentes mencionadas, imponiéndose el texto de Simpson. Y, finalmente, a partir de los ejercicios elegidos de uno u otro texto se puede deducir que hay una voluntad de incorporar ejemplos geométricos en castellano que no se encontraban en el latín.

6.5. Los capítulos 5, 6 y 7

El capítulo quinto "Del Método inverso de las fluxiones o de la manera de determinar las fluentes de las fluxiones dadas" tiene sólo tres apartados y no llega a ocupar una página. En este capítulo se explican las reglas más elementales para obtener la fluente a partir de la fluxión de las potencias. Se trata de la traducción de los primeros apartados de la "Section VI. Of the Inverse Method, or the Manner of determining the Fluents of given Fluxions" del libro de Simpson.

El capítulo sexto, "Uso de las fluxiones para hallar las Áreas de las Curvas", está dividido en cinco apartados. En la introducción se explica la forma de calcular el área limitada por una curva cuando está referida a ejes perpendiculares, por un lado, y referida a coordenadas polares, por otro. Tres ejemplos ilustran estas explicaciones: el cálculo del área de un triángulo, una parábola y un sector circular que son la traducción de los respectivos ejercicios de la "Section VII. Of the Use of Fluxions in finding the Areas of Curves" de *The Doctrine and Application of Fluxions* de Simpson.

Tal como se había establecido anteriormente, en este capítulo se deduce el área por debajo de una curva a partir de considerar la fluxión de un área curvilínea igual a un rectángulo, tal como hace Simpson:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones

64. Cuando el arco de la curva es tal que sus ordenadas son perpendiculares al eje.

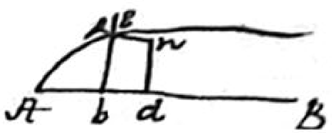


Figura 15. [RIEGER, 1763–1765, §64]

Sea v.g. *AB* el eje. Muévase *gRb* paralelamente a sí misma de *A* hacia *B* y exprésase su celeridad o fluxión de la abscisa *Ab* en cualquier posición de *AB* por *bd*. Es evidente del Cap. 1º que el rectángulo *bn* contenido entre *bd* y la ordenada *bR* expresa la fluxión correspondiente del área engendrada *AbR*. La cual fluxión, si *Ab* es = *x*, *bR* = *y*, será $y\dot{x}$, de donde se saca el área, cuando se substituye el valor correspondiente por *y* o *x*[30] (según sea la ecuación de la curva) y en fin se toma la fluente. [RIEGER, 1763–1765, §64].

The Doctrine and Application of Fluxions

Sea *ARC* una Curva de cualquier Clase cuyas ordenadas son perpendiculares a un Eje *AB*.

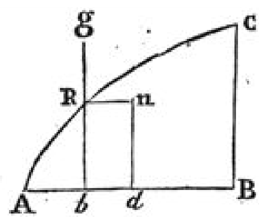


Figura 16. [SIMPSON, 1750, p. 121]

Imaginemos una línea Recta *bRG* (perpendicular a *AB*) que se mueve paralela a ella misma de *A* hacia *B*; y exprésase la Celeridad, o Fluxión de la Abscisa *Ab* en cualquier posición propuesta de esta Línea, por *bd*: Entonces se cumplirá, por el Art 4, que el Rectángulo (*bn*) formado por *bd* y la Ordenada *bR* expresará la Fluxión correspondiente del

...

Área generada *abR*: cuya Fluxión, si $Ab = x$ y $bR = y$, será por lo tanto $y\dot{x}$; de donde, substituyendo y o $\dot{x}$ (según la Ecuación de la Curva) y tomando la Fluente, se podrá conocer el Área misma.[31]

Los ejemplos que siguen también reproducen ejercicios del libro de Simpson. Tomemos el problema nº 3 como muestra:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones

Probl. 3º. Hallar el área de un sector circular. Sea el sector *AOR*, Radio *AO*, vel[32] $OR = a$. El arco *AR* (variable por movimiento de *R*) $= z$, $Rr = \dot{z}$.

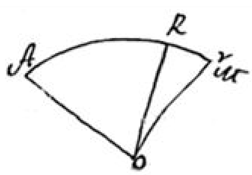


Figura 17. [Rieger, 1763–1765, §66]

La fluxión del área será aquí

$\frac{a\dot{z}}{2}$ $(= \Delta\, ORr)$ luego el área es

$\frac{az}{2} = AO \times \frac{1}{2} AR$

de donde es claro que el área del círculo se expresa por un rectángulo del semi–diámetro y semi–periferia. [Rieger, 1763–1765, §66].

The Doctrine and Application of Fluxions

Ejemplo VI: 119. Donde se quiere determinar el Área del Sector circular *AOR*.

Entonces, poniendo el Radio *AO* (o *OR*) = *a*, el Arco *AR* (considerado como la variable del Movimiento de *R*) $= z$, y $Rr = \dot{z}$, la Fluxión del Área aquí se expresará por

$\frac{a\dot{z}}{2} = AO \times \frac{1}{2} AR$

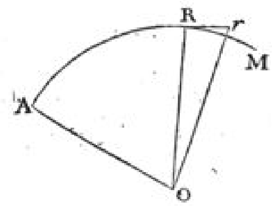
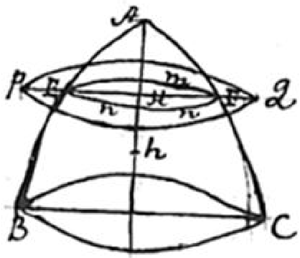
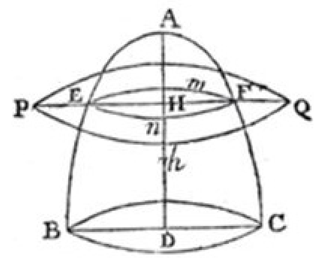


Figura 18. [Simpson, 1750, p. 129]

De donde se deduce que el Área de cualquier Círculo está expresada por un Rectángulo formado por la semicircunferencia y el semidiámetro.[33]

A parte de constatar la total equivalencia entre los dos textos, llama la atención que, en la figura del texto español, desaparece el segmento *Rr* tangente al arco correspondiente.

