Experiencias Docentes

El uso de las proyecciones en la resolución de problemas de geometría del espacio

The projections in the solving problems of space geometry

Eduardo Miguel Pérez Almarales
Miguel Oscar Almarales Milán
Edel Ernesto Pérez Almarales
Inés María Lago Guerrero

Revista de Investigación

Volumen X, Número 2, pp. 065–085, ISSN 2174-0410
Recepción: 3 Mar'20; Aceptación: 25 Abr'20

1 de octubre de 2020

Resumen

Muchas veces en la práctica educativa los estudiantes cubanos presentan dificultades en la resolución de problemas de Geometría del Espacio. En ocasiones esto se debe a la limitada imaginación espacial que poseen, sin embargo, la inmensa mayoría de los problemas que se presentan en la Educación Preuniversitaria se facilitan si se proyecta la figura sobre los planos horizontal y vertical. En el presente artículo se pretende mostrar un procedimiento para resolver problemas de cálculo de cuerpos utilizando sus proyecciones, lo cual permite, además, que los estudiantes profundicen en elementos básicos de Geometría Plana.

Palabras Clave: Problema, Cálculo de cuerpos, Proyecciones

Abstract

Many times in the educational practice the Cuban student present difficulties in the resolution of problems of Space Geometry. Sometimes this is due to the limited spatial imagination that they have, however, the immense majority of the problems that occur in Pre-university Education are facilitated if the figure is projected on the horizontal and vertical planes. In this article we try to show a procedure to solve problems of calculation of bodies using their projections, which also allows students to delve into basic elements of Plane Geometry.

Keywords: Problems, Spatial calculation, Projections

1. Introducción

Los estudiantes, como individuos de la sociedad, se desarrollan en un entorno cargado de figuras geométricas, tanto planas como espaciales. Es por ello que resulta de suma importancia realizar en la escuela un adecuado trabajo con la geometría y los vínculos concretos de todas sus ramas. Los conocimientos geométricos básicos que adquiere el estudiante le permitirán orientarse adecuadamente en su contexto.

Según Rojas (2009):

> *para representar cuerpos geométricos en el plano se utilizan las proyecciones en perspectiva paralela y caballera, así como representaciones isométrica, ortogonal y ortogonal codificada. En la escuela se utiliza con mayor frecuencia la perspectiva caballera. La representación de un cuerpo geométrico en el plano, así como su construcción en el espacio son dificultades que presentan los alumnos, debidas fundamentalmente a la deformación de los ángulos, lados y figuras, respecto al plano de la base, al representar dicho cuerpo en perspectiva caballera.*

En el presente artículo se considera que es conveniente que los estudiantes aprendan a utilizar las proyecciones horizontal y vertical en función de resolver los problemas que se le presentan de cálculo de cuerpos geométricos.

Por otra parte, la Geometría está íntimamente relacionada con la resolución de problemas que en la práctica cotidiana se presentan, como es el caso de medir cierta longitud, diseñar un jardín, determinar el volumen de un cuerpo, construir una superficie con determinado ángulo de inclinación y calcular el área de una superficie determinada.

La geometría le ofrece la posibilidad al estudiante de desarrollar su imaginación espacial, del mismo modo en la práctica cotidiana se necesita en muchas ocasiones determinar representaciones bidimensionales de objetos espaciales, para entender la composición real de las figuras geométricas en el espacio. Del mismo modo permite formar estrategias de resolución de problemas y desarrollar habilidades básicas como: medir, observar y comparar.

El trabajo de resolución de problemas mediante proyecciones en planos horizontales y verticales les permitirá a los estudiantes que opten por carreras de ingeniería familiarizarse con situaciones a las que se enfrentarán durante el desarrollo de su práctica laboral. Además en muchas carreras universitarias como las ingenierías, arquitectura y diseño se recibe Geometría Proyectiva, cuyos elementos básicos se trabajan en el procedimiento de resolución de problemas de geometría del espacio que se presenta en la esta investigación.

En la matemática escolar generalmente no se dedica tiempo para proyectar las figuras geométricas en los planos horizontal y vertical, mientras que el tiempo dedicado a la representación en perspectiva caballera es muy limitado, por ello los estudiantes generalmente presentan mayores dificultades en este tipo de problemas.

2. Desarrollo

Según Ballester y otros (1992):

> *la imaginación geométrica espacial [...] es una representación ideal en la mente del hombre de cuerpos y relaciones geométricas en el espacio, tiene un sentido relativo con respecto a la situación objeto de estudio; no obstante, estas situaciones pueden ser muy variadas y se pueden crear muchas de ellas transformando y complicando las circunstancias.*

Con la utilización de las proyecciones vertical y horizontal de los cuerpos geométricos es posible también contribuir al desarrollo de la imaginación en los estudiantes pues deben comprender las figuras que realmente tienen a partir de la representación en perspectiva caballera que es como se le dan las figuras en los problemas que tiene que resolver.

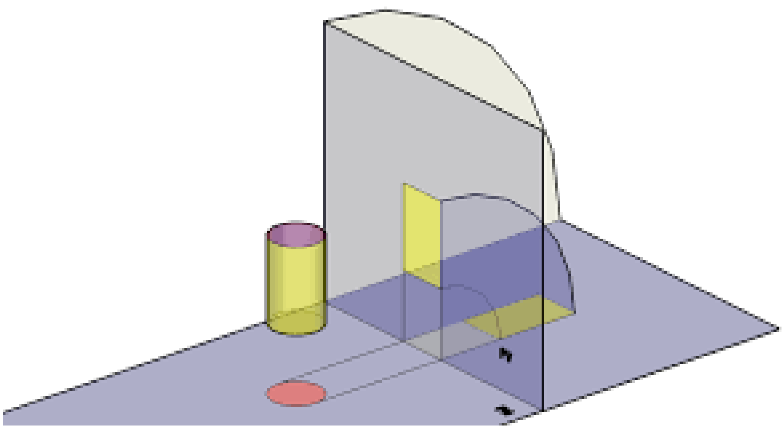
Para representar un cuerpo del espacio al plano existen varios tipos de proyección, en el presente procedimiento se utilizará la proyección ortogonal, en la cual las líneas visuales son perpendiculares al plano donde se plasmará la vista que se quiera formar y ellas son paralelas entre sí. En el procedimiento que se presenta se utilizan las proyecciones horizontales y verticales.

El presente artículo tiene como objetivo mostrar un procedimiento para resolver problemas de cálculo de cuerpos utilizando sus proyecciones ortogonales sobre planos horizontales o verticales. Con esto pueden aumentar su imaginación espacial, pues tienen que percatarse de qué se obtiene cuando la figura se proyecta en algún plano y además pueden usar en su solución elementos de Geometría plana que conocen con anterioridad.

