

# Nudos Salvajes

## Wild Knots

Sebastian Zapata Rendón y Margarita M. Toro Villegas

Universidad Nacional de Colombia, Colombia

**RESUMEN.** En este artículo estudiamos dos construcciones de nudos salvajes, con el fin de mostrar la gran belleza de este tipo de embebimientos de la 1-esfera en  $\mathbb{R}^3$ . Consideramos el primer ejemplo de nudo salvaje, publicado en 1948 por Artin y Fox, [3] y luego bosquejamos la construcción de un nudo salvaje en el marco de la teoría de grupos kleinianos, [12]. El estudio clásico de la teoría de nudos se concentra en estudiar aquellos nudos que poseen un comportamiento localmente poligonal, quedando así excluidos gran parte de los posibles embebimientos, que no solo jugaron un papel central en el desarrollo de conceptos de topología, sino que poseen un encanto especial, que sirve de motivación para el estudio de las matemáticas.

El artículo es ante todo divulgativo y estudia algunos aspectos básicos de los nudos salvajes, pero presenta una nueva familia de enlaces salvajes: *los nudos irracionales*, construida por nosotros usando las ideas del ejemplo de Fox y Artin junto con el método de construcción de nudos racionales.

**Palabras clave:** Arco salvaje, nudo racional, nudo irracional, índice de penetración, nudo salvaje.

**ABSTRACT.** In this paper we study two types of constructions of wild knots, looking forward to show the beauty of this type of embeddings of the 1-sphere in  $\mathbb{R}^3$ . We consider the first example of a wild knot, published by Artin and Fox in 1948, [3] and later we make a sketch of the construction of a wild knot in the setting of kleinian group theory, [12]. The classical knot theory usually studies those knots that have a locally polygonal behavior, thus excluding many of the possible embeddings. Wild knots not only have played a central role in the development of topology concepts but also have a special charm, that is useful to motivate the study of mathematics.

The article is a review of some basic aspects of wild knots, but it introduces a new family of wild links: *the irrational knots*, that we constructed using ideas from the Fox and Artin example, together with the rational knots construction method.

**Key words:** Irrational knot, rational knot, penetration index, wild arc, wild knot.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 57M30; Secondary 57M25, Third 57M05.

## 1. Introducción

La teoría clásica de nudos se encarga de estudiar embebimientos de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Este es un tema de investigación muy activo en topología que involucra distintas áreas de matemáticas, como álgebra y geometría, y que tiene aplicaciones en ciencias como física, química y biología, [7]. La teoría de nudos se ha convertido recientemente en un tema de divulgación de las matemáticas, ya que permite presentar ideas muy profundas a partir de ejemplos prácticos que capturan fácilmente la imaginación del lector [1], [16]. La teoría clásica de nudos se ha dedicado a considerar nudos que localmente presentan un comportamiento suficientemente bueno, llamados *nudos mansos*. Estos son ambiente-isotópicos a un embebimiento poligonal, [6], de tal forma que quedan excluidos un conjunto de embebimientos conocidos como *salvajes*, que presentan un comportamiento poco intuitivo, que muestran la necesidad de tener definiciones precisas y cuyo estudio requiere un tratamiento distinto. Nosotros vamos a estudiar el primer ejemplo de nudo salvaje, publicado en 1948 por Artin y Fox, [3], que dio origen a toda una familia de ejemplos, que tuvieron una gran influencia en el desarrollo de la topología. En cierto sentido se puede pensar que existen más nudos salvajes que nudos mansos y hay otras áreas de las matemáticas donde se presentan situaciones similares a las de los embebimientos salvajes.

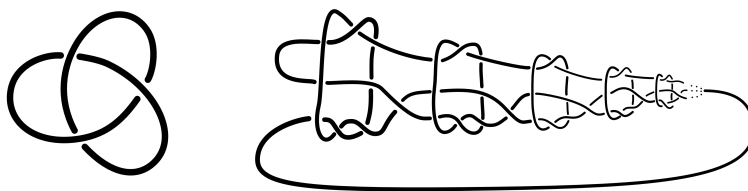
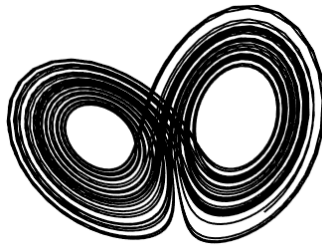


Figura 1. Nudo manso (izquierda) y nudo salvaje (derecha)

Tomemos por ejemplo el atractor de Lorenz de la figura 2, intuitivamente, este flujo se basa en una curva que se anuda a si misma, e induce una superficie asociada denominada plantilla; lo interesante de esta superficie, es que su topología da valiosa información acerca del flujo en consideración, y aún más, la topología de esta plantilla se puede entender a partir de aquellos nudos mansos que se pueden embeber en ella, denominados nudos lorenzianos [10], en otras palabras, la plantilla se puede entender a partir del estudio de una familia infinita de nudos mansos. Esto no es sí una aplicación de los nudos salvajes, pero sí muestra cómo la noción del infinito aplicado en la teoría de nudos, trae consigo matemática interesante, y motiva en cierta medida el estudio de familias más generales de nudos.

Vale la pena mencionar que lo bello de esta teoría se puede evidenciar, tanto de forma puramente teórica como artística, en la exposición sobre nudos salvajes de Arroyo y Othoniel, [29]. Aubin Arroyo es un matemático mexicano que usa nudos salvajes en divulgación y estableció una colaboración muy especial con el artista francés Jean-Michel Othoniel, quien realiza esculturas en vidrio que tienen una relación muy estrecha con las imágenes virtuales de los nudos salvajes que encuentra Arroyo. Se dio una conexión maravillosa entre el arte y las matemáticas, a raíz de la cual se tienen exposiciones en

diferentes partes del mundo y también un libro [2]. Hay mucha documentación sobre el tema y unas maravillosas imágenes, ver por ejemplo [27], [28] y el video [30]. Nosotros realizamos unas imágenes similares que se muestran en las figuras 3 y 4.