El capítulo séptimo, que es el último “De la aplicación de las fluxiones para hallar el contenido de los sólidos”, está dividido en cinco apartados. En este podemos encontrar una introducción seguida de tres ejercicios: el cálculo del volumen de un cono, de un conoide parabólico y de un cuerpo que, en el texto inglés, recibe el nombre de “groin” y en el texto español “media naranja”. De la misma manera que en los capítulos anteriores, se trata de la traducción de algunos apartados de la “Section IX. The Application of Fluxions in investigating the Contents of Solids" del libro de Simpson. Veamos el primer ejercicio de este capítulo que sirve como introducción en ambos textos:

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones	*The Doctrine and Application of Fluxions*
69. Sea *ABC* el sólido que se supone engendrado por un plano *PQ* el cual pasa sobre él con un movimiento paralelo. Sea *Hh* perpendicular a *PQ*, tomado para expresar la fluxión de $AH = x$, o para expresar la celeridad con el plano generador se mueve.	145. Represente *ABC* un sólido cualquiera; supongamos que está generado (o descrito) por un Plano *PQ* que pasa sobre éste, con un Movimiento paralelo. Tómese *Hh* (perpendicular a *PQ*) como la expresión de la Fluxión *AH* (*x*) o la Velocidad con la cual el Plano generador se mueve;
 Figura 19. [RIEGER, 1763–1765, §69]	 Figura 20. [SIMPSON, 1750, p. 171]
Exprésese por *A* el área de la parte *EmFn* contenida en el sólido. Se sigue por el Cap. 1º que es la fluxión del sólido *AEF*. Con que juzgándose *A* en términos de $\dot{x}$ [34] según la naturaleza de la figura y tomando la fluente del sólido, la que se expresará después por *s*, se hallará el contenido del sólido. [RIEGER, 1763–1765, §69].	sea también el Área de la Parte, *EmFn*, del Plano interceptada por, o contenida en el Sólido, denominada *A*; se sigue entonces, del Art. 2 y 5 que la Fluxión del sólido *AEF*, vendrá expresada por $A\dot{x}$. De aquí, desarrollando *A* en términos de *x* (según la Naturaleza de la Figura) y tomando entonces la Fluente, obtendremos el Contenido del Sólido (el cual representaremos, siempre, a partir de ahora por *s*). [35]

Por lo tanto, podemos concluir que en los últimos capítulos del tratado se refuerza la influencia del libro de Simpson, en todos los aspectos.

7. Comparación del texto "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones" con el "Tratado de Fluxiones" de Cerdà

Los manuscritos relativos al *Tratado de Fluxiones* de Cerdà también se han localizado en la colección "Cortes" de la Real Academia de Historia de Madrid. Se trata de 24 capítulos, en los que Cerdà recogió gran parte del libro de Simpson, *The Doctrine and Application of Fluxions*, efectuando, por un lado, una selección de los ejercicios del libro del autor inglés y, por otro lado, añadiendo texto propiamente suyo. La intención, manifestada por el mismo Cerdà, era la de publicar su tratado [Berenguer, 2016].

Los primeros catorce capítulos, que están repetidos y corresponden a dos versiones de un mismo texto, forman una parte diferenciada del resto del tratado, que, por la manera de redactarlos y por su presentación, claramente constituyen un manual para la clase, los principales receptores del cual serían los propios alumnos de Cerdà. Es altamente probable que estos primeros capítulos constituyesen el programa de un curso que Cerdà impartió tanto en el Colegio de Cordelles de Barcelona como en el Colegio Imperial de Madrid.

Cerdà, que, como muchos de sus contemporáneos matemáticos en España, entró en contacto con las dos corrientes del cálculo diferencial, a pesar de asumir plenamente la concepción geométrico–cinemática de Newton y la definición de fluxión de Simpson, prefirió la notación leibniziana, *dx*, en lugar de la *x* punteada newtoniana, $\dot{x}$. Fue uno de los pocos matemáticos de la época que, trabajando con fluxiones newtonianas, utilizó la notación leibniziana. La adopción de elementos leibnizianos por parte de Cerdà fue más allá de la notación. A pesar del rechazo teórico del uso de los infinitésimos, en ciertas ocasiones, el matemático catalán recurrió a ellos en alguna demostración y, en varios capítulos, combinó conceptos de las dos corrientes. En efecto, en determinados pasajes del texto, como cuando introduce la cuadratura de las curvas, el autor considera la fluxión de una magnitud –área– como un incremento infinitamente pequeño, consideración más propia de la corriente continental del cáculo infinitesimal.

Por otro lado, tanto el libro de Simpson como la obra de Cerdà, a pesar de enmarcarse en el universo geométrico–cinemático newtoniano, son textos donde el álgebra juega un papel esencial. Simpson manifestó explícitamente su admiración por el instrumento algebraico, que tanto utilizaban los matemáticos continentales, y Cerdà siguió al autor británico en lo que se refiere a esta inclinación hacia el álgebra, y, en cierta forma, la acentuó.

Ciertamente, el "Tratado de Fluxiones" es una adaptación de *The Doctrine and Application of fluxions* de Simpson, pero no se trata de una simple traducción, particularmente en lo que se refiere a los primeros capítulos. Y precisamente una de las principales aportaciones que hizo Cerdà, en relación al texto de Simpson, fue la acentuación del carácter didáctico de su discurso.