Si proyectamos un cilindro circular recto sobre un plano vertical obtenemos un rectángulo cuyos lados son el diámetro de la base del cilindro y su altura, mientras que en el plano horizontal obtenemos un círculo. Si se proyecta bajo las mismas condiciones a un Prisma Recto, cualquiera sea el tipo de base se proyectaría verticalmente como un rectángulo, mientras que la proyección horizontal sería un polígono idénticamente igual al de la base del prisma. De la misma manera en el caso del cono circular rectos su proyección vertical será un triángulo isósceles cuya longitud de la base es el diámetro de la circunferencia base y su altura coincidente también con la altura del cono, mientras que la proyección horizontal es un círculo igual al de la base del cono. Por su parte de manera análoga en la pirámide recta en el plano vertical se proyecta como un triángulo isósceles y en el horizontal un polígono igual a su base y en el caso de la esfera se proyecta como un círculo en los dos planos. En el caso de que la base sea eliptica la proyección en el plano vertical es entonces una elipse igual a la de la base.

Por su parte, un cilindro circular oblicuo se proyecta sobre un plano vertical como un paralelogramo, donde uno de sus lados es el diámetro de la base del cilindro y el otro la arista lateral. Si se proyecta bajo las mismas condiciones a un Prisma oblicuo, cualquiera sea el tipo de base se proyectaría verticalmente como un paralelogramo. De la misma manera en el caso del cono circular oblicuo su proyección vertical será un triángulo no isósceles, siempre que la longitud de las dos aristas laterales sean diferentes de diámetro de la base. Por su parte de manera análoga en la pirámide oblicua en el plano vertical se proyecta como un triángulo no isósceles, al igual que en el cono siempre que las dos aristas laterales en la proyección sean diferentes de la proyección de la base. En este caso la proyección sobre el plano base hay que analizarla casuísticamente.

Como muestra aparece a continuación las proyecciones de un cilindro circular recto.



Note que si los cuerpos son oblicuos las proyecciones del cilindro y el prisma serían paralelogramos, mientras que las del cono y la pirámide serían triángulos que no son isósceles con respecto a las aristas laterales.

Veamos algunos elementos teóricos necesarios:

Según la Enciclopedia de todas las palabras matemáticas:

El principio de Cavalieri indica que si las áreas de las secciones representativas de dos sólidos son iguales, y la altura de los dos sólidos es igual, después los volúmenes de los dos sólidos son iguales.

Es por ello que:

- $V_{prisma\ recto} = V_{prisma\ oblicuo} = A_{base} \cdot h$
  Si los dos cuerpos tienen igual base e igual altura
- $V_{cilindro\ recto} = V_{cilindro\ oblicuo} = \pi \cdot r^2 \cdot h$
  Si los dos cuerpos tienen igual base e igual altura
- $V_{pirmide\ recta} = V_{pirmide\ oblicua} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$
  Si los dos cuerpos tienen igual base e igual altura
- $V_{cono\ recto} = V_{cono\ oblicuo} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
  Si los dos cuerpos tienen igual base e igual altura

El voumen del prisma oblicuo también se puede determinar como:

$$V = area\ de\ la\ seccin\ recta \cdot arista\ lateral = A_{SR} \cdot a$$

Según Universo Formulas:

El área del prisma oblicuo se calcula de manera diferente a la del prisma recto. Las áreas de las bases se calculan de la misma forma, pero el área de los laterales se calcula mediante una arista lateral y el perímetro de la sección recta del prisma. La sección recta es la intersección de un plano con el prisma, de manera que forme un ángulo de $90°$ *con cada una de las las aristas laterales.*

Entonces el área del prisma recto sería:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{lateral} = Permetro\ de\ la\ base \cdot altura = P_B \cdot h$$

La principal diferencia entre el cálculo de área de un prisma oblícuo y uno recto es el cálculo de su área lateral, que en el primero sería:

$$A_{lateral} = Permetro\ de\ la\ regin\ recta \cdot arista\ lateral = P_{SR} \cdot a$$

Según Universo Formulas:

***Cilindro oblicuo de base elíptica**: El ángulo entre el eje y las bases no es un ángulo recto. La superficie lateral es una superficie cilíndrica de revolución, la sección recta (perpendicular) al eje es un círculo y las bases son elipses.*
***Cilindro oblicuo de base circular**: El ángulo entre el eje y las bases no es un ángulo recto. La sección recta (perpendicular) al eje es una elipse y las bases son círculos. En este caso, la superficie lateral es una superficie reglada que se denomina superficie cilíndrica de no revolución en la que no existe un eje que equidiste de las posiciones de la generatriz.*

El área lateral de un cilindro circular recto se calcula como:

$$A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$$

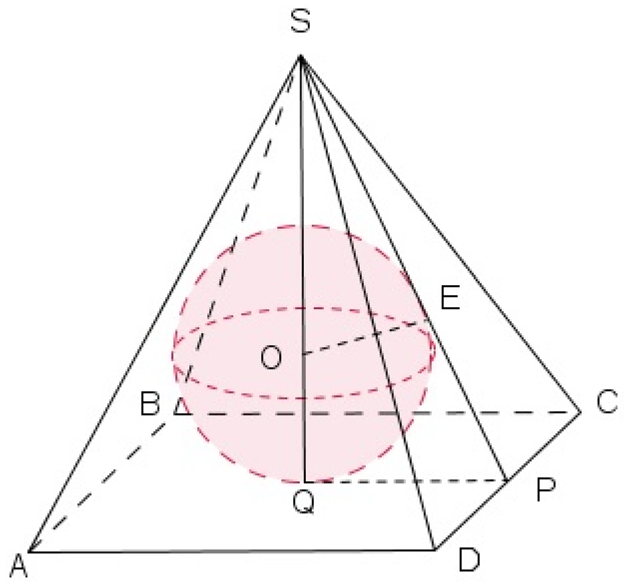
Por su parte si el cilindro es eliptico oblicuo, se calcula como:

$$A_L = 2\pi \cdot r \cdot g$$

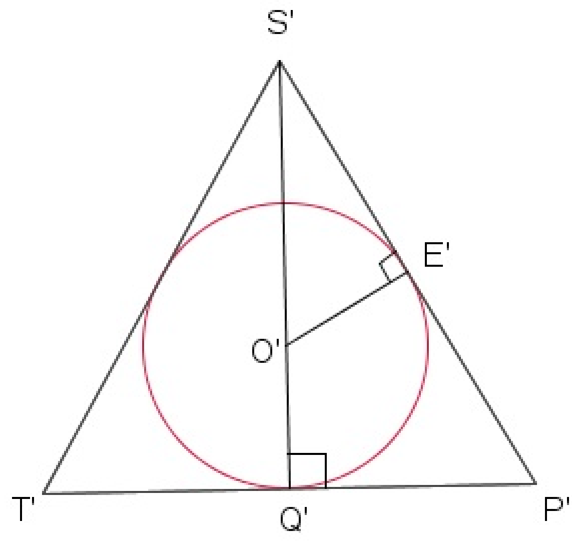
donde r es el radio de la región recta y g es la generatriz

Veamos ahora algunos ejemplos de cómo utilizar estas proyecciones: Empezaremos por este problema porque fue el que nos motivó a utilizar el método de proyecciones.