**Figura 2.** Atractor de Lorenz

El trabajo de Artin y Fox [3] sienta las bases matemáticas para estudiar nudos salvajes, es por esto que nos concentramos en estudiar el primer ejemplo clásico de su artículo. Vamos a dar una parametrización explícita utilizando el programa *Mathematica*, para mostrar que en efecto sí se trata de un nudo, es decir, que es la imagen de  $\mathbb{S}^1$ . Para ello tuvimos que encontrar parametrizaciones explícitas de las curvas en consideración y obtener una función que las modele. Es de anotar que en el artículo original no se dan parametrizaciones, sino que se hace la descripción intuitiva y se dice que se puede construir.

La idea de este artículo es divulgativa, pero tiene un ejemplo nuevo, desarrollado por nosotros: *los nudos irracionales*, en particular el nudo  $e$ . Para definirlo usamos la teoría de nudos racionales junto con las ideas del ejemplo de Fox y Artin para describir un enlace salvaje. Mostramos que es salvaje usando el concepto de índice de penetración y conjeturamos que el grupo fundamental del complemento del nudo  $e$  es el grupo libre con dos generadores. Creemos que el tema de nudos irracionales vale la pena estudiarse en detalle y es un tema de investigación en progreso.



**Figura 3.** Nudo



**Figura 4.** Reflexiones

Finalmente, vamos a hacer referencia a desarrollos actuales de la teoría de nudos salvajes, pero sólo para mostrar que es un campo en desarrollo: los grupos kleinianos y las cubiertas ramificadas de 3-variedades abiertas.

## 2. Arcos de Artin y Fox

El estudio formal de los nudos salvajes comenzó en 1948 con el artículo *Some wild cells and spheres in three-dimensional space* de Artin y Fox, en donde se estudió una familia de arcos que se pueden construir siguiendo cierto patrón de recurrencia [3]. En el artículo de Artin y Fox fue donde se usaron por primera vez los nombres de nudos mansos y salvajes, aunque ya se conocían ejemplos, como la curva que Tietze presentó en su artículo de 1908 y los trabajos de Antoine en 1920. En los trabajos de Tietze en 1908 aparece un nudo salvaje y Tietze hace notar que las ideas de equivalencia e invariantes homológicos tienen que tener en cuenta este tipo de nudos y deben ser más cuidadosas [25]. Los nudos y arcos salvajes fueron considerados primero que todo en el contexto de mostrar las dificultades con el concepto de deformación. Por ejemplo, la necesidad de definir homotopía, homotopía ambiente y no simplemente difeomorfismo se puede ejemplificar muy bien dentro de la teoría de nudos. Es por eso que al hacer las definiciones precisas se llegó a la necesidad de clasificar los nudos entre mansos y salvajes. La distinción fue fundamental dado que las técnicas para buscar invariantes que se desarrollaron requieren la necesidad de que los nudos sean poligonales, y los métodos se enmarcan en la categoría P. L., es decir que las curvas se puedan aproximar por un polígono.

Si consideramos un arco  $K$  como la imagen de un embebimiento  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $I$  es cualquier intervalo en  $\mathbb{R}$ , decimos que  $K$  es *poligonal* si es la unión finita de segmentos de recta, y más en general, que es *manso*, si es ambiente isotópico a cualquier arco poligonal. Cuando  $K$  no sea manso, decimos que es *salvaje*. De hecho podemos establecer la siguiente generalización:

**Definición:** Sean  $K_1, K_2, \dots, K_n$  nudos cuya intersección dos a dos es vacía. Decimos que  $L = \bigcup_{i=1}^n K_n$  es un enlace salvaje, si existe un  $1 \leq i \leq n$  tal que  $K_i$  sea salvaje. A cada  $K_j$  se le denomina componente mansa o salvaje de  $L$ , según sea el caso.

### Ejemplo (Artin-Fox [3])

Inicialmente consideremos un cilindro convexo  $C$  con bases  $A_-$  y  $A_+$ , en cuyo interior queremos definir 3 curvas cuya representación en el espacio sea similar a la figura 5, de tal forma que cada punto  $(x, y, z)$  en  $C$  cumpla que  $x^2 + z^2 \leq 1$  y  $-1 \leq y \leq 1$ . Los puntos  $\{t_-, s_-, r_-, t_+, s_+, r_+\}$  son distintos, aquellos que tengan los mismos signos son colineales entre sí y están en las bases con el signo correspondiente. Sean además  $K_0, K_-$  y  $K_+$  los arcos orientados como en la figura.

A continuación, definamos  $\mathcal{E}$  como el elipsoide convexo:  $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4$  que dividiremos por medio de la familia de planos  $y = \pm(2 - 2^{1-m})$  para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; siguiendo el orden mostrado en la figura 6. Denotemos dichas secciones del elipsoide por  $D_n$  de tal forma que, para  $n > 0$ ,  $D_n$  corresponde a la sección con  $2 - 2^{2-n} \leq x \leq 2 - 2^{1-n}$  y para  $n \leq 0$ , tal que  $-2 + 2^{-n} \leq x \leq -2 + 2^{1-n}$ .