Por esta razón no debe extrañar que muchos ejercicios del texto de "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones", que como ya hemos visto recoge partes del libro de Simpson, coincidan con los del "Tratado de Fluxiones" de Cerdà. En cualquier caso, la equivalencia entre los dos textos en castellano proviene de que los dos tienen una fuente original común. Veamos, en un ejemplo, las tres versiones de un mismo ejercicio del capítulo de tangentes, comprobando la coincidencia de estas, con la salvedad que Cerdà utiliza la notación lebniziana en lugar de la newtoniana:

The Doctrine and Application of Fluxions (Simpson)

Ejemplo I: 50. Dibujar una línea recta *CT* que toque a un Círculo *BCA*, en un Punto dado *C*.

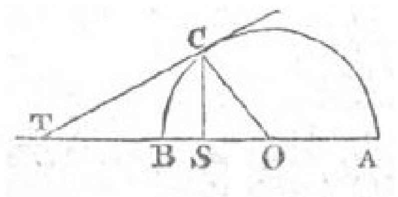


Figura 21. [SIMPSON, 1750, p. 55]

Sea *CS* perpendicular al Diámetro *AB* = *a*, y pongamos *BS* = *x* y *SC* = *y*. Entonces, por la propiedad del Círculo,

$y^2\ (CS^2) = BS \times AS(= x \times \overline{a-x}) = ax - x^2$

de lo que, si tomamos la Fluxión para determinar la Razón entre $\dot{x}$ e $\dot{y}$, tenemos $2y\dot{y} = a\dot{x} - 2x\dot{x}$; en consecuencia $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2y}{a-2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x}$

multiplicado por *y*, da
$\frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x} \times y = \frac{y^2}{\frac{1}{2}a-x}$ = Subtangente *ST*.

De donde (supuesto *O* como centro) tenemos
OS $(\frac{1}{2}a - x): CS(y) :: CS(y): ST$; lo cual también sabemos por otros Principios.[36]

Introducción fácil al algoritmo de fluxiones"(Rieger–Benavente)

31. Problema 1º. Tirar la tangente de un punto dado en el círculo.

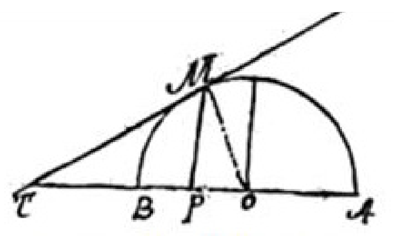


Figura 22. [RIEGER, 1763–1765, §31]

Sea *M* el punto dado, el diámetro *BA* = *a*, *PM* perpendicular al diámetro = *y*, *BP* = *x*. Será la ecuación para el círculo *ax* – *xx* = *yy*. Tomando pues la fluxión de esta ecuación para determinar la razón de $\dot{x}$, $\dot{y}$, sale $2y\dot{y} = a\dot{x} - 2x\dot{x}$, luego

$\dot{x} = \frac{2y\dot{y}}{a-2x}$

y

$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2y}{a-2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x}$

Siendo pues la expresión general de la sub–tangente *PT*= $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$ se ha de multiplicar el valor de $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ por *y*, y saldrá $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x} \times y = \frac{y^2}{\frac{1}{2}a-x} = PT$.

Y así supuesto el centro en *O*, será *OP* $(\frac{1}{2}a - x): MP(y) :: MP(y): PT$, como consta de la Geometría.
Sabido el punto *T* por donde ha de pasar la tangente, se puede tirar la tangente de *M*. [RIEGER, 1763–1765, §31].

Tratado de Fluxiones (Cerdà)

Prob. 1. Tirar una Tangente *BE* al punto *D* del Círculo *ADP*.

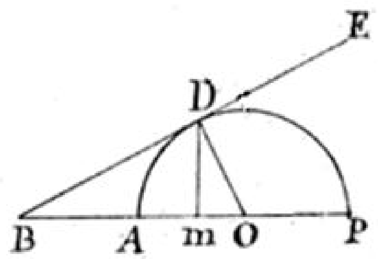


Figura 23. [CERDÀ, 1757–1759, f. 28–8 v.]

Sea *Dm* la perpendicular tirada desde el punto dado *D* al Eje o Diámetro *AP*. Haciendo pues el Diámetro $AP = a$, su parte o Abscisa correspondiente $Am = x$ y la perpendicular o Ordenada $Dm = y$, por la propiedad del Círculo tendremos $Dm^2 = AM \times mP$, esto es $y^2 = ax - x^2$, cuya Fluxión $2ydy = adx - 2xdx$ nos dará

$dx = \frac{2y}{a-2x} \times dy$, por consiguiente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a-2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x}$$

que multiplicado por y será

$$\frac{ydx}{dx} = \frac{y^2}{\frac{1}{2}a-x} = \frac{a-x}{\frac{1}{2}a-x} \times \quad x = Bm,$$

Sub–tangente al Círculo. [CERDÀ, 1757–1759, f. 28–8v.]

La principal diferencia entre "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones" y el "Tratado de Fluxiones" de Cerdà es que el último pretende cubrir, de forma bastante exhaustiva, el desarrollo completo del cálculo diferencial e integral, tomando como modelo el libro de Simpson, adaptando y modificando el texto original, particularmente en los primeros capítulos. En este sentido el "Tratado de Fluxiones" mantiene una coherencia metodológica durante sus 24 capítulos. En cambio, "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones" es un tratado mucho más breve, que solo consta de siete capítulos muy cortos, y en este texto ya no se observa esta misma coherencia metodológica, ya que su fuente más directa no es solamente el libro de Simpson, como ya se ha analizado. El texto de Rieger–Benavente parece, a menudo, recoger lo que el autor ha creído interesante de Simpson sin modificar el texto original, a diferencia de Cerdà que tiene una apropiación del texto inglés más selectiva. En cualquier caso ¿por qué Rieger o Benavente toman como referencia el libro de Simpson? Una hipótesis razonable es pensar que en el Colegio Imperial ya se conocía al autor inglés. El mismo Cerdà pudo haber reforzado la influencia de dicho libro cuando llegó al Colegio Imperial en 1765. La relación que Cerdà tuvo con Rieger no pudo ser mucha desde el momento que justamente Cerdà vino a substituir a Rieger como primer profesor de matemáticas, pero Benavente permaneció como segundo profesor. De manera que Benavente dio clases junto a Cerdà en el Colegio Imperial durante dos años hasta la expulsión de los jesuitas en 1767. Todo esto reafirma la idea de que Benavente pudo tener un papel más relevante que el de simple traductor de Rieger.

