

## Heuristic Study of the Restricted Three Body Problem

Estudio Heurístico del Problema Restringido de Tres Cuerpos

Yovani Villanueva<sup>1,a</sup>, Luz Miriam Echeverry<sup>1,b</sup>

**Resumen.** Este artículo presenta una aproximación a uno de los problemas por resolver mas importantes que se ha formulado para este siglo. Se consideró el problema de tres cuerpos restringido y se hallaron órbitas periódicas alrededor de los puntos de equilibrio estable entre distintos planetas, donde una nave espacial necesitaría poca energía para moverse. Se implementaron algunas técnicas muy eficientes para la optimización de funciones multivariadas y la integración de ecuaciones diferenciales. Se obtuvieron muy buenos resultados y se muestra que con los métodos usados se reduce el tiempo de cómputo considerablemente.

**Palabras claves:** Enjambre de partículas, integrador, método de Runge Kutta y el problema de tres cuerpos restringido..

**Abstract.** This article presents an approach to one of the most important unresolved problems that has been formulated for this century. The restricted three body problem was considered and periodic orbits were found around the points of stable equilibrium between different planets, where a spacecraft would need little energy to move. Some very efficient techniques were implemented for the optimization of multivariate functions and the integration of differential equations. Very good results were obtained and it is shown that the used methods reduce the computing time considerably.

**Keywords:** Particle swarm, integrator, Runge Kutta method and the restricted three body problem..

Mathematics Subject Classification: .

Recibido: octubre de 2017

Aceptado: agosto de 2020

### Aspectos relevantes

- El método de optimización de partículas fue probado para minimizar funciones vectoriales, con y sin restricciones y sin usar derivadas.

<sup>1</sup>Escuela de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia

<sup>a</sup>yovaniing@gmail.com

<sup>b</sup>lechever@uniandes.edu.co

- Comparamos el integrador de A. Jorba respecto al Runge Kutta 7-8 para resolver las ecuaciones diferenciales que modelan el problema restringido de tres cuerpos, mostrando en estos ejemplos que el primero es mucho más rápido con la misma precisión.
- Usamos el PSO para minimizar el funcional resultante, para encontrar órbitas de una nave pequeña en el problema restringido de tres cuerpos.

## 1. Introducción

A comienzos del siglo XX, matemáticos notables a la cabeza de D. Hilbert formularon una lista de 23 problemas que guiaron la investigación en matemática durante todo el siglo. Varios de ellos se resolvieron, pero quedaron otros que aún despiertan muchas intrigas. En 1998 los matemáticos S. Smale y V. Arnold publicaron una nueva lista para este siglo [11], algunos de ellos con un premio de un millón de dólares para la persona que los pueda demostrar.

Uno de estos famosos problemas consiste en demostrar la finitud de equilibrios relativos en el problema de los  $n$ -cuerpos en mecánica celeste. El problema de los  $n$  cuerpos se basa en encontrar las soluciones de las ecuaciones que describen el movimiento (en función de las posiciones  $x_i \in \mathbb{R}^2$ ) de  $n$  partículas de masas  $m_i$ , estas ecuaciones son

$$\ddot{x}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{m_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^3}, \quad n \geq 3. \quad (1)$$

Los equilibrios relativos son soluciones de estas ecuaciones que están inducidas por una rotación en el plano [11, pág 8]. Esto quiere decir que  $\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| = cte$  para  $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$  y el movimiento se da en un plano. Los casos más estudiados han sido para  $n = 3$  (Donde un tercer cuerpo de masa despreciable tiene 5 lugares para mantener su posición relativa a los otros dos.),  $n = 4$  (tiene entre 32 y 8472, como es explicado por M. Hampton en [4]) y en 2012 A. Albouy y V. Kaloshin demostraron la finitud para  $n = 5$  en su artículo [1]. Esto también ha sido abordado más recientemente por el experto en sistemas dinámicos J. Llibre en [10], sin embargo sigue siendo un problema abierto para  $n \geq 6$ .