Intuitivamente, la idea es embeber el cilindro  $C$  en cada uno de los  $D_n$ , con el fin de generar una familia infinita de cilindros, que además «peguen bien», es decir, de tal forma que al hacer el embebimiento, digamos en  $D_n$ , aquellos en  $D_{n-1}$  y  $D_{n+1}$  tengan la propiedad de que los arcos ilustrados anteriormente se unan continuamente y que conserven

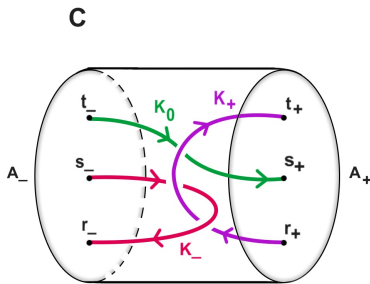


Figura 5. Curvas en C

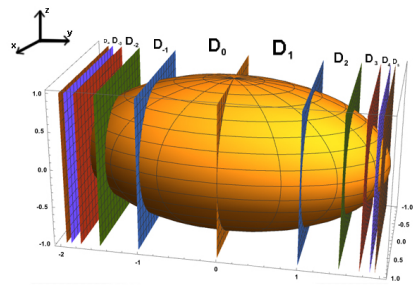


Figura 6. Divisiones en el elipsoide

tanto la orientación como la forma geométrica para obtener así un embebimiento como el de la figura 7.

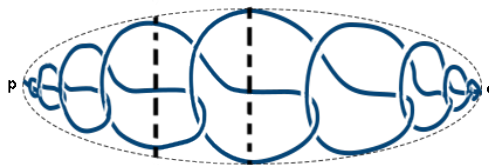


Figura 7. Arco salvaje

Veamos que efectivamente esto es posible:

Para  $n \in \mathbb{Z}$  definamos  $F_n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$F_n(x, y, z) = \begin{cases} (x, \frac{y+1}{2}2^{1-n} + 2 - 2^{2-n}, z), & n > 0 \\ (x, \frac{y+1}{2}2^n - 2 + 2^n, z), & n \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Notemos que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $F_n(C)$  es homeomorfo a  $C$ , sea  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_n(C)$ , la cual es una copia de  $C$ , ubicada entre cada una de las divisiones del elipsoide por las paralelas anteriores.  $A$  es en realidad un cilindro convexo con extremos que se acercan indefinidamente a  $-2$  y  $2$  respectivamente. Finalmente basta comprimir  $A$  adecuadamente, de tal forma que quede perfectamente encajado en el elipsoide. Esto se resume en el siguiente programa en *Mathematica*:

```

arcoK0[t_]:= {0, t, 1/4 - (1/4) Sin[t * \[Pi]/2]};
arcoKmas[t_]:= {(-5/8) Cos[t * \[Pi]/2 + \[Pi]],
1 + (5 Sqrt[3]/8) Cos[t * \[Pi]/2 + \[Pi]],
-1/2 Sin[t * \[Pi]/2 + \[Pi]]};
arcoKmenos[t_]:= {(5/8) Cos[2\[Pi]*(t+1)/4 - \[Pi]/2],
-1 + (3 Sqrt[3]/4) Cos[2\[Pi]*((t+1)/4) - \[Pi]/2],
-1/4 - (1/4) Sin[2\[Pi]*((t+1)/4) - \[Pi]/2]};
funF[n_, {x_, y_, z_}] := If[n > 0, {x, 2^(1-n)*(y+1)/2 + 2^-2^(2-n), z},
{x, 2^n*(y+1)/2 - 2+2^n, z}];
Compr[n_, {x_, y_, z_}] := {funF[n, {x, y, z}][[1]] * Sqrt[1 -
funF[n, {x, y, z}][[2]]^2/4], funF[n, {x, y, z}][[2]],
funF[n, {x, y, z}][[3]] * Sqrt[1 - funF[n, {x, y, z}][[2]]^2/4]};
cilinC[n_, t_] := {Compr[n, arcoK0[t]], Compr[n, arcoKmas[t]],
Compr[n, arcoKmenos[t]]};
ListaC = {};
Do[AppendTo[Listac, cilinC[i, t]], {i, -6, 6}];
ParametricPlot3D[Listac, {t, -1, 1}, PlotStyle -> {Blue},
ViewPoint -> {2, 0, 0}, PlotRange -> Full, ImagePadding -> 1]

```

Con la construcción anterior obtenemos un objeto similar a la figura 7, y si seguimos denotando  $F_n$  a la composición  $T \circ F_n$ , donde  $T$  es la transformación que comprime a  $A$ , entonces, dicho objeto, que llamaremos  $K$ , vendrá dado por:

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [F_n(K_+) \cup F_n(K_0) \cup F_n(K_-)]$$

Aún no sabemos que  $K$  es efectivamente un arco, ya que aunque por construcción se garantiza que los segmentos de arco peguen de forma continua, no se ha mostrado la existencia de un homeomorfismo entre el intervalo y  $K$ , esto lo haremos a continuación:

**Lema 1.** *El objeto  $K$  de la definición anterior es efectivamente un arco.*

*Demostración.* Definamos  $K_{\square}^n$  para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $\square \in \{+, -, 0\}$  como el segmento  $K_{\square}$  contenido en  $D_n$ , o equivalentemente  $K_{\square}^n := F_n(K_{\square})$ . Notemos que:

$$\dots, K_0^{n-1}, K_-, K_+^{n-1}, K_0^n, K_-^{n+1}, K_+, K_0^{n+1}, K_-^{n+2}, K_+^{n+1}, \dots$$

sugiere un orden en la familia  $\{K_{\square}^n\}$ , en donde dos elementos que estén adyacentes pegan adecuadamente. Si definimos  $K_0^0 =: a_0$ , la lista anterior nos induce por recursión una familia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Luego como cada  $a_n$  corresponde a un  $K_{\square}^m$  y este último es homeomorfo a  $[0, 1]$ , entonces podemos pedir que  $a_n$  sea homeomorfo a  $[n, n+1]$ . Tenemos entonces que:

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} a_n$$

y por lo tanto

$$K \cong \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n + 1] \cong \mathbb{R}$$

i.e.,  $K$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Pero  $\mathbb{R} \cong (0, 1)$ , luego  $K \cong (0, 1)$ , quedando demostrado que efectivamente  $K$  es un arco.  $\square$

Por simplicidad, denotemos como  $p$  y  $q$  los puntos límites de  $K$  en la figura 7 y preservando la notación continuemos llamando  $K$  a  $K \cup \{p, q\}$ . Así  $K \cong_{\phi} [0, 1]$  con  $\phi(0) = p$  y  $\phi(1) = q$ . Ahora que sabemos que  $K$  efectivamente es un arco, queremos determinar el grupo fundamental asociado a su complemento. Para esto definamos los siguientes conjuntos para  $i = 1, 2, 3, \dots$

$$M_i = \mathbb{R}^3 - \left[ \overline{\mathcal{E} - \left[ \bigcup_{|n| < i} D_n \right] \cup K} \right]$$

**Lema 2.** Cada  $M_i, i = 1, 2, 3, \dots$ , es abierto en  $M := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ .

*Demostración.* Basta notar que

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \mathbb{R}^3 - K$$

y además como

$$A_i := \mathcal{E} - \left[ \overline{\bigcup_{|n| < i} D_n} \right] \cup K$$

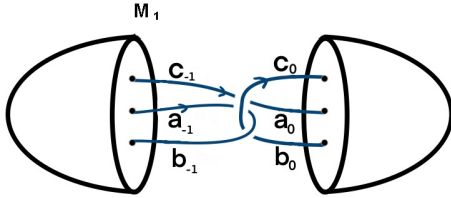
es cerrado en  $\mathbb{R}^3$ , entonces para todo  $i, M_i$  es abierto en  $\mathbb{R}^3$ , pero como  $\mathbb{R}^3 - K$  es abierto en  $\mathbb{R}^3$  y  $M_i \subseteq \mathbb{R}^3 - K$  se sigue que  $M_i$  es abierto en  $\mathbb{R}^3 - K = M$ .  $\square$

Para determinar el grupo fundamental del complemento de  $K$ , necesitamos determinar  $\pi(M_i)$  para cada  $i = 1, 2, \dots$ , mostraremos con detalle como determinar  $\pi(M_1)$  y el resultado general se seguirá de esto.

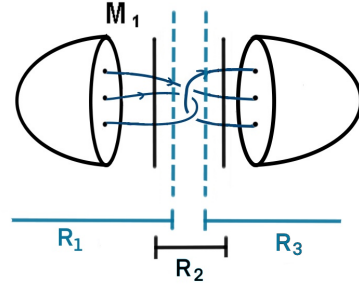
**Lema 3.**  $\pi(M_1)$  es generado por los  $a_n, b_n, c_n$  para  $n \in \{-1, 0\}$ , de la figura 8 con las relaciones:

$$\begin{cases} b_{-1} a_{-1}^{-1} c_{-1}^{-1} = 1 \\ c_0 a_0 b_0^{-1} = 1 \\ a_0 = c_0^{-1} c_{-1} c_0 \\ b_{-1} = c_0^{-1} a_{-1} c_0 \\ c_0 = b_{-1}^{-1} b_0 b_{-1} \end{cases}$$

*Demostración.* Dividamos el espacio en 3 regiones abiertas no disjuntas  $R_1, R_2, R_3$  como se ve en la figura 9. La idea es usar el teorema de Seifert-van Kampen para calcular  $\pi(M_1 \cap (R_1 \cup R_2))$  y luego  $\pi(M_1 \cap (R_1 \cup R_2 \cup R_3)) = \pi(M_1)$ . Comencemos entonces



**Figura 8.** Generadores de  $\pi(M_1)$



**Figura 9.** Regiones de división

con el primer grupo: Notemos que  $M_1 \cap (R_1 \cup R_2) = (M_1 \cap R_1) \cup (M_1 \cap R_2)$ , y  $M_1 \cap R_1$ ,  $M_1 \cap R_2$  son dos conjuntos abiertos y arco-conexos con intersección no vacía y arco-conexa, luego podemos aplicar el teorema de Seifert-van Kampen para calcular el grupo fundamental de su unión.

$\pi(M_1 \cap R_2)$  se puede calcular fácilmente usando el método de Wirtinger de teoría de nudos, ya que lo único particular en este espacio son los tres cruces que se aprecian en la figura 9. Como se ve para una configuración como en la figura 11 de un cruce positivo y negativo, se tienen las relaciones  $x_i y_i = y_{i+1} x_{i+1}$  y  $x_{i+1} y_{i+1} = y_i x_i$  respectivamente, por lo tanto:

$$\pi(M_1 \cap R_2) = \langle a_i, b_i, c_i : i = -1, 0 | c_0 a_0 = c_{-1} c_0; \quad c_0 b_{-1} = a_{-1} c_0; \quad b_{-1} c_0 = b_0 b_{-1} \rangle$$

Ahora, para  $\pi(M_1 \cap R_1)$ , basta notar que para efectos del grupo fundamental, el trozo de elipsoide se comporta como un punto, y por lo tanto el grupo fundamental tan solo será generado por  $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}$  con una única relación dada por  $b_{-1} = c_{-1} a_{-1}$ , i.e.:

$$\pi(M_1 \cap R_1) = \langle a_{-1}, b_{-1}, c_{-1} | b_{-1} = c_{-1} a_{-1} \rangle$$