1. Sea SABCD un pirámide de base cuadrada, la altura de la cara lateral SDC forma con su proyección sobre el plano horizontal y el $\angle SPQ = 60°$. En la pirámide está inscrita una esfera de centro O y volumen $\frac{32\pi}{3}$ cm^3. Se traza perpendicular a la cara SDC de tal manera que el punto E pertenece a la altura de esta cara. La altura de la pirámide forma con el $\angle SOE = 60°$. Halle el volumen de la pirámide. (Prueba de Ingreso a la Educación Superior en Cuba. Curso 1996 – 1997 (Segunda convocatoria))



Solución: En este caso nos percatamos que como las caras laterales son triángulos isósceles, P es el punto medio de CD por ser SP altura de la cara, además Q es el centro del cuadrado y el $\angle SOE = 60°$, es por ello que al proyectar la figura sobre un plano vertical, o lo que es lo mismo al cortar la figura por un plano que pase por S, P, Q se obtiene un triángulo equilátero con una circunferencia inscrita, como se muestra en la figura:



Lo que quiero es calcular el volumen de la pirámide, para ello como tengo el volumen de la esfera puedo determinar el radio, en este caso sería $r = 2\ cm$, luego por la relación entre el radio de la circunferencia inscrita y la altura del triángulo tenemos que $h = 3r = 6\ cm$, que sería la altura de la pirámide, de la misma forma el lado del triángulo sería el lado del cuadrado base y por ello por la fórmula para la altura de un triángulo equilátero $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$, entonces el lado es $l = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{3}}$, esto podemos racionalizarlo, pero como lo que necesitamos es el área del cuadrado que es el cuadrado del lado, entonces:

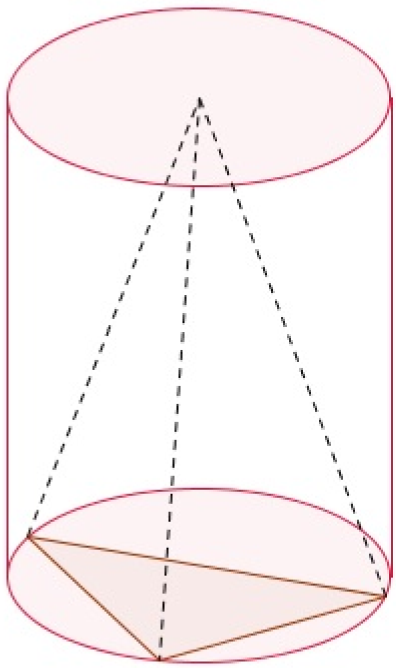
$$A = l^2 = \frac{4 \cdot h^2}{3} = \frac{4 \cdot 36}{3} = 48\ cm^2$$

Por lo tanto el volumen de la pirámide se calcula como:

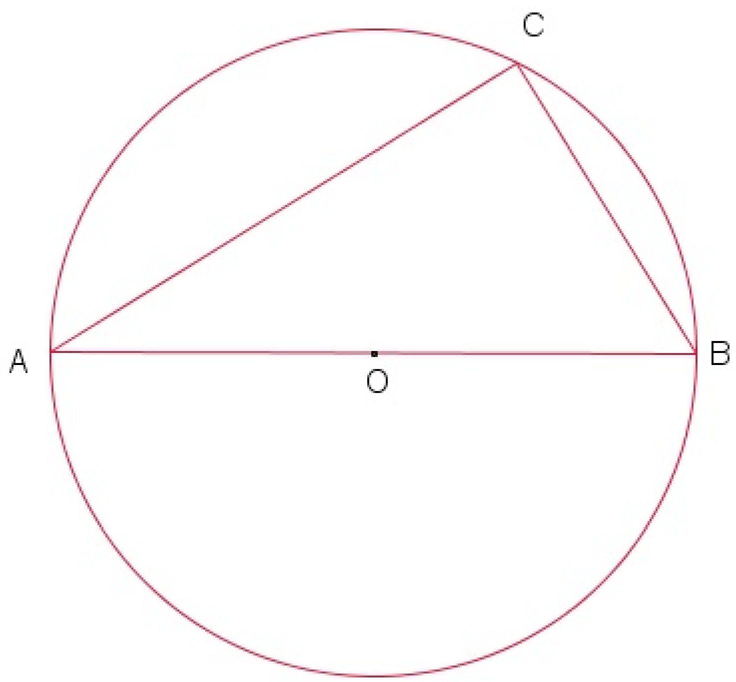
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 6 = 96\ cm^3$$

Nota: Como puede apreciarse hay algunos datos que no son necesarios usando esta vía.

2. En el interior de un cilindro circular recto se encuentra una pirámide cuya base está inscrita en la base del cilindro, como se muestra en la figura. La base de la pirámide es un triángulo rectángulo de catetos $8,0\ cm$ y $6,0\ cm$. Si el volumen de la pirámide es igual a $80\ cm^3$ y su altura es igual a la del cilindro, halla el volumen del cilindro. (Prueba de Ingreso a la Educación Superior en Cuba. Curso 1991 – 1992 (Primera Convocatoria)).



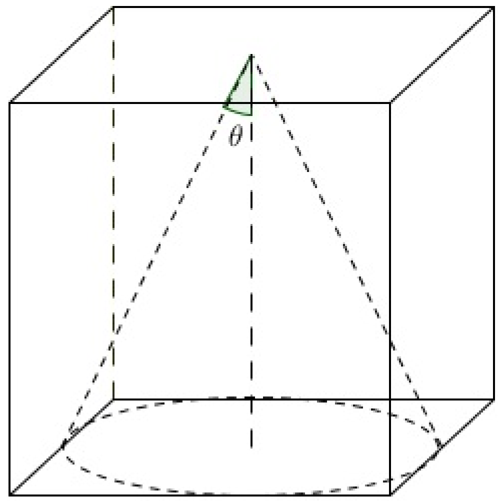
Solución: En este ejercicio conocemos la altura del cilindro, por ser la misma que la de la pirámide, por ello es necesario determinar la altura de la pirámide dado su volumen, puesto que su área de la base es 24 cm^2, entonces la altura sería 10 cm. Ahora sólo resta buscar el área de la base del cilindro, para ello proyectemos la figura sobre la base:



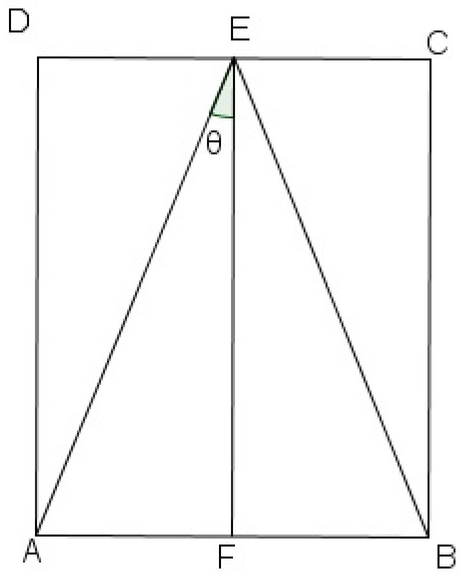
En este caso usando directamente el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo en C, ABC, por estar el ángulo ACB inscrito en la semicircunferencia. De aquí podemos determinar que $AB = 10\ cm.$, y por ende el radio de la base es $5,0\ cm.$, por ello el volumen del cilindro se calcula como:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot 10 = 250\pi\ cm^3$$

3. En la figura se tiene un prisma recto de base cuadrada en el cual se ha inscrito un cono. El área total del prisma es $112\ dm^2$ y el ángulo que forma la generatriz del cono con la altura es $\theta = 21,8°$. Calcule el volumen del cono.



Solución: Proyectemos sobre un plano vertical paralelo a la cara que está de frente. Entonces:



Sea $\theta = \angle AEF$, podemos ver AF es el radio de la base del cono y EF es la altura del cono y el prisma, usando razones trigonométricas tenemos que:

$$\tan\theta = \frac{AF}{EF}$$

Entonces

$$\tan 21,8^\circ = \frac{AF}{EF}$$

$$0,4 = \frac{AF}{EF}$$

Por tanto:

$$AF = \frac{2}{5}\cdot EF$$

$$AB = 2\cdot AF$$

Entonces el perímetro de la base es $8AF$ y la altura EF, luego el área lateral es $8AF\cdot EF$, y el área de la base es:

$$(2AF)^2 = 4AF^2$$

Por lo tanto el área total se calcula como:

$$8AF(AF+EF) = 8AF\left(AF+\frac{5}{2}AF\right) = 8AF\left(\frac{7}{2}AF\right) = 28\cdot AF^2$$

Entonces:

$$28\cdot AF^2 = 112$$

$$AF^2 = 4$$

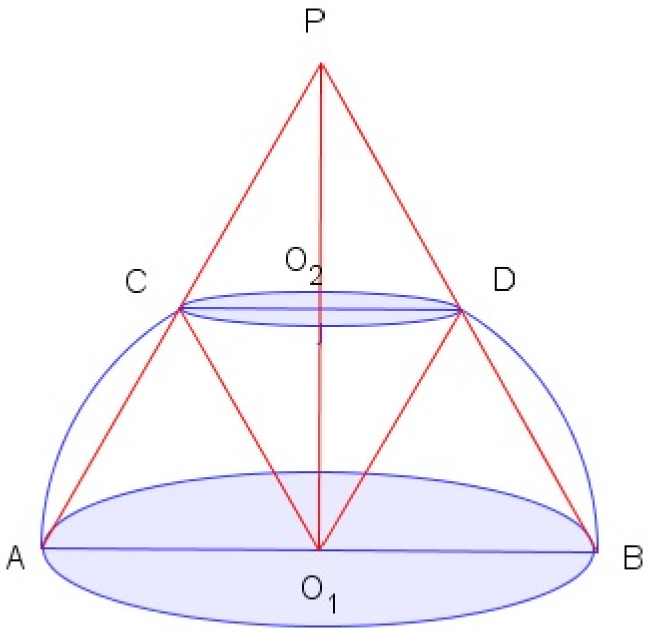
$$AF = 2\ dm$$

Por tanto el radio de la base del cono es 2 dm y la altura del mismo es 5 dm, entonces el volumen del cono se puede calcular como:

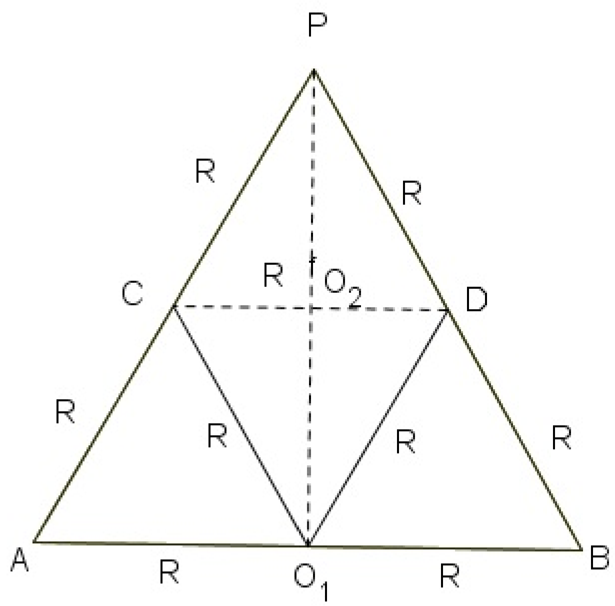
$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot 4\ dm^2\cdot 5\ dm = \frac{20}{3}\pi dm^3$$

4. Se tiene una semiesfera de diámetro $\overline{AB}$ y centro O_1. Se corta un casquete superior de la semiesfera por un plano paralelo a la base. El plano determina, sobre la semiesfera, un círculo de centro O_2 y diámetro $\overline{CD}$. Tomando como base el círculo de centro en O_2, se construyen dos conos: uno de vértice en O_1 y el otro de vértice $P = AC\cap BD$. El círculo que tiene centro en O_1 y diámetro $\overline{AB}$ tiene un área de $100\pi\ m^2$ y se conoce, además, que $\angle O_2O_1D = 30^\circ$. Calcula el volumen del cono con vértice en O_1 y la altura $\overline{PO_2}$



Solución: Si proyectamos la figura en un plano vertical tenemos:



Con las condiciones del ejercicio se tiene que el triángulo ABP es equilátero, por ello los triángulos ACO_1, BDO_1, CDP, CDO_1, también son equiláteros, es por ello que todos los segmentos representados en la figura se denotan por R.