Si se consideran tres cuerpos, uno de ellos con masa muchísimo menor a las de los otros dos, surgen los conocidos 5 puntos de Lagrange donde este cuerpo de masa pequeña puede mantenerse a una distancia constante en relación a los otros dos. Hay 2 estables (L4 y L5) y 3 inestables (L1, L2 y L3). Durante mucho tiempo se pensó que los puntos inestables no serían útiles debido a que cualquier perturbación altera la posición del cuerpo, pero se pueden usar para poner satélites en órbitas alrededor de estos puntos sin que necesiten mucha energía y su posición les da gran importancia estratégica.

En base a esto se presentan los siguientes algoritmos para encontrar estas órbitas rápidamente y con gran precisión. Sin embargo, existen muchos problemas que requieren encontrar un solo punto en un campo muy grande y otros que necesitan muchas operaciones e iteraciones para converger. Estos son usualmente llamados NP o no resolubles en tiempo polinomial (se incrementa exponencialmente). Mientras no se puedan fabricar computadores cuánticos muchos de ellos no se podrán resolver (como el RSA que hace la encriptación de muchas cuentas de usuario), pero otros se pueden aproximar usando algoritmos evolutivos y con auto-aprendizaje como el que se presenta a continuación.

## 2. Método de Optimización Enjambre de Partículas

Para ilustrar esta técnica se toma el siguiente ejemplo. Suponga que una persona quiere comprar un computador pero no está seguro donde comprarlo. Esta persona ha comprado algunos antes y sabe que en ciertos lugares conseguiría un buen computador a buen precio. Sin embargo, se reúne con sus amigos y les pregunta sobre las experiencias han tenido sobre esto. Va recopilando información personal y de sus conocidos y en base a lo anterior toma la mejor decisión. En [3] [5] y [8] puede ser encontrada la siguiente descripción de este método.

Sea  $J : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  la función que se desea optimizar, entonces:

- Se eligen aleatoriamente las partículas  $\vec{x}_0^k = (x_{1_0}^k, \dots, x_{m_0}^k) \in D$  y sus velocidades iniciales  $\vec{v}_0^k = (v_{1_0}^k, \dots, v_{m_0}^k) \in [0, 1]^m$ ,  $k \in I$ .

Luego, para cada iteración  $j$ :

1. Se encuentra el mínimo de  $\{J(\vec{x}_i^k)\}_{i \leq j}$  y se asigna  $\vec{p}_j^k = \vec{x}_{i_{min}}^k$  para cada  $k \in I$ , luego se busca el mínimo de  $\{J(\vec{x}_m^k)\}_{m \leq j, k \in I}$  y entonces  $\vec{g}_j = \vec{x}_{m_{min}}^k$ .
2. Se actualiza el vector velocidad.

$$v_{i_{j+1}}^k = c_1 r_1 v_{i_j}^k + c_2 r_2 [p_{i_j}^k - x_{i_j}^k] + c_3 r_3 [g_{i_j}^k - x_{i_j}^k]$$

donde  $c_1, c_2, c_3 \in (0, 2]$  son parámetros de ajuste y  $r_1, r_2, r_3 \in [0, 1]$  son números aleatorios.

3. Se mueven las partículas a su nueva posición.

$$x_{i_{j+1}}^k = x_{i_j}^k + v_{i_{j+1}}^k$$

El PSO (Particle Swarm Optimization) fue usado previamente para encontrar los mínimos de varias funciones vectoriales, algunas de ellas con restricciones. Primero fueron encontrados los mínimos locales y globales de ciertas funciones clásicas encontradas en [5] y [8], para cada ejemplo se usaron 50

partículas y se dejó correr hasta que  $|v_i|_{i \in I} < tol$ , esta diferencia entre el valor actual y el anterior es en casi todos los casos  $tol = 10^{-7}$ . Estos resultados son presentados en la Tabla 1.

Luego fue usada esta técnica para encontrar soluciones óptimas en el cálculo de trayectorias en el problema de Lambert desarrollado en [9], dando como resultado semillas para el método de Newton en orbitas de baja altura usadas en [13].

Tabla 1: Análisis de funciones con el PSO.