Notemos que  $\pi((M_1 \cap R_1) \cap (M_1 \cap R_2)) = \{a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}\}$ , ya que no hay ninguna relación posible entre dichos lazos, por lo tanto, al tomar los mapeos inducidos de cada elemento de  $\pi((M_1 \cap R_1) \cap (M_1 \cap R_2))$  en los otros dos grupos correspondientes, de las figuras 8 y 10 se ve claramente que  $i_1(s) = s$  e  $i_2(s) = s$ , para todo  $s \in \pi((M_1 \cap R_1) \cap (M_1 \cap R_2))$ . Por lo tanto, en la presentación del grupo, no se obtiene ninguna relación nueva, es decir, tenemos que  $\pi(M_1 \cap (R_1 \cup R_2))$  es el grupo dado por la presentación:

$$\langle a_i, b_i, c_i : i = -1, 0 | c_0 a_0 = c_{-1} c_0; \quad c_0 b_{-1} = a_{-1} c_0; \quad b_{-1} c_0 = b_0 b_{-1}; \quad b_{-1} = c_{-1} a_{-1} \rangle$$

Por la simetría del espacio, el mismo argumento implica que  $\pi(M_1 \cap (R_2 \cup R_3))$  tiene la presentación:

$$\langle a_i, b_i, c_i : i = -1, 0 | c_0 a_0 = c_{-1} c_0; \quad c_0 b_{-1} = a_{-1} c_0; \quad b_{-1} c_0 = b_0 b_{-1}; \quad b_0 = c_0 a_0 \rangle$$



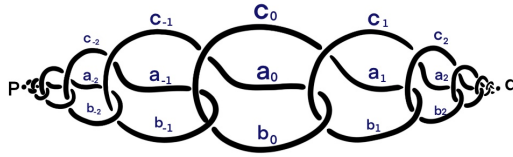


Figura 10. Lazos generadores

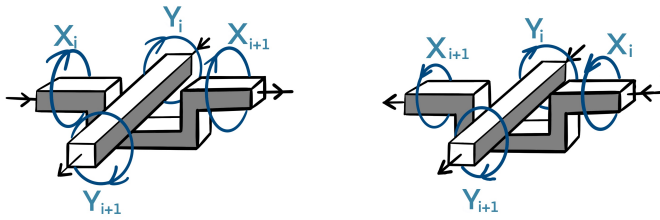


Figura 11. Relación de Wirtinger

Finalmente, con los grupos  $\pi(M_1 \cap (R_1 \cup R_2))$  y  $\pi(M_1 \cap (R_2 \cup R_3))$  podemos aplicar Van Kampen nuevamente y obtener  $\pi(M_1)$ , pero se aplica de forma trivial, ya que si nos damos cuenta:

$$[M_1 \cap (R_1 \cup R_2)] \cap [M_1 \cap (R_2 \cup R_3)] = M_1 \cap R_2$$

cuyo grupo fundamental ya calculamos, y de las figuras 8 y 10 se ve que trivialmente sus elementos se envían por medio de los mapeos inducidos a elementos correspondientes en cada uno de los grupos, y por tanto en el grupo obtenido por Van Kampen nuevamente no tenemos ninguna relación nueva, es decir  $\pi(M_1)$  tiene una presentación generada por  $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, a_0, b_0, c_0$  y relaciones

$$c_0 a_0 = c_{-1} c_0; c_0 b_{-1} = a_{-1} c_0; b_{-1} c_0 = b_0 b_{-1}; -1 = c_{-1} a_{-1}; b_0 = c_0 a_0$$

quedando probado así el lema. □

Con el mismo razonamiento del lema anterior, podemos calcular  $\pi(M_n)$  para todo  $n = 1, 2, \dots$ , obteniendo así el siguiente corolario:

**Corolario 1.**  $\pi(M_n)$   $n = 1, 2, \dots$  es generado por los lazos  $a_i, b_i, c_i$  de la figura 10 para  $-n \leq i < n$  con las relaciones:

$$\begin{cases} b_{-n} a_{-n}^{-1} c_{-n}^{-1} = 1 \\ c_{n-1} a_{n-1} b_{n-1}^{-1} = 1 \\ a_{i+1} = c_{i+1}^{-1} c_i c_{i+1} \\ b_i = c_{i+1}^{-1} a_i c_{i+1} \\ c_{i+1} = b_i^{-1} b_{i+1} b_n \end{cases}$$

En resumen, hemos definido una familia de conjuntos  $M_i$ , abiertos en su unión, tales que para cada  $i$ ,  $M_i \subseteq M_{i+1}$ , por lo tanto, podemos calcular  $\pi(M)$  como el límite directo de la sucesión de inyecciones  $I_i : \pi(M_i) \rightarrow \pi(M_{i+1})$ , con lo cual hemos probado el siguiente lema:

**Lema 4.** *El grupo fundamental  $\pi(M_i)$  es el grupo generado por los elementos  $a_n, b_n, c_n$  para  $n \in \mathbb{Z}$  de la figura 10 con las relaciones*

$$\begin{cases} c_n a_n b_n^{-1} = 1 \\ a_{n+1} = c_{n+1}^{-1} c_n c_{n+1} \\ b_n = c_{n+1}^{-1} a_n c_{n+1} \\ c_{n+1} = b_n^{-1} b_{n+1} b_n \end{cases}$$