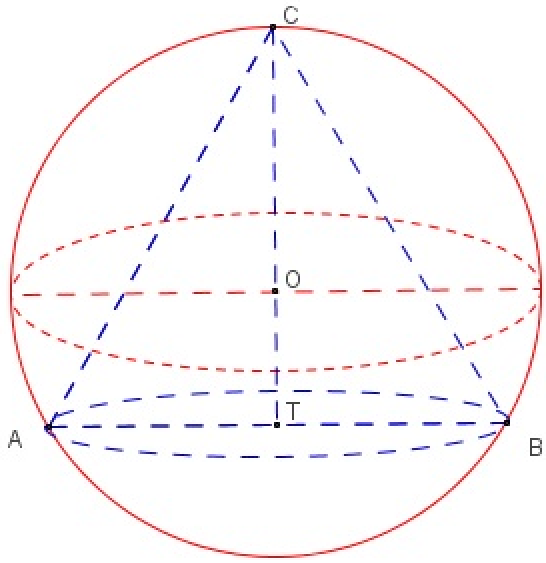
Para buscar el volumen que necesitamos tenemos que su altura es $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R$ y su radio $\frac{R}{2}$, pero como tenemos que $R = 5\ cm$, por ser el área del círculo 314, entonces el volumen es:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

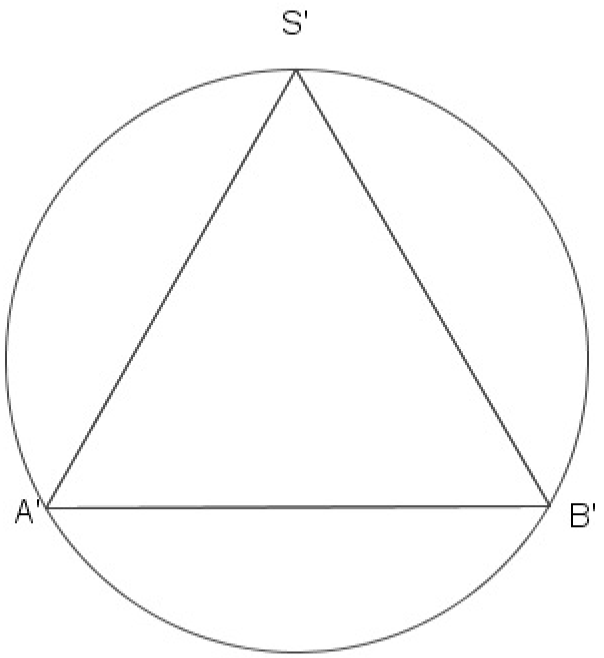
$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{24}\pi cm^3$$

La altura del otro cono coincide con la ya calculada, puesto que son dos triángulos equiláteros iguales.

5. En la figura se muestra una esfera de área $36\pi cm^2$, con un cono circular recto inscrito en ella, del cual se sabe que su altura y su generatriz forman un ángulo de 30°. Demuestra que los valores numéricos del volumen y del área total del cono coinciden.



Solución: Si realizamos una proyección sobre un plano vertical de la figura, se obtiene un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia.



Como $A_{Esfera} = 4\pi r^2$, entonces sustituyendo y despejando tenemos que $r = 3\ cm$. Por la relación existente entre el radio de la circunferencia circunscrita y la altura del triángulo equilátero, tenemos que $r = \frac{2}{3}h$ y por lo tanto $h = \frac{9}{2}\ cm$, por lo que, como $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$, se tiene que $l = 3\sqrt{3}\ cm$, entonces el radio de la base del cono es la mitad del lado, es decir $r_{cono} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\ cm$.

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4} \cdot \pi\ cm^3$$

$$A_L = \pi \cdot r_{cono} \cdot g = \pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{2}\pi\ cm^2$$

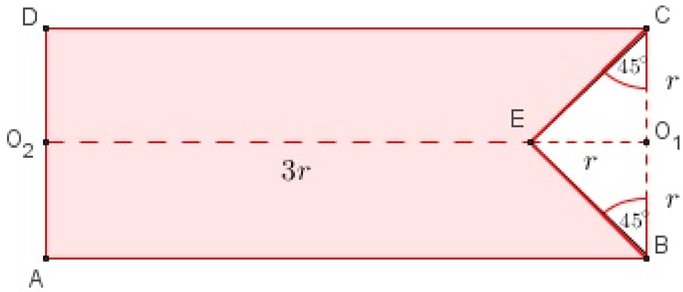
$$A_B = \pi \cdot r_{cono}^2 = \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}\pi\ cm^2$$

$$A_T = A_L + A_B = \frac{27}{2}\pi + \frac{27}{4}\pi = \frac{81}{4}\pi\ cm^2$$

6. El cuerpo que se muestra una pieza metálica formado por un cilindro circular recto, al que se le ha practicado una perforación en forma de cono circular recto, coincidiendo una de las bases en ambos cuerpos. Se conoce que la longitud del radio base es 5 cm, la de la altura del cono es la cuarta parte de la de la altura del cilindro. Se conoce, además, que las aristas laterales del cono forman un ángulo de 45° con el radio de la circunferencia. Se quiere pintar para su protección, ¿qué superficie total se necesita pintar?

Solución:

Proyectemos sobre un plano horizontal la figura, con lo cual se obtiene:



Necesitamos buscar el área total de la pieza, que se calcula como:

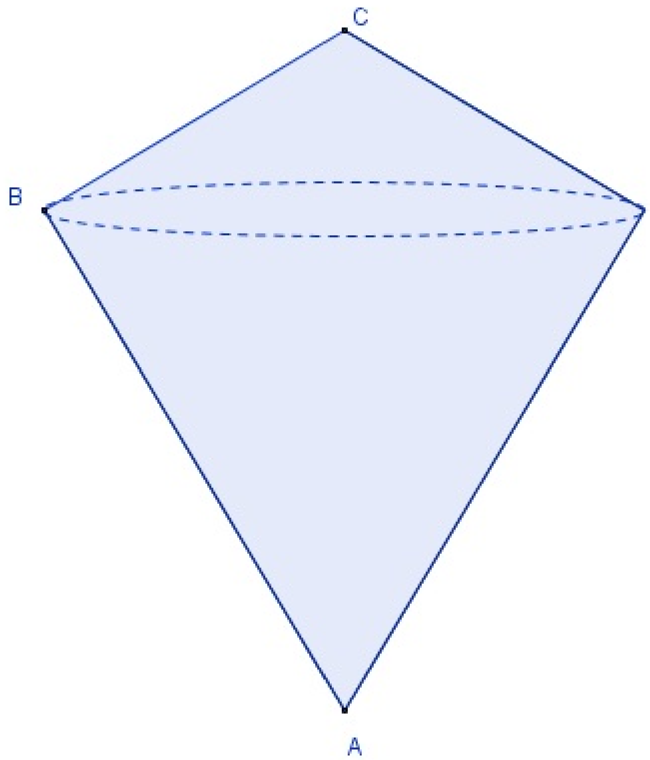
$$A_{total} = A_{lateral\ del\ cilindro} + A_{lateral\ del\ cono} + A_{base}$$

Calculemos los elementos Sabemos que como el ángulo que forman la generatriz del cono con el radio de la base es 45°, entonces la altura del cono coincide con el radio. Además, como la altura del cono es la cuarta parte de la de la altura del cilindro, entonces la altura del cilindro es 4 veces el radio. Entonces la altura del cono es 5 cm y la del cilindro es 20 cm.