Función	Definición	Inicialización	Mínimo	# iter
Esfera	$\sum_{i=1}^{10} x_i^2$	[50, 100]	0	187
Griewank	$1 + \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \prod_{i=1}^{10} \cos(\frac{x_i}{\sqrt{i}})$	[300, 600]	0.007	2888
Paraboloide	$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ restringido a $x_1 = 2x_2 - 1$ y $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 \leq 0$	[0, 1]	1.393465	147
Rastrigin	$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 10 - 10 \cos(2\pi x_i)$	[2.56, 5.12]	37.8	219
Schwefel 1-2	$\sum_{i=1}^{10} (\sum_{j=1}^i x_j)^2$	[50, 100]	0	403
Sinosoidal	$\sum_{i=1}^{10} \sin(20\sqrt{x_i})$	[0, 10]	-10	665

### 3. Problema de tres cuerpos restringido

Como en [3], se buscan soluciones a la dinámica gravitacional de tres cuerpos con masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  donde  $0 \approx m_3 \ll m_2 < m_1$ . Se define la unidad de distancia  $DU$  como la distancia promedio entre las dos masas principales (en el sistema Tierra-Luna,  $1 DU = 384400$  km) y la unidad de tiempo  $TU$ , el tiempo en que una de las masas completa una órbita con periodo  $2\pi$  (en Tierra-Luna,  $1 TU = 375190$  seg). Se considera la constante gravitacional  $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$ , donde  $\mu_1$  y  $\mu_2$  y  $x_1 = -\mu$  y  $x_2 = 1 - \mu$  son los parámetros gravitacionales de  $m_1$  y  $m_2$ , resp. Las posiciones en el eje  $x$  de estas son  $x_1 = -\mu$  y  $x_2 = 1 - \mu$ .

Según esto se formulan las siguientes ecuaciones de movimiento a partir de la ecuación (1) (de acuerdo con [3, cap. 10] y [12, cap. 1] son las ecuaciones de Birkhoff).

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{v}_x = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + 2v_y, \\ \dot{v}_y = \frac{\partial \Omega}{\partial y} - 2v_x. \end{cases} \quad (2)$$

donde  $\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2}}$  y existe un invariante para el sistema, la integral de Jacobi  $C = 2\Omega - (v_x^2 + v_y^2)$  [12].

Si se introduce el ángulo  $\gamma$  que forma el vector velocidad  $(v_x, v_y)$  con el eje  $x$ , se obtiene

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega_y \cos \gamma - \Omega_x \sin \gamma}{\sqrt{2\Omega - C}} - 2$$

e integrando, usamos la solución para el siguiente funcional:

$$J = |x(T) - x(0)| + |y(T)| + \min \left\{ \text{mod} \left[ \left| \gamma(T) - \frac{\pi}{2} \right|, 2\pi \right], \text{mod} \left[ - \left| \gamma(T) - \frac{\pi}{2} \right|, 2\pi \right] \right\} \quad (3)$$

Entonces el problema consiste en encontrar la partícula  $(x(0), T)$  que minimiza la función objetivo (3) y encuentra el punto inicial y el periodo de una órbita periódica en el plano que definen los dos cuerpos masivos (órbita de Lyapunov) tal que  $x(T) = x(0)$ ,  $y(T) = y(0) = 0$  y  $\gamma(T) = \gamma(0) = \frac{\pi}{2}$ . La existencia de estas órbitas viene de los potenciales en la constante de Jacobi y en el sistema de EDO (2), en el cual se usa desde su fundamento los tipos de trayectorias que se pueden dar, cónicas dependiendo de la energía expresada en la excentricidad, y el teorema de la función implícita de forma similar a [2].

## 4. Integradores

Siguiendo [7] y [6] se usó un novedoso método, que como se verá es mucho más rápido que el conocido Runge Kutta 7-8. Taylor utiliza diferenciación automática para aproximar recursivamente los coeficientes de la serie de Taylor, estimación asintótica del error a través del cambio aprehensivo del paso del tiempo y del orden, y por último aritmética de intervalos para poner cotas a la región de integración.