Encontramos de esta forma una presentación para el grupo fundamental  $\pi(M)$ , queda entonces la pregunta de si este es trivial o no, la cual se puede resolver fácilmente buscando una representación de este grupo en un grupo conocido, en este caso buscaremos una representación en el grupo simétrico  $S_5$ . Si notamos que al tomar el conjunto de relaciones del lema anterior, para  $n \in \mathbb{Z}$  podemos escribir:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_n^{-1} b_{n+1} b_n \\ b_n c_{n+1} &= b_{n+1} b_n \\ (c_n a_n) c_{n+1} &= (c_{n+1} a_{n+1}) (c_n a_n) \\ c_n (c_n^{-1} c_{n-1} c_n) c_{n+1} &= c_{n+1} (c_{n+1}^{-1} c_n c_{n+1}) c_n (c_n^{-1} c_{n-1} c_n) \\ c_{n-1} c_n c_{n+1} &= c_n c_{n+1} c_{n-1} c_n \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Lo anterior nos define una familia de relaciones en el grupo generado por los  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  que denotaremos por  $C$ ; este es un subgrupo de  $\pi(M)$  para el cual podemos considerar una función  $f : C \rightarrow S_5$  definida para los  $c_n$  por

$$f(c_n) = \begin{cases} (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) & \text{si } n \text{ impar} \\ (1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 5) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Obtenemos que  $f$  es un homomorfismo de grupos, para el cual  $f(C)$  no es trivial, se sigue que  $C$  tampoco lo es, lo cual implica directamente que  $M$  no tiene grupo fundamental trivial.

**Observación:** Este ejemplo muestra un arco cuyo complemento no es simplemente conexo, y como todo arco manso no cerrado es ambiente isotópico a una línea recta, el grupo fundamental de su complemento es trivial, se sigue entonces que el arco considerado en este ejemplo es salvaje.

### 3. Índice de penetración

Una de las nociones más utilizadas para determinar si un arco o nudo es salvaje, es el índice de penetración introducido por Alford y Ball en 1963 [4], el cual permite

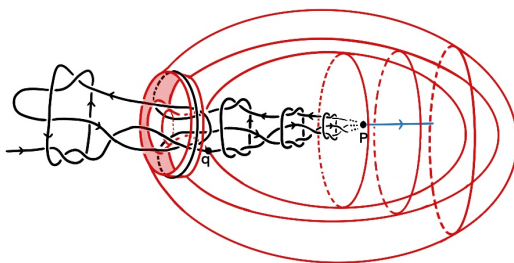
entender cómo es el comportamiento local del arco a determinar, en ciertos casos, cuáles de sus puntos son singulares, es decir, encontrar aquellos puntos donde el arco falla en ser localmente poligonalizable.

**Definición:** Sea  $K$  un arco y  $p \in K$ , definimos el índice de penetración de  $K$  en  $p$  como el menor cardinal  $n$  tal para el cual existen 2-esferas arbitrariamente pequeñas que encierran a  $p$ , no lo contienen, y tocan a  $K$  a lo más en  $n$  puntos. Denotaremos dicho cardinal por  $P(K, p)$ .

El índice de penetración nos da un acercamiento a una caracterización de algunos arcos salvajes, por ejemplo, es invariante con respecto a isotopías [26].

**Teorema 1.** Sean  $K_1$  y  $K_2$  dos arcos equivalentes por medio de una isotopía  $H$  de  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $h$  el homeomorfismo entre ellos, es decir,  $h(x) = H(x, 1)$  y  $h(K_1) = K_2$ , entonces para todo  $p \in K_1$

$$P(K_1, p) = P(K_2, h(p))$$



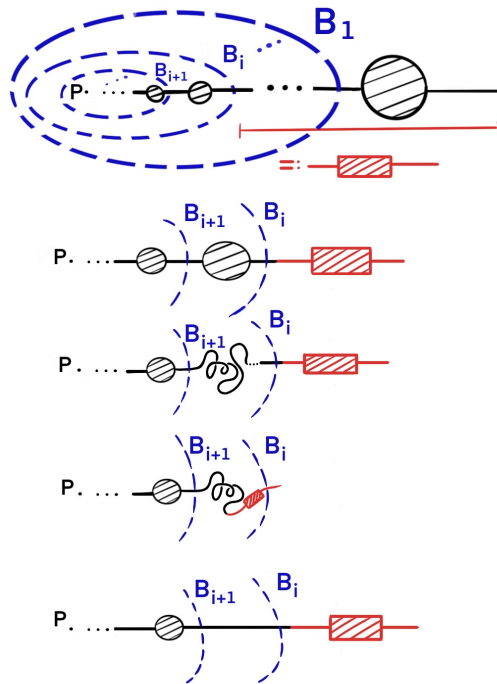
**Figura 12.** Arco de Lomonaco [17]

O sea que la equivalencia de arcos preserva el índice de penetración en los puntos correspondientes. Esta propiedad nos permite derivar resultados interesantes.

**Lema 5.** Sea  $K$  un arco manso excepto posiblemente en un punto  $p \in K$ , si  $P(K, p) = 1$  entonces  $K$  es manso.

*Demostración.* La prueba de este lema es técnica y se puede consultar con detalle en [26]. La idea es dividir el arco  $K$  en segmentos determinados por la familia de 2-esferas inducida por el índice de penetración, y tal como se muestra en la figura 13, aplicamos a cada uno de estos segmentos el conocido truco de Bing [5], que permite soltar el arco en cada región de forma independiente por medio de una familia de isotopías, como esto se puede realizar para cada parte, podemos definir una isotopía global en términos de las originales que lleve  $K$  a un segmento lineal.  $\square$

Para extender la noción local de índice de penetración en un punto a una propiedad global, entenderemos el índice de penetración de un arco  $K$ ,  $P(K)$  como:



**Figura 13.** Truco de Bing

$$P(K) = \sup_{p \in K} \{P(K, p)\}$$

Lo relevante de este concepto, es que dado un arco  $K$  se tiene el siguiente resultado:

**Lema 6.** Sea  $K$  un arco, entonces:

- i) Si  $P(K) = 1$ ,  $K$  es manso, aún más,  $K$  es un punto.
- ii) Si  $P(K) = 2$ , no se puede afirmar nada de la naturaleza de  $K$ .
- iii) Si  $p(K) \geq 3$ ,  $K$  es salvaje.