$$A_{lateral\ del\ cilindro} = 2\pi \cdot r \cdot h$$
$$A_{lateral\ del\ cilindro} = 2\pi \cdot 5 \cdot 20$$
$$A_{lateral\ del\ cilindro} = 200\pi\ cm^2$$
$$A_{lateral\ del\ cono} = \pi \cdot r \cdot g$$
$$A_{lateral\ del\ cono} = \pi \cdot 5 \cdot 5\sqrt{2}$$
$$A_{lateral\ del\ cono} = 25\pi\sqrt{2}\ cm^2$$
$$A_{base} = \pi \cdot r^2$$
$$A_{base} = 25\pi\ cm^2$$
$$A_{total} = 200\pi + 25\pi\sqrt{2} + 25\pi = 25\pi\left(9 + \sqrt{2}\right)\ cm^2$$

R: Se necesitan pintar $25\pi\left(9 + \sqrt{2}\right)\ cm^2$

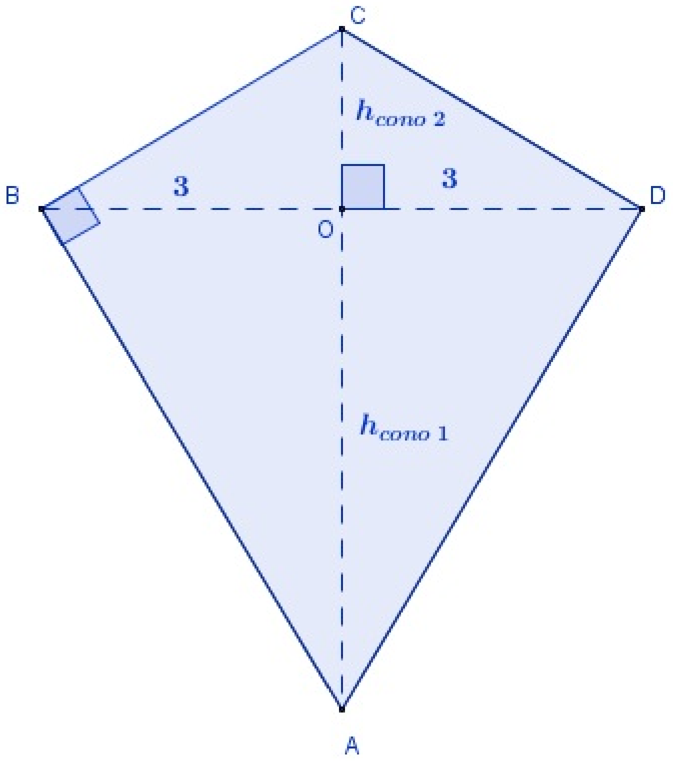
7. La figura muestra un tanque para el almacenamiento de agua formado por dos conos conectados por su base eliptica de 3 m de semieje principal y 4 m de eje secundario. Se conoce, además, que el volumen del cono inferior es $10\pi\ m^3$ y que las generatrices $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares. ¿Cuántos litros de agua pueden almacenar?



(Transformado de ¿Cómo estás en Matemática? Prueba 21)

Solución:

Proyectemos sobre un plano vertical la figura, con lo cual se obtiene:



Necesitamos buscar el volumen total de la pieza, que se calcula como:

$$V_{total} = V_{cono\ 1} + V_{cono\ 2}$$

Como conocemos el volumen del cono 1, solo necesitamos calcular el volumen del cono 2. Para calcular esto sabemos que el volumen se calcula como:

$$V_{cono\ 2} = \frac{1}{3}\left(a \cdot b \cdot \pi \cdot h_{cono\ 2}\right)$$

Siendo a y b los semiejes principal y secundario, respectivamente, de la elipse de centro O

Busquemos primeramente la altura del cono 1:

$$V_{cono\ 1} = \frac{1}{3}\left(a \cdot b \cdot \pi \cdot h_{cono\ 1}\right)$$

$$10\pi = \frac{1}{3}\left(3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot h_{cono\ 1}\right)$$

$$h_{cono\ 1} = 5$$

Por el terorema de las alturas en el triángulo ABC se cumple que:

$$\overline{OB}^2 = \overline{AO} \cdot \overline{CO}$$

$$\overline{CO} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{AO}}$$

$$\overline{CO} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$$

$$V_{cono\ 2} = \frac{1}{3}\left(3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{9}{5}\right)$$

$$V_{cono\ 2} = \frac{18}{5} \cdot \pi\ m^3$$

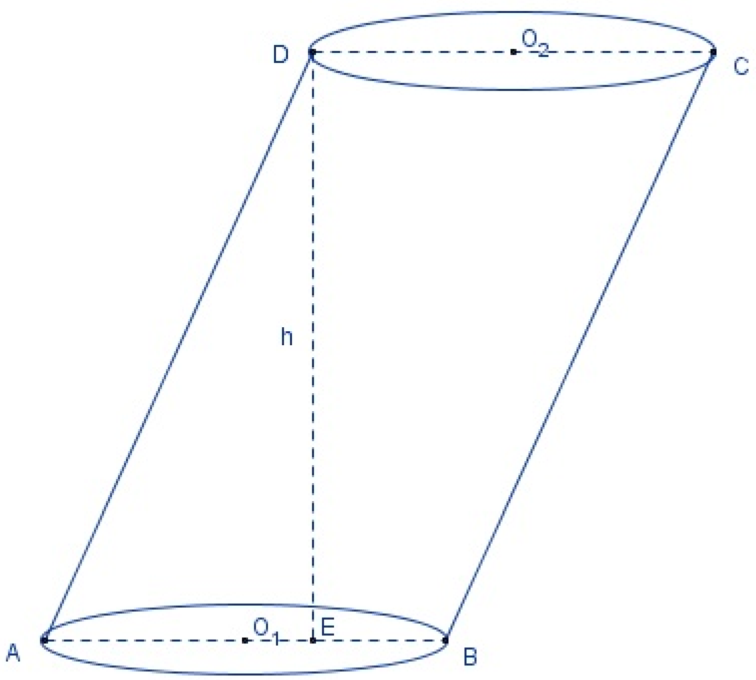
$$V_{total} = 10\pi + \frac{18}{5} \cdot \pi = \frac{68}{5} \cdot \pi$$

Aquí hay que tener presente que nos piden la cantidad de litros y que 1 $litro = 1\ dm^3$, por tanto hay que convertir los metros cúbicos a decímetros cúbicos, que en este caso sería:

$$V_{total} = \frac{68}{5} \cdot \pi\ m^3 = 1000 \cdot \frac{68}{5} \cdot \pi\ dm^3 = 13600\pi\ litros$$