“Este lee un sistema de EDOs y sale una rutina en C que ejecuta un único paso de la integración numérica de esas EDOs, por medio del método de Taylor. Cada paso de la integración elige el paso y el orden en forma adaptativa tratando de mantener el error local debajo de un límite dado, y para minimizar el esfuerzo computacional global. También hay soporte para aritmética de precisión extendida”. [6]

## 5. Resultados Numéricos

Luego de algunos cálculos, se deduce que para el sistema Tierra-Luna se tiene  $\mu = 0.01215510$ ,  $C = 3.01 \text{ DU/TU}$ ,  $x_{L1} = 0.836893 \text{ DU}$ ,  $x_{L2} = 1.1557 \text{ DU}$  y  $x_{L3} = -1.005065 \text{ DU}$ , donde  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  son puntos (de Euler) donde se equilibran las fuerzas gravitacionales de los dos cuerpos con masas consideradas y son colineales a la recta definida por ellos.

El algoritmo PSO usó un enjambre de 30 partículas y se dejó correr 1000 iteraciones o hasta que se cumpliera la tolerancia, esto se hizo en C y C++ en Ubuntu 14.04 con un computador Lenovo ThinkCentre E73z i5-4430s de

2.7 GHz. Los parámetros desconocidos son  $x(0)$  y  $T$ , entonces para inicializar el método se tomaron aleatoriamente  $x_{Li} - 0.15 \text{ DU} \leq x(0) \leq x_{Li} \text{ DU}$  y  $3 \text{ TU} \leq T \leq 8 \text{ TU}$ . Luego se juntaron todos los datos y se produjeron las siguientes gráficas en MatLab.

### 5.1. Órbitas del sistema Tierra-Luna

A continuación, se corroboraron los resultados presentados en [3] y se muestran en la Figura 1.

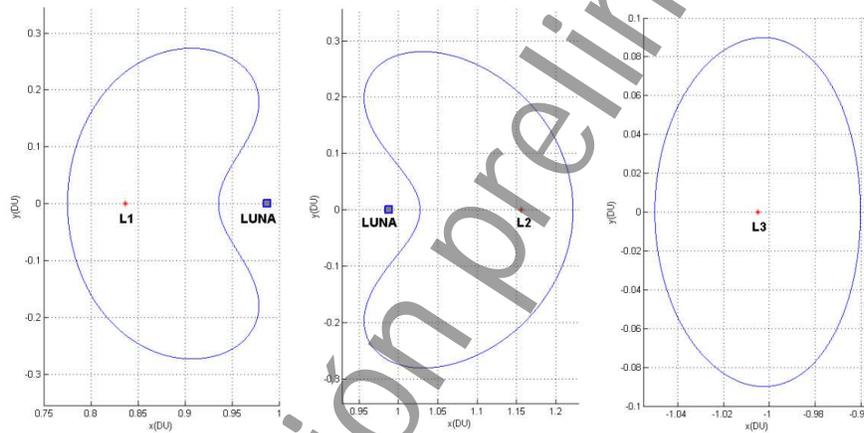


Figura 1: Órbitas alrededor de los puntos de Euler.

Estas órbitas no se pueden mantener a menos que se haga una corrección de trayectoria, al dejar pasar mas tiempo se observa un comportamiento caótico del sistema que termina por perder la nave, pero esta corrección no requiere mucho combustible. Se observa en la Tabla 2 una disminución del tiempo de

Tabla 2: Comparación entre integradores.

	$L1$	$L2$	$L3$
$RK(7-8)$	13.19 min	13.72 min	15.34min
$Taylor$	53.18 sec	50.42 seg	13.1 seg

procesamiento promedio del 93.29% respecto al Runge Kutta 7-8, mostrando en estos ejemplos que el algoritmo de A. Jorba es mucho mas rápido con la misma precisión.