*Demostración.*

- i) Se sigue directamente de la definición de índice de penetración.
- ii) Si  $K$  es un nudo manso,  $P(K) = 2$  de forma trivial, y el ejemplo 1.4 de Artin y Fox [3], muestra un arco salvaje cuyo índice de penetración es también 2.
- iii) Se prueba de forma equivalente, que si  $K$  es manso, entonces  $P(K) = 1$  o  $P(K) = 2$ , lo cual está mostrado en [26].  $\square$

#### 4. Enlaces irracionales

Los enlaces racionales fueron introducidos por Conway en 1970, [9], constituyen la familia más simple de enlaces y han sido ampliamente estudiados, [14], [15], [24]. Además muestran una interesante conexión entre la teoría de nudos y la teoría de números. Utilizando las ideas de la construcción del ejemplo de Artin-Fox y la familia de enlaces racionales, nosotros damos un bosquejo de la construcción de una nueva familia de enlaces salvajes: *los enlaces irracionales*. Damos una idea intuitiva de la construcción, pues hay muchos detalles técnicos que se deben resolver.

Definimos un 2-tangle trivial como un embebimiento de 2 arcos disjuntos en una 3-celda de tal forma que los cuatro extremos de los arcos estén en la frontera de la bola y una proyección del tangle sea como lo muestra la figura 14, en la que todos los cruces tienen el mismo signo. Utilizando la notación de la figura, se tiene que un 2-tangle trivial se puede definir a partir de un número  $a$ , donde  $|a|$  es el número de cruces presentes en el tangle, y su signo representa el signo de los cruces, por ejemplo, el tangle  $-3$ , corresponde a tener un tangle trivial negativo de 3-cruces.

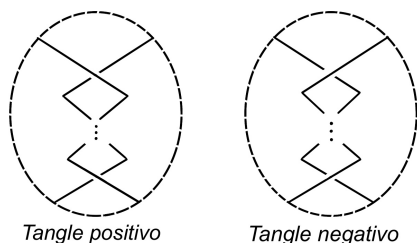


Figura 14. Signos de un tangle

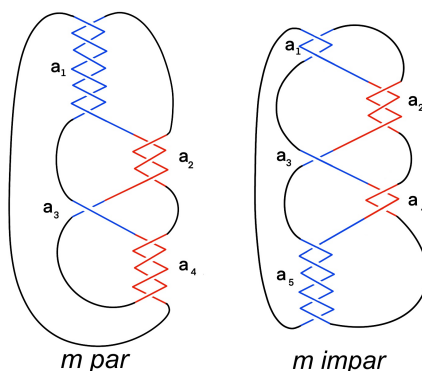


Figura 15. Formas de cerrar un enlace racional

A partir del concepto de tangle trivial, Conway introdujo los enlaces racionales, que son simplemente una unión adecuada de 2-tangles triviales. Así como un 2-tangle trivial se representa por medio de un número entero  $a$ , un tangle racional se puede ver como una sucesión de enteros  $[a_1, a_2, \dots, a_m]$  a partir de los cuales se puede construir un objeto como el de la figura 15, siguiendo la regla de que al graficar cada uno de los 2-tangles triviales, si  $i$  es par, en  $a_i$  se cambia el signo de los cruces; la forma de unir los extremos del 2-tangle racional depende de la paridad de  $m$  tal y como se aprecia en la figura, en la cual se muestra  $[6, 3, 1, 4]$  a la izquierda y  $[2, 3, 1, 2, 5]$  a la derecha.

El nombre de enlace racional se deriva de la relación que se puede establecer entre ellos y los números racionales por medio de las fracciones continuas, [8], [22].

Si tenemos una fracción continua de la forma:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

donde  $a_i$  es un número entero para cada  $i$ , podemos denotarla de forma más compacta por la sucesión de enteros  $[a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$ .

Un resultado conocido de teoría de números, es que todo número racional  $p/q$ , se puede ver como una fracción continua de longitud finita, es decir,  $p/q = [a_1, \dots, a_m]$  para cierto  $m \in \mathbb{N}$ , por lo tanto, a todo número racional se le puede asociar un enlace racional, y el recíproco también es cierto, teniendo en cuenta la equivalencia de fracciones continuas. Por ejemplo, los enlaces racionales de la figura 18 se corresponden con los números racionales  $8/3$ ,  $87/32$  y  $1650/607$ . Curiosamente, resulta que todo enlace racional es también un enlace de dos puentes que está determinado precisamente por el número racional asociado a la fracción continua, [7].

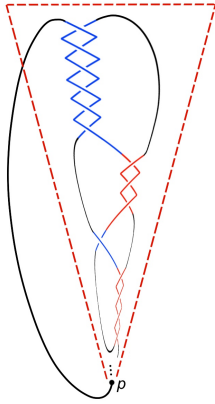
En caso de que la fracción continua tenga longitud infinita, se tiene que esta representa un número irracional, por lo tanto, un número real  $x$  es racional si y solo si se puede representar como una fracción continua de longitud finita.

Como la construcción de los enlaces racionales esta asociada a números racionales, podemos aplicar el mismo procedimiento para construir de forma recursiva un nuevo tipo de enlace asociado a fracciones continuas infinitas. Supongamos que tenemos la fracción infinita  $[a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$ , y consideremos los convergentes  $[a_1]$ ,  $[a_1, a_2]$ ,  $[a_1, a_2, a_3]$ ,  $\dots$ , cada uno de las cuales corresponde a un enlace racional. La idea es seguir el ejemplo de la figura 16, con el fin de ir comprimiendo el enlace a medida que el número de tangles aumenta.