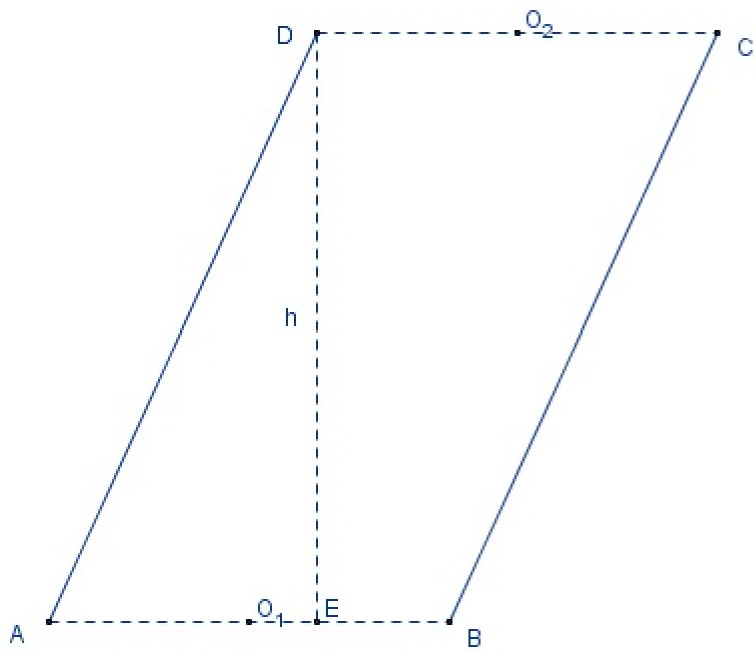
R: Puede almacenar $13600\pi\ litros$

8. En la figura se muestra un cilindro circular oblicuo del cual se conoce que la longitud de la circunferencia base es $10\pi\ cm$, la arista $\overline{AD}$ forma un ángulo de $60°$ con el plano de la base y la proyección ortogonal E del punto D sobre el diámetro $\overline{AB}$ cumple que $\frac{O_1E}{EB} = \frac{1}{3}$. Determina el volumen del cilindro.



Solución:

La proyección de la figura sobre un plano vertical sería:



A partir de la longitud de la circunferencia es sencillo buscar la longitud del radio:

$$L_c = 2\pi \cdot r$$

$$10\pi = 2\pi \cdot r$$

$$r = 5\ cm$$

Por la relación que se da se puede determinar la lonitud de $\overline{AE}$, que en este caso sería:

$$\overline{AE} = \frac{4}{3} \cdot 5 = \frac{20}{3}\ cm$$

Como el triángulo ADE es rectángulo en E, se cumple que:

$$\overline{DE} = \overline{AE} \cdot \tan 60^\circ$$

$$\overline{DE} = \frac{20}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}\ cm$$

Sabemos que por el Principio de Cavalieri el volumen del cilindro circular oblicuo coincide con el del cilindro circular recto, tenemos que:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

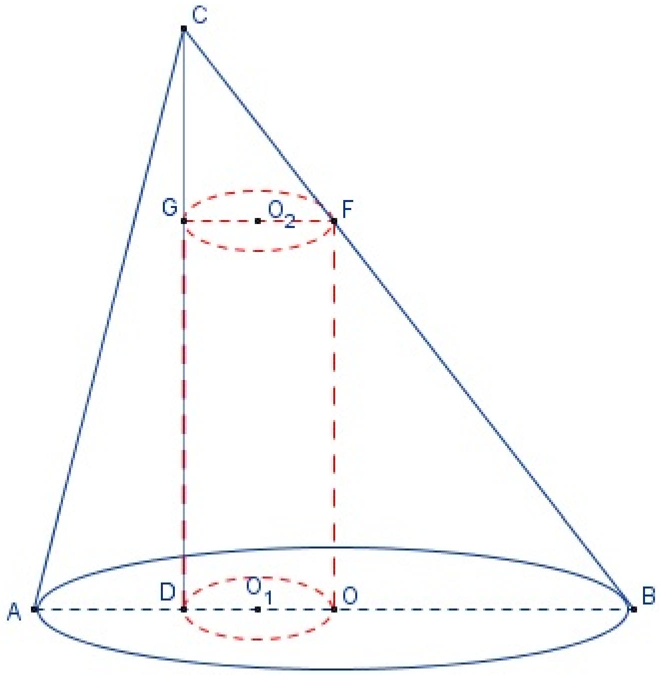
$$V_{cilindro} = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{cilindro} = \frac{500\sqrt{3}\pi}{3}\ cm^3$$

9. En la figura se muestra una pieza en forma de cono circular oblicuo al cuál se le a realizado una perforación en forma de cilindro circular recto. Se sabe que la altura del cono tiene como pie el punto medio del radio $\overline{OA}$, la longitud de la generatriz $\overline{AC}$ es la misma que la del diámetro

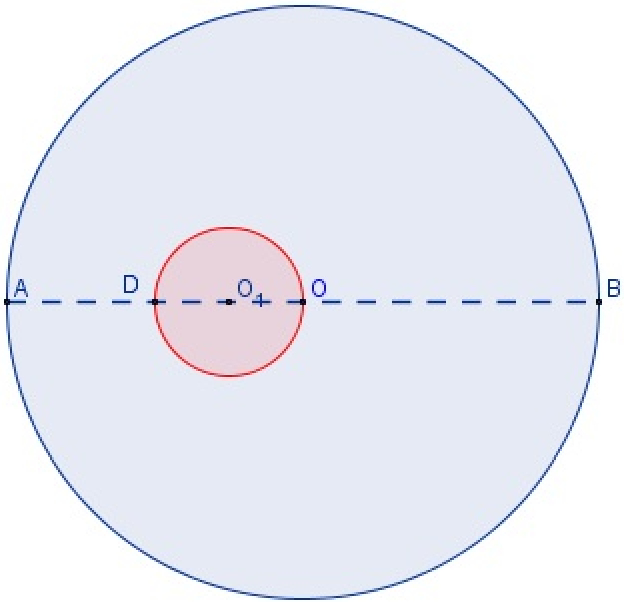
de la base del cono y que la base después de la perforación tiene un área de $15\pi\ cm^2$. Determina el volumen del cuerpo resultante.

a) Si se quiere cubrir con un material anticorrosivo especial el interior de la perforación, ¿qué cantidad de material se necesita?