### 5.2. Órbitas alrededor de la Luna

Las Figuras 2 y 3 muestran órbitas alrededor de la luna con la inclusión de una que relaciona a la luna, a L1 y a L2; algo que no es muy común si se consideran masas sin una diferencia muy grande entre ellas. La Tabla 3 muestra

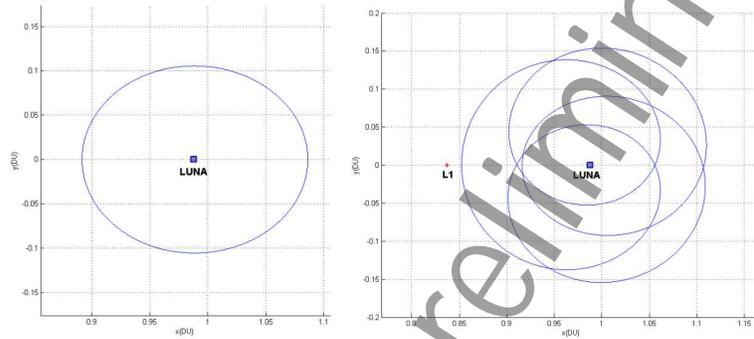


Figura 2: Órbitas alrededor de la Luna.

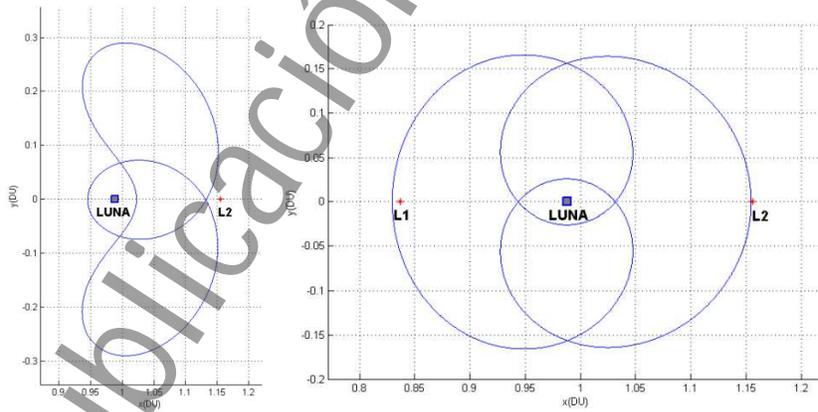


Figura 3: Órbitas alrededor de la Luna.

unos valores parecidos a los de la Tabla 2. Se pudo observar que los tiempos obtenidos en distintas simulaciones pueden variar de acuerdo a la variación estándar de los números aleatorios considerados en el proceso y al número de vueltas periódicas que se logren dar antes de que el sistema se desordene y la nave se pierda en el infinito.

Tabla 3: Comparación entre integradores.

	$m1$	$m2$	$m3$	$m4$
$RK(7-8)$	21.11 <i>min</i>	14.66 <i>min</i>	15.33 <i>min</i>	12.4 <i>min</i>
<i>Taylor</i>	12.22 <i>seg</i>	81.27 <i>seg</i>	66.71 <i>seg</i>	50.42 <i>seg</i>

### 5.3. Trayectorias del sistema Sol-Tierra y Sol-Júpiter

Expandiendo esta teoría a otros sistemas, ahora  $\mu_{sun-earth} = 3.0035 \times 10^{-6}$  y  $\mu_{sun-jupiter} = 9.537 \times 10^{-4}$ .

Así se obtuvieron las órbitas presentadas en la Figura 4.

Las primeras dos imágenes son del sistema Sol-Tierra y la última del sistema Sol-Júpiter. Teniendo en cuenta la proporción entre las masas de la Tierra y el Sol, aproximadamente de 1 en 333054, y la distancia entre los dos se llegaron a órbitas cónicas con excentricidades medias en el intervalo  $[0, 1]$  y no con la forma de frijol como en el caso Tierra-Luna. La tercera imagen de la Figura 4

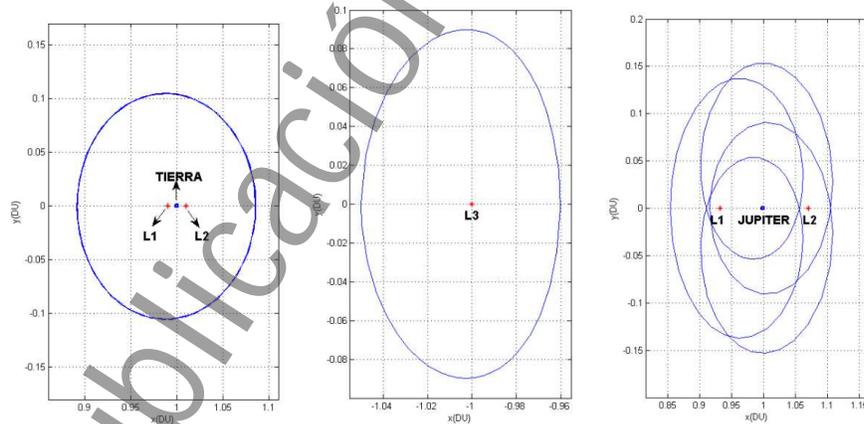


Figura 4: Órbitas alrededor de los puntos de Euler.