8. Conclusiones

En primer lugar hay que considerar que el texto “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” está íntimamente relacionado con “In methodum fluxionarum” al que tenemos que atribuirle, con toda seguridad, la autoría de Rieger.

En segundo lugar ambos textos se desarrollan bajo la visión newtoniana, es decir la concepción geométrico–cinemática, con la notación fluxioniana correspondiente. Esta conclusión, independientemente del papel que pudo jugar posteriormente Benavente en la redacción del texto español, adquiere especial relevancia, siendo como era Rieger un matemático centro–europeo seguidor de Wolff.

Aunque ambos textos están escritos bajo la misma concepción geométrico–cinemática, la visión en el texto “In methodum fluxionarum” no está tan alejada del uso de los infinitésimos mientras que el texto “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” es un tratado que si bien, por un lado, traduce gran parte de este texto en latín, por otro, incorpora muchos apartados del libro de Simpson, reforzando la noción de fluxión como un incremento finito y evitando los infinitésimos. Se reconocen, pues, en el tratado en castellano, dos lenguajes diferentes y se pone de manifiesto, particularmente en el cuarto capítulo, que gran parte del tratado está confeccionado a base de yuxtaponer dos textos distintos sin, en muchas ocasiones, pasar por un proceso de reelaboración. Resulta de máxima importancia constatar que nunca se produce la coincidencia entre los tres textos, el español, el latín y el inglés, es decir el texto español coincide a veces con el latín y otras con el inglés. Esta constatación es un primer argumento para suponer que estos lenguajes yuxtapuestos pueden suponer dos autores distintos: Rieger y Benavente.

Por otra parte, hay que subrayar que en el texto “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” también se constata la influencia de Wolff en lo que se refiere al tratamiento de los máximos y mínimos a partir de la tangente.

Si se compara el texto en castellano con el texto en latín hay un aspecto que se puede observar en todos los capítulos y es la diferente calidad de las figuras. En el texto en latín estas están muy cuidadas y dibujadas por manos expertas mientras que en el texto en castellano, siendo copias de las anteriores, están muy poco elaboradas. Este es un aspecto que refuerza la hipótesis que el primer texto fue escrito directamente por Rieger –autor de varias obras sobre arquitectura– y el segundo por Benavente.

Más allá de las deficiencias que se puedan encontrar en este tratado, la pregunta que se impone es el por qué de esta modificación del texto escrito originalmente en latín. Parece evidente que, por un lado, hay una voluntad de reforzar la visión geométrico–cinemática y, por otro, la de incorporar los ejemplos geométricos que no tenía el texto en latín.

El mejor autor a partir del cual se podía conseguir esta visión y extraer estos ejemplos era Simpson. Probablemente porque en el Colegio Imperial ya se conocía al autor inglés, conocimiento reforzado con la llegada de Cerdà, y Benavente tuvo un papel determinante en la ampliación del texto en latín con los ejercicios de Simpson.

En cualquier caso, hay que concluir que “Introducción fácil al algoritmo de fluxiones” era un texto pensado para utilizarlo en las clases. Se hizo un esfuerzo para resumir en pocos folios una introducción al cálculo fluxional, con ejemplos sencillos y una voluntad de ser conciso y claro. Sólo con este texto ya se podría asegurar la existencia de clases sobre cálculo diferencial en el Colegio Imperial durante los años anteriores al 1767.

Finalmente, la misma debilidad del texto, donde parece que no se tiene un excesivo cuidado para remodelar los contenidos provenientes de fuentes originales o reproducir mejor las figuras, resulta ser una prueba más que el objetivo de este tratado no era conseguir una publicación –a diferencia del “Tratado de Fluxiones” de Cerdà escrito con la intención de publicarlo– sino era básicamente pedagógico, para ser utilizado en las clases. No importaba el autor del texto, lo que realmente importaba es que fuese útil para iniciar en el nuevo cálculo a los alumnos.

NOTAS

1. Es de descatar el artículo de JUŽNIČ [2010] donde da a conocer la aportación de Rieger en el campo de la arquitectura.
2. GARMA PONS [1988] y NAVARRO BROTÓNS [2002, 2003, 2006] han analizado la figura de Rieger y sus obras durante su estancia en el Colegio Imperial de Madrid.
3. La Biblioteca de Cortes procede del Colegio Imperial de los Jesuítas. Tras la expulsión de estos, sus fondos pasaron a la Biblioteca de las Cortes (hoy Congreso de los Diputados) de la que recibe el nombre, y de allí a la Real Academia de la Historia. La información que ofrece dicha Academia, en su página web, https: //www.rah.es/wp–content/uploads/2016/09/guiaBiblioteca1.pdf, es la siguiente:

   “Ingreso: en 1850. Procede del colegio de San Isidro de los Jesuitas. Tras la expulsión de éstos, sus fondos pasaron a la Biblioteca de las Cortes (hoy Congreso de los Diputados), de la que recibe el nombre, y de allí a la Real Academia de la Historia. – Contenido: pese al título conservado por la razón expuesta, su contenido nada tiene que ver con dicha institución, sino que se refiere a religión, literatura, historia, teatro (representado en los colegios de jesuitas), matemáticas, geometría etc. – 1.257 libros y legajos. – Descripción: catálogo mecanografiado con índice. – Signatura : 9 / 2157–3414 – Bibliografía: GARCIA SORIANO, Justo: El teatro de colegio en España. *Boletín de la Real Academia Española*. 1927–1932. SAA, Orlando: El teatro escolar de los jesuitas en España, New Jersey, Slusa, 1990. SCHUTTE, Josef Franz (S.I.): Documentos sobre el Japón conservados en la colección "Cortes" de la Real Academia de la Historia. Madrid, 1961”
4. UDÍAS [2005, 2010] ha profundizado particularmente en la biografía y los textos de los matemáticos jesuítas durante los siglos XVII y XVIII en España. Así como DOU [1997] en los matemáticos jesuítas españoles del siglo XVII.
5. Al final de la parte dedicada a la aritmética aparece la siguiente frase “explicaba esto mismo muy bien mi hermano el P. Christiano Rieger”.
6. En el legajo 9/2812 de la “Colección Cortes” en la RAH se puede encontrar un texto que tiene como título “Elementos de Matemáticas. Tomo VIII. Analysis de los infinitos” y otro con el título “Elementos de Matemáticas. Tomo IX. Cálculo Exponencial, Diferencio–diferencial y Arithmética de los infinitos” atribuidos a Wendlingen. En el legajo 9/3811 vuelven a aparecer los tomos VIII y IX repetidos.
7. Real Biblioteca de Madrid, “Conclusiones Mathematicas practicas y especulativas defendidas en el Real Seminario de Nobles […] bajo instruccion y magisterio del R.P. Estevan de Terreros y Pando [...] Dia 13 de Abril de 1751.”
8. Biblioteca Nacional (Madrid), “Conclusiones mathematicas, defendidas en el Real Seminario de Nobles en presencia de sus Magestades Catholicas [...] por Don Leandro Carrillo [...] y Don Edmundo Sarsfield, Conde

de Kilmalock, Seminaristas en dicho Real Seminario / Presididas por el Padre Estevan Bramieri, de la Compañia de Jesus; Dedicadas al Rey [...] Carlos III por el Seminario [...]." Madrid: Por Joachin Ibarra [...], 1760.

9. RAH, "Colección Cortes", legajo 9/2816.
10. Hemos optado por mantener el nombre de Rieger como autor del texto "Introducción fácil al algoritmo de fluxiones", tanto en la bibliografía como en las citas, para facilitar las referencias a dicho texto y porque, en cualquier caso, este texto se escribió a partir de las clases impartidad por Rieger.
11. "Represaentet *AB* momentum temporis sive finite sive infinite parvum, nihil refert, terminatum duobus instantibus *A* et *B*; sit *x* valor alicujus fluentis aut crescentis quantitatis in instanti *A*, cujus ea sit [pres] hoc instanti velocitas, ut, si flueret durante integro momento *AB* hac ipsa velocitate, acquireret certum incrementum expressum per ẋ; erit tum hac quantitas ẋ dicta Fluxio de *x* in instanti *A*, quando valor fluentis quantitatis erat *x*." [RIEGER, *In methodum fluxionarum*, "Definitio"]. La transcripción del texto en latín es, salvo algún error, copia fidedigna del texto en el manuscrito original. La traducción del latín al castellano es obra del autor del artículo. Y así continuará siendo en las sigientes citas.
12. "Every Quantity so generated is called a variable, or flowing Quantity: And the magnitude by which any flowing Quantity WOULD BE uniformly increased in a given Portion of Time, with the generating Celerity at any proposed Position, or Instant (was it from thence to continue invariable) is the Fluxion of the said Quantity at that Position, or Instant." [SIMPSON, 1750, Part I, 1]. La traducción del inglés al castellano es debida al autor, así como en las siguientes citas de este artículo.
13. "Ex hac definitione apparet, incrementorum ipsius *x* tempore *AB* acquisitum, si *x* fluat uniformiter, esse id ipsum ac ejus fluxionem supra definitam: sin *x* non fluat uniformiter, id est, si ejus velocitas in instanti *B* non sit eadem, ac ejus velocitas in instanti *A*, tum ejus incrementum acquisitum tempore *AB* non erit idem cum ejus fluxione supra definita sed differet plus minusve ab ea, prout tempus *AB* majus minusve erit: qualsi tamen tempus *AB* sit infinite parvum tune licet velocitas ipsius *x* in instanti *B* non sit eadem, mathematice loquendo cum velocitate in instanti *A*, differentia tamen infinite parva existente respectu totius velocitas ea tuto negligi potest quando finita rationes fluxionum solummodo considerantur. Atque hoc sensu incrementum et fluxio [...] descripta unum pro altero accipi potest, id est, quantitas *x*, in tam parvo tempore considerata potest tanquam fluens uniformiter." [RIEGER, *In methodum fluxionarum*, "Scholium"].
14. Hay que tener en cuenta que el texto en castellano está transcrito tal cual aparece en el manuscrito original mientras que el texto en latín es una traducción del autor del artículo, con lo cual, probablemente, se pueda haber introducido un sesgo más acorde al redactado de nuestro tiempo.
15. "Thus, let the Point m be conceived to move from *A*, and generate the variable Right–Line *Am*, by a Motion any how regulated; and let the Celerity thereof, when it arrives at any proposed Position *R*, be such as would, was it to continue uniform from that Point, be sufficient to describe the Distance, or Line *Rr*, in the given Time allotted for the Fluxion: Then will *Rr* be the Fluxion of the variable Line *Am*, in that Position".
"The Fluxion of a plane Surface is conceived in like Manner, by supposing a given Right–line *mn* to move parallel to itself, in the Plane of parallel, and immoveable Lines *AF* and *BG*: For, if (as above) *Rr* be taken to express the Fluxion of the Line *Am*, and the Rectangle *RrsS* be completed; then that rectangle, being the Space which would be uniformly described by the generating Line *mn*, in the Time that *Am* would be uniformly increased by *mr*, is therefore the Fluxion of the generated Rectangle *Bm*, in that Position, according to the true Meaning of the Definition." [SIMPSON, 1750, Part I, 2,3].
16. "4. If the Lenght of the generating Line *mn* continually varies, the Fluxion of the Area will still be expounded by a Rectangle under that Line and the Fluxion of the Abscissa, or Base: For let the curvilineal Space *Amn* be generated by the continual, and parallel, Motion of the (now) variable Line *mn*, and let *Rr* be the Fluxion of the Base, or Abscissa, *Am* (as before); then the Rectangle *RrsS* will, here also, be the Fluxion of the generated Space *Amn*: Because, if the Lenght and Velocity of the generating Line *mn* were to continue invariable from the Position *RS*, the Rectangle *RrsS* would then be unifomrly generated, with the very Celerity where with it begins to be generated, or with which the Space *Amn* is increased in that Position." [SIMPSON, 1750, Part I, 4].
17. "Sint *v* et *x* valores duarum fluentium quantitatum pro dato instanti temporis, supponantur que ha quantitates flueve uniformiter put in superior lemnurte erit tum manifestum esse uno momento ante datum instans earum valores $v-\dot{v}$ et $x-\dot{x}$; earumque productum $vx-v\dot{x}-x\dot{v}+\dot{v}\dot{x}$: sed incrementum acquisitum per productum in aequali momento immediate sequenti ad datum instans [deprehendebatur] esse $v\dot{x}+x\dot{v}+\dot{v}\dot{x}$;