Solución:

Proyectemos la figura sobre un plano horizontal:



Podemos percatarnos que el área que nos dan es la diferencia de las áreas de los dos círculos que se muestran en la figura anterior, es por ello que con esto podemos calcular los radios de las bases de los dos cuerpos geométricos como sigue:

$$\pi \cdot r^2 - \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 = 15\pi$$

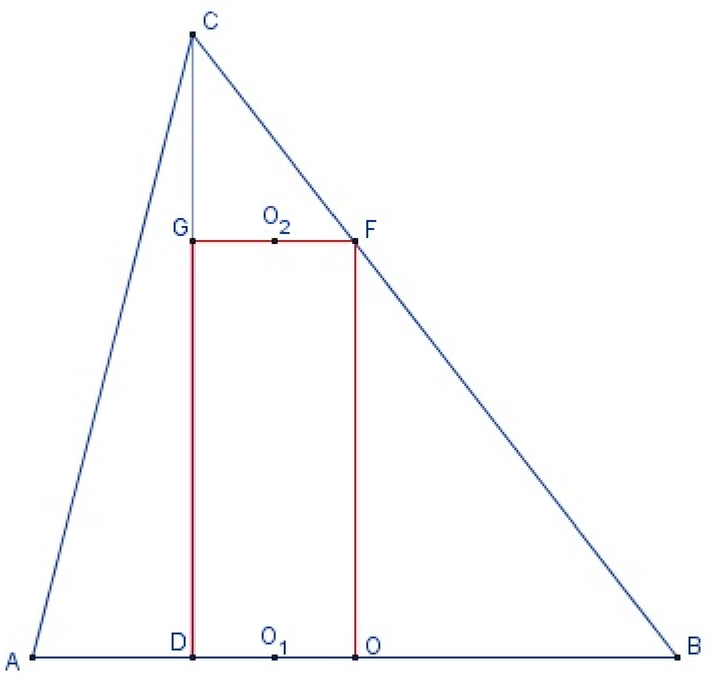
$$r^2 - \frac{r^2}{16} = 15$$

$$\frac{15r^2}{16} = 15$$

$$r^2 = \frac{15 \cdot 16}{15}$$

$$r = 4\ cm$$

Proyectemos la figura ahora sobre un plano vertical:



Ahora necesitamos determinar las alturas de los dos cuerpos geométricos, para ello debemos tener presente que $\overline{AC} = 8$, $\overline{AD} = 2$, entonces por el teorema de Pitágoras en el triángulo ACD:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$$

$$\overline{CD}^2 = 8^2 - 2^2 = 60$$

$$\overline{CD} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

Para determinar la otra altura como $\overline{CD} \parallel \overline{OF}$ podemos aplicar el teorema de las transversales o la proporcionalidad de los triángulos semejantes BCD y BOF para llegar a:

$$\frac{CD}{OF} = \frac{BD}{OB}$$

$$\frac{CD}{OF} = \frac{\frac{3r}{2}}{r} = \frac{3}{2}$$

Entonces podemos calcular la longitud de $\overline{OF}$:

$$\overline{OF} = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{15} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

Calculemos ahora el volumen del cuerpo resultante: $V = V_{cono} - V_{cilindro}$ Por el Principio de Cavalieri el volumen del cono oblicuo es:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} A_B \cdot h_{cono}$$

$$A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi\ cm^2$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{15} = \frac{32}{3}\sqrt{15}\ cm^3$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot (r_{cilindro})^2 \cdot h_{cilindro}$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot \frac{4\sqrt{15}}{3}\ cm^3$$

$$V = \frac{32}{3}\sqrt{15} - \pi \cdot \frac{4\sqrt{15}}{3} = \frac{32 - 4\pi}{3}\sqrt{15}\ cm^3$$

En el inciso a, el área que se quiere se calcula como:

$$A = 2\pi \cdot r_{cilindro} \cdot h_{cilindro} + \pi \cdot (r_{cilindro})^2$$

$$A = 2\pi \cdot \frac{4\sqrt{15}}{3} + \pi = \left(\frac{8\sqrt{15}}{3} + 1\right) \pi\ cm^2$$

R: Se necesitan $\left(\frac{8\sqrt{15}}{3} + 1\right) \pi\ cm^2$ de material.

3. Resultados

La investigación que se presenta fue aplicada experimentalmente a 157 estudiantes de la Educación Secundaria Básica y a 504 de la Educación Preuniversitaria que sirvieron de muestra. Del mismo modo se utilizaron 3 profesores de Secundaria Básica y 8 de Preuniversitaria. El estudio comparativo se desarrolló con el curso escolar anterior y se alcanzaron los siguientes resultados:

	Matrícula	Aprobados 2017-2018	%	Aprobados 2018-2019	%
Secundaria Básica	157	59	37,58	143	91,08
Preuniversitaria	504	187	37,10	452	93,65
total	661	246	37,22	615	93,04

En visita a las actividades desarrolladas se pudo comprobar que la visión espacial de los estudiantes fue mejorando y con ello los resultados se fueron incrementando paulatinamente. Hay que destacar que de los contenidos evaluados en exámenes, este era el que más dificultades presentaba en estas escuelas.

En entrevista individual con los 11 profesores participantes se pudo comprobar que estaban muy complacidos con la aplicación del método, pues le facilitaba su trabajo y la motivación de sus estudiantes por desarrollar las actividades propuestas.

A pesar del trabajo experimental haberlo realizado en estas dos escuelas, esta experiencia fue aplicada en todas las escuelas de la provincia con resultados satisfactorios.

4. Conclusiones

Con la utilización del método propuesto se logró que los estudiantes de las Enseñanzas Secundaria y Preuniversitaria en Granma lograran mejores resultados en el cálculo de área y volumen de cuerpos geométricos y alcanzaran una mayor imaginación espacial al poder representar en sus situaciones reales cuerpos a partir de su representación en perspectiva caballera. Se evidenció que es un método aplicable que en muchas ocasiones facilita el trabajo de los estudiantes.

Referencias

[1] BALLESTER PEDROSO, S. et al, *Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo II*, Pueblo y educación, La Habana, Cuba, 1992

[2] ENCICLOPEDIA DE TODAS LAS PALABRAS MATEMÁTICAS, *Principio de Cavalieri*, http://www.allmathwords.org/es/c/cavalierisprinciple.html

[3] HERNÁNDEZ ÁVALOS, J. *¿Cómo estás en Matemática?*, Pueblo y educación, La Habana, Cuba, 2004

[4] ROJAS VELÁZQUEZ, O., *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador*, Repositorio de tesis Universidad de Holguín, Cuba, 2009

[5] UNIVERSO FORMULAS, *Área del Prisma*, https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/prisma/

Sobre el/los autor/es:
Nombre: Eduardo Miguel Pérez Almarales
Correo electrónico: empalmarales@gmail.com
Institución: Universidad de Granma, Cuba; Centro Provincial de Entrenamiento para Olimpiadas en Granma.

Nombre: Miguel Oscar Almarales Milán
Correo electrónico: malmaralesmilan@gmail.com
Institución: Universidad de Granma, Cuba.

Nombre: Edel Ernesto Pérez Almarales
Correo electrónico: edelpa@ipvce.gr.rimed.cu
Institución: Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas Silberto Álvarez Aroche, Granma, Cuba.

Nombre: Inés María Lago Guerrero
Correo electrónico: imlagoguerrero@gmail.com
Institución: Secundaria Básica Urbana Manuel Hernández Osorio, Granma, Cuba.