es del sistema Sol-Júpiter y aunque tiene muchos puntos de corte, su periodo no es muy alto y puede ser muy útil para naves de observación y exploración para este planeta. La Tabla 4 reafirma que el método de Taylor de una gran precisión al minimizar el funcional  $J$  de la ecuación (3) en un tiempo muy corto.

Tabla 4: Comparación entre integradores.

	$T1$	$T2$	$J1$
$RK(7-8)$	10.86 <i>min</i>	12.37 <i>min</i>	13.33 <i>min</i>
<i>Taylor</i>	28.71 <i>seg</i>	14.26 <i>seg</i>	1.11 <i>min</i>
$J$	2.73e-15	5.47e-15	5.23e-16

## 6. Conclusiones

El PSO es una gran herramienta de búsqueda de valores críticos, no requiere derivadas y converge rápidamente. El método de Taylor es una muy eficiente herramienta para hallar las soluciones de EDOs ya que se pudo reducir el tiempo de procesamiento de las soluciones de este problema a unos cuantos segundos con una convergencia alta, que se ve reflejada en la proximidad de  $J$  a cero. Hay regiones del espacio que ofrecen ventajas naturales que pueden ser de gran ayuda para misiones espaciales futuras. Nuestro planeta y en general todo el sistema solar aun tienen varios misterios por resolver.

## Agradecimientos

En memoria de Gladys Herrera Barbosa quien fue la inspiración de este trabajo. Los autores agradecen a la Dirección de Investigación y a todos los entes de la Universidad Sergio Arboleda por la financiación de la beca-pasantía de joven investigador, de la cual este artículo es uno de sus resultados.

## Referencias

- [1] A. Albouy and V. Kaloshin, *Finiteness of central configurations of five bodies in the plane.*, Ann. Math. (2) **176** (2012), no. 1, 535–588 (English).
- [2] J. Cerón, J. Amador, and G. Olivar, *Dinámica de un sistema lineal en  $\mathbb{R}^2$  conmutado por histéresis*, Ingeniería y Ciencia **13** (2017), 9–28.
- [3] B. Conway, *Spacecraft trajectory optimization*, Cambridge University Press, New York, 2010.
- [4] M. Hampton, *Finiteness of relative equilibria of the four-body problem*, University of Minnesota **5** (2004), 417–435.
- [5] M. Hvas, *Tuning and simplifying heuristical optimization*, University of Southampton, England, 2010.

- [6] A. Jorba and M. Zou, *A software package for the numerical integration of odes by means of high-order Taylor methods*, Experiment. Math. **14** (2005), no. 1, 99–117.
- [7] ———, *Taylor user's manual*, 2008, University of Leeds.
- [8] E. P. Konstantinos and M. N. Vrahatis, *Particle swarm optimization method for constrained optimization problems*, In Proceedings of the Euro-International Symposium on Computational Intelligence 2002, IOS Press, 2002, pp. 214–220.
- [9] H. Leeghim, *Spacecraft intercept using minimum control energy and wait time*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy (2013), 19.
- [10] J. Llibre, *A note on the dziobek central configurations*, Proceedings of the American Mathematical Society **143** (2015), no. 8, 3587–3591.
- [11] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Mathematical Intelligencer **20** (1998), 7–15.
- [12] V. Szebehely and E. Grebenikov, *Theory of Orbits-The Restricted Problem of Three Bodies.*, Soviet Astronomy **13** (1969), 364.
- [13] Y. Villanueva, *Lagrangian optimization in interplanetary trajectories*, Universidad Sergio Arboleda, Colombia, 2013.