et hoc posterius incrementum per supra positum Lemma tantum excedit veram fluxionem producti quantum alterum ab ea deficit; quare vera fluxio producti *vx* pro instanti temporis quo factores sunt v et x, est $v\dot{x}+x\dot{v}$" [Rieger, *In methodum fluxionarum*, "Problema I"].

18. "CASE 1. Any rectangle, as *AB*, augmented by perpetual flux, when, as yet, there wanted of the sides *A* and *B* half their moments and $\frac{1}{2}b$, was $A-\frac{1}{2}a$ into $B-\frac{1}{2}b$ or $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$ but as soon as the sides *A* and *B* are augmented by the other half moments, the rectangle becomes $A+\frac{1}{2}a$ into ,$B+\frac{1}{2}b$ or $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. From this rectangle subduct the former rectangle, and there will remain the excess *aB* + *bA*. Therefore with the whole increments *a* and *b* of the sides, the increment *aB* + *bA* of the rectangle is generated. Q.E.D". [Newton, 1687, Book II, Lemma II]. También en *The Elements of the Method of Fluxions* de Maclaurin [1742; Book II, §707] se puede encontrar una demostración similar.
19. "Aliter sic. Incrementum acquisitum per productum in tempore *AB* / vide Lemma / est Sit hoc tempus *AB* infinite parvum, evidens hinc est, quantitatem *v*ẋ utpote infinite minorem quam reliquum, posse negligi propter suam inutilitatem, ita, ut ambo, incrementum et fluxio producti sint […] quare erit adhuc fluxio producti vx." [Rieger, *In methodum fluxionarum*, "Problema I"].
20. Se trata de una demostración donde Simpson homologa el incremento real de x^2 en un intervalo con el experimentado, en este mismo intervalo, por un punto de este, con velocidad constante, llegando finalmente a un proceso "ad infinitum" donde deduce hacia donde "tiende" esta velocidad constante cuando el intervalo tiende a 0.
21. "Concipiatur nunc ordinata mp moveri semper parallele ad se ipsam, usque dum tandem pertingat in *MP*, vel infinite prope accedat illuc; et durante hoc toto motu suppossatur [...]" [Rieger, *In methodum fluxionarum*, "Problema III"]. La negrita ha sido introducida por el autor de este artículo.
22. "Atque si dicamus *AP*, *x*, *MP*, y; habemus denique $Pp=\dot{x}$, $RM=\dot{y}$, et subtangentem $TP=\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$. [...]" [Rieger, *In methodum fluxionarum*, "Problema III"].
23. "Hence, if the Abscissa *Am* be put = *x*, and the Ordinate *mp* = *y*, we shall have $mF=\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$". [Simpson, 1750, p. 54].
24. "Example VI: 55. Let the proposed Curve be that whose Equation is $ax^2+xy^2+x^3-y^3=0$. Then we shall have $2ax\dot{x}+y^2\dot{x}+2xy\dot{y}+3x^2\dot{x}-3y^2\dot{y}=0$ therefore $2ax\dot{x}+y^2\dot{x}+3x^2\dot{x}=3y^2\dot{y}-2xy\dot{y}$, $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{3y^2-2xy}{2ax+y^2+3x^2}$, and consequently $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{3y^3-2xy^2}{2ax+y^2+3x^2}$. [Simpson, 1750, p.58].
25. Let a Point *m* move uniformly in a Right Line, from *A* towards *B*, and let another Point *n* move after it, with a Velocity either increasing, or decreasing, but so that it may, at a certain Position, *D*, become equal to that of the former Point *m*, moving uniformly. This being premised, let the Motion of *n* be first considered as an increasing one; in which Case the Distance of *n* behind *m* will continually increase, 'till the two Points arrive at the contemporary Positions *C* and *D*; but afterwards it will, again, decrease; for the Motion of *n*, 'till then, being slower than at *D*, it is also slower than that of the preceding Point m (by Hypothesis) but becoming quicker, afterwards, than that of *m*, the Distance *mn* (as has been already said) will again decrease: And therefore is a Maximum, or the greatest of all, when the Celerities of the two Points are equal to each other". [Simpson, 1750, p. 14].
26. Marqués de l'Hospital cuya principal obra es *L'Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696). Jean–Pierre Crousaz cuyas principales obras matemáticas son *Réflexions sur l'utilité des mathématiques et sur la manière de les étudier, avec un nouvel essai d'arithmétique démontrée* (1715), *Commentaire sur l'Analyse des Infiniment petits* (1721), *Traité de l'algèbre* (1726). Christoph Friedrich Vellnagel escribió *Nvmerandi methodi sive arithmeticae omnes possibiles e qvibvs cvm dyadica conseqventes plvrimae vsqve ad dvodenariam evolvvntvr, ad caeteras ervendas regvla generalis exhibetvr...* (1740), y *Gründliche und ausfuhrliche erlauterungen so wohl über die gemeine algebra als differential– und integral–rechnung, wie diese wissenschafften...* (1743).
27. "Quoniam in curvis maximum vel minimum habentibus tangens *TM* degenerat tandem in *DE* & axi parallela evadit, adeoque normalis *MH* coincidit cum maxima vel minima applicata *CG*; erit, in casu maximi vel minimi,

subtangens *TP* infinita atque subnormalis *PH* nihilo aequalis. Est vero *PH* = *ydy:dx*. Quodsi ergo ponatur *ydy:dx* = 0; reperietur *dy* = 0 &. Ob *PT* = *ydx:dy* = ∞ (quae est nota infinitatis) *dx* = ∞". [Wolff ,1713–1715; Pars Secunda, Caput III. §63].

28. "Exemplum III. Esto determinandum, quando sequens quantitas fiat Maximum vel Minimum, videlicet $x^3 - 18x^2 + 96x$". [Rieger, *In methodum fluxionarum*, "Problema IV"].
29. El autor del texto, Rieger o Benavente, comete un error ya que el último factor debería ser *(x–4a)*. Lo interesante es que este mismo error se encuentra en el texto de Simpson.
30. Aquí el autor del texto tiene un error (que no tiene Simpson) ya que en lugar de x debe escribir $\dot{x}$.
31. "Case I: 112. Let *ARC* be a Curve of any Kind whose Ordinates are perpendicular to an Axis *AB*". "Imagine a Right–line *bRg* (perpendicular to *AB*) to move parallel to itself from *A* towards *B*; and let the Celerity thereof, or the Fluxion of the Abscissa *Ab*, in any proposed Position of that Line, be denoted by *bd*: Then it will appear, from Art.4. that the Rectangle (*bn*) under bd and the Ordinate *bR*, will express the corresponding Fluxion of the generated Area *abR*: Which Fluxion, if *Ab* = *x*, and *bR* = *y*, will therefore be = $y\dot{x}$: From whence, by substituing for *y* or $\dot{x}$ (according to the Equation of the Curve) and taking the Fluent, the Area itself will become know" [Simpson, 1750, p. 121].
32. "vel" es una expresión latina que equivale, en este caso, a "o" en castellano.
33. "Then, putting the Radius *AO* (or *OR*) = *a*, the Arch *AR* (considered as variable by the Motion of *R)* = *z*, and *Rr* = $\dot{z}$, the Fluxion of the Area will here be expressed by $\frac{a\dot{z}}{2}$ (= the Triangle *ORr*, Art. 113). Whence the Area itself is = $\frac{az}{2} = AO \times \frac{1}{2} AR$: From which it appears that the Area of any Circle is expressed by a Rectangle under half the Circumference and half the Diameter". [Simpson, 1750, p. 129].
34. Debería ser *x*.
35. "145. Let *ABC* represent any Solid; conceived to be generated (or described) by a Plane *PQ* passing over it, with a parallel Motion: Let *Hh* (perpendicular to *PQ*) be taken to express the Fluxion of *AH (x)* or the Velocity with which the generating Plane is carry'd; also let the Area of the Part, *EmFn*, of the Plane intercepted by, or contained in the Solid be denoted by *A*; Then it follows, from Art. 2 and 5 that the Fluxion of the Solid *AEF*, will be expressed by $A\dot{x}$. From whence, by expounding *A* in Terms of *x*, (according to the Nature of the Figure) and then taking the Fluent, the Content of the Solid (which we shall, always, hereafter represent by s) will be given". [Simpson, 1750, p. 171].
36. "Example I: 50. To draw a Right–line *CT*, to touch a given Circle *BCA*, in a given Point *C*. Let *CS* be perpendicular to the Diameter *AB*, and put *AB* = *a, BS* = *x* and *SC* = *y*: Then, by the Property of the Circle, $y^2\ (CS^2) = BS \times AS (= x \times \overline{a-x}) = ax - x^2$; whereof the Fluxion being taken, in order to determine the Ratio of $\dot{x}$ and $\dot{y}$, we get $2y\dot{y} = a\dot{x} - 2x\dot{x}$; consequently $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2y}{a-2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x}$; multiplied by y, gives $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x} \times y = \frac{y^2}{\frac{1}{2}a-x}$ = Sub-Tangent *ST*. Whence (*O* being supposed the Center) we have $OS\ (\frac{1}{2}a - x) : CS(y) :: CS(y) : ST$; which we also know from other Principles". [Simpson, 1750, p. 54–55].

Fuentes manuscritas

Cerdà, T. (1757–1759) *Tratado de Fluxiones*. RAH, Cortes 9/2792, 9/2812.

Rieger, Ch. (1763–1765) *Introducción fácil al algoritmo de las fluxiones*. RAH, Cortes 9/2792.

Rieger, Ch. (s.f) *In methodum fluxionarum*. RAH, Cortes 9/2806.

Wendlingen, J. (1756–1761) *Elementos de Mathematicas*, Tomo VIII: *Análisis de los infinitos*; Tomo IX: *Cálculo Exponencial, Diferencio–diferencial y Aritmética de los infinitos*. RAH, Cortes 9/2812, 9/3811.

Bibliografía impresa

Ausejo, E. y Medrano, F. J. (2010) “Construyendo la Modernidad: Nuevos datos y enfoques sobre la introducción del cálculo infinitesimal en España (1717–1787) ”. *Llull*, *33(71)*: 25–56.

Berenguer, J. (2016) *La recepció del càlcul diferencial a l'Espanya del segle XVIII. Tomàs Cerdà: introductor de la teoria de fluxions*. [Tesis doctoral en Historia de la Ciencia dirigida por la doctora Mª Rosa Massa Esteve]. Universidad Autónoma de Barcelona. <http://www.tdx.cat/handle/10803/367217> [Consulta: 1–abril–2020].

Cuesta Dutari, N. (1976–1983) *Historia de la Invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca.

Dou, A. (1997) “Matemáticos Españoles Jesuitas de los siglos XVI y XVII”. *Archivum Historicum Societatis Iesu*, *66*: 301–321.

Garma Pons, S. (1978) “Producción matemática y cambios en el sistema productivo en la España de finales del siglo XVIII”. En: M. Gutiérrez Esteve; J. A. Cid Martínez; A. Carreira (coord.) *Homenaje a Julio Caro Baroja*. Madrid, Centro de Investigaciones Sociológicas, 431–437.

Garma Pons, S. (1980) “Los matemáticos españoles y la historia de las Matemáticas del siglo XVII al siglo XIX”. En: S. Garma Pons (ed.) *El científico ante su Historia. La ciencia en España entre 1750–1850*. Madrid, Diputación Provincial de Madrid, 59–72.

Garma Pons, S. (1988) “Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX”. En: J. M. Sánchez Ron (ed.) *Ciencia y sociedad en España*. Madrid, ediciones El Arquero / CSIC, 93–127.

Garma Pons, S. (2002) “La Enseñanza de las Matemáticas”. En: J. L. Peset Reig (dir.) *Historia de la Ciencia y de la Tècnica en la Corona de Castilla*. Salamanca, Junta de Castilla y León, vol. IV, 311–346.

Južnič, S. (2010) “Spanish King's Astronomer Rieger”. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, *11*: 199–219.

L'Hospital, G. de (1696) *L'Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*. A Paris, de l'Imprimirie Royale.

Maclaurin, C. (1742) *The Elements of the Method of Fluxions, demonstrated after the Manner of Ancient Geometricians*. Edimburg.

Navarro Brotóns, V. (2002) “Scientific activity in Spain and the Role of the Jesuits (1680–1767) ”. En: G. P. Brizzi; R. Greci *Gesuiti e Università in Europa (secoli XVI–XVIII)*. Parma, Atti del Convegno di studi. Parma, 421–434.

Navarro Brotóns, V. (2003) “Tradition and Scientific Change in Early Modern Spain: The Role of the Jesuits”. En: M. Feingold (ed.) *Jesuit Science and the Republic of Letters*. Londres, The MIT Press, 331–389.

Navarro Brotóns, V. (2006) “Science and enlightenment in eighteenth–century Spain: The contribution of the jesuits before and after the expulsion”. En: J. W. O'Malley (ed.) *The Jesuits II: cultures, sciences, and the arts, 1540–1773*. University of Toronto Press, 390–404.

Navarro Loidi, J. (2008) “Lección de Artillería by Tomás Cerdá and the Revolution of the spanish Artillery during the 18th Century”. En: H. Junger, F. Seebacher y G. Holaer (ed.) *Third ICESHS, Austrian Academy of Sciences*. Vienna, 879–890.

Navarro Loidi, J. (2013) “La incorporación del cálculo diferencial e integral al Colegio de Artillería de Segovia”. *Llull*, *36(78)*: 333–358.

Newton, I. (1687) *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, translated into English by Andrew Motte, New York, 1846. [Título original: *Philosophiae naturalis Principia Mathematica*. Imprimatur S. Pepys, Reg. Soc. Praeses. Londini].

Rieger, Ch. (1756) *Universae Architecturae Civilis Elementa.* Vindobonae, Typis Ioannis Thomas Trattner.

Rieger, Ch. (1758) *Universae Architecturae Militaris*. Vindobonae, Typis Ioannis Thomas Trattner.

Rieger, Ch. (1761) *Observacion del Transito de Venus por el disco del Sol, en el día 6. De Junio de este año de 1761. Hecha en el observatorio del Colegio Imperial de la Compañía de Jesús de Madrid*. Madrid, Santa Cruzada.

Rieger, Ch. (1763a) *Elementos de toda la architectura civil, con las mas singulares observaciones de los modernos, impressos en latín por el P. Christiano Rieger; traducidos al castellano por el P. Miguel Benavente*. Madrid, Joachim Ibarra.

Rieger, Ch. (1763b) *Observaciones físicas sobre la fuerza eléctrica, grande y fulminante: confirmada y aumentada con nuevos experimentos*. Madrid, Joachim Ibarra.

Simpson, Th. (1750) *The Doctrine and Application of Fluxions*. London, printed by J. Nourse.

Udias, A. (2005) "Los libros y manuscritos de los profesores de matemáticas del colegio imperial de Madrid, 1627–1767". *Archivum Historicum Societatis Iesu*, *74(148)*: 369–448.

Udias, A. (2010) "Profesores de matemáticas en los colegios de la Compañia de España, 1620–1767" in *Archivum Historicum Societatis Iesu*, *74(157)*: 3–27.

Wolff, Ch. (1713–1715) *Elementa Matheseos Universae*. Genevae, apud Henricum–Albertum Gosse & socios.