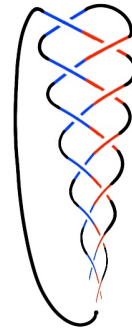
Siguiendo entonces esta construcción, obtenemos un enlace, posiblemente salvaje en un punto  $p$ . Para probar formalmente que es salvaje en  $p$  basta estudiar el índice de penetración, que es mayor que 3. A los objetos construidos por este método los llamaremos *nudos irracionales*, pues por la observación anterior, vienen caracterizados por los números irracionales. Un detalle técnico importante tiene que ver con la definición misma, ya que al ir tomando la sucesión de enlaces racionales que se van formando con los convergentes, a veces obtenemos nudos y otras enlaces de dos componentes. Esto se puede formalizar tomando solo la subsucesión de enlaces que sean nudos. Como decimos, esto es un trabajo preliminar que se debe formalizar.

**Ejemplo 1:** Como primer ejemplo, tomemos la fracción continua de  $e$ ,  $[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 8, \dots]$ , que se puede abreviar usando notación periódica como  $e = [2, \overline{1, 2p}, \overline{1}]$  donde  $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ , ver [8] para más información sobre fracciones continuas. La alta simetría de los términos de esta fracción continua, nos permite ver fácilmente cómo dibujar a  $e$  como un enlace irracional. Consideremos la figura 18, en donde podemos ver algunas aproximaciones a  $e$  en fracciones continuas finitas de la forma  $[2, 1, \dots, 2p]$  para  $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ ; si consideramos entonces el límite de esta sucesión de enlaces y lo comprimimos en su

extremo tal y como se describió anteriormente, obtendremos el tangle irracional asociado a  $e$ .



**Figura 16.** Enlace irracional



**Figura 17.** Tangle áureo

El grupo fundamental de los enlaces racionales, que son enlaces de dos puentes, ha sido estudiado extensivamente, ver por ejemplo [23]. Se sabe que en el caso de un nudo racional asociado al racional  $p/q$ , su grupo fundamental admite una presentación de la forma

$$G = \langle a, b \mid aw = wb \rangle$$

donde  $a$  y  $b$  son generadores y  $w$  es una palabra que depende de  $a$  y  $b$  y que crece a medida que aumentamos el número de cruces y por tanto el número de términos en la fracción continua asociada. Por ejemplo, para el nudo racional  $5/3 = [1, 1, 1, 1]$ , que es uno de los convergentes del enlace áureo de la figura 17, la palabra  $w$  es  $ba^{-1}b^{-1}a$ .

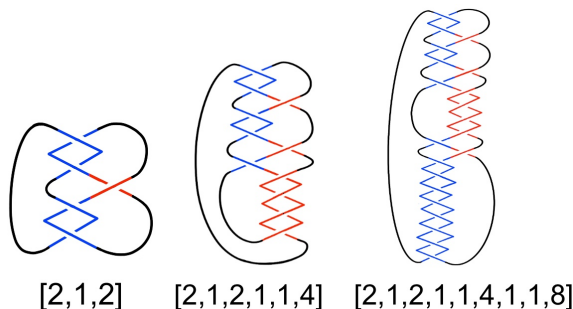
Ahora, como el tangle irracional  $e$  se puede ver como el límite de una sucesión de enlaces racionales, los cuales van creciendo en la cantidad de cruces que los conforman, dado cualquier real  $M$  siempre podremos encontrar un enlace racional en la sucesión, de tal forma que la relación asociada a su grupo fundamental tenga longitud mayor que  $M$ , esto da la idea de que  $\pi(e)$  está formado por dos generadores y una relación de longitud infinita, i.e.,  $\pi(e)$  sería el grupo libre en dos generadores. Esto se resume en la siguiente conjetura:

**Conjetura:** Sea  $\pi(e)$  el grupo fundamental del complemento del enlace irracional asociado a  $e$ , entonces  $\pi(e) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 2:** Aunque ya describimos cómo construir cualquier enlace irracional, existen algunos de particular interés por la forma en la cual se construyen,  $e$  fue de particular interés ya que su fracción continua presenta una simetría interesante, cosa que no ocurre por ejemplo con  $\pi$ , cuya fracción continua es  $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$ . Es por esto que

resulta evidentemente práctico utilizar números cuya fracción continua presente algún nivel de periodicidad. Se sabe que un número real tiene fracción continua periódica si y solo si es solución de una ecuación cuadrática de coeficientes enteros, ver [8], por ejemplo  $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$  y aún mas interesante el número áureo  $\phi = [\overline{1}]$ , un enlace considerablemente fácil de visualizar por medio de límites de enlaces racionales, como se ve en la figura 17. Además incentivados por la conjetura del ejemplo 1, esta se puede generalizar a cualquier número irracional por el mismo argumento:

**Conjetura:** Sea  $\alpha$  un número irracional, entonces  $\pi(\alpha)$ , el grupo fundamental del enlace irracional asociado, cumple que  $\pi(\alpha) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .



**Figura 18.** Primeras aproximaciones de  $e$

## 5. Actualidad

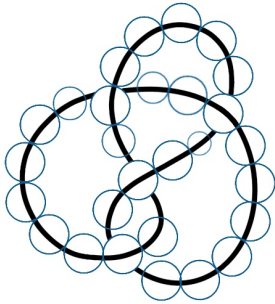
En este artículo nos concentramos en estudiar el primer ejemplo de nudo salvaje y en hablar de aspectos muy clásicos de la teoría de nudos salvajes e hicimos mención de la relación de nudos salvajes con otras áreas de las matemáticas. Queremos concluir el artículo mencionando brevemente dos desarrollos de la teoría de mucha actualidad: la relación con los grupos kleinianos y el estudio de 3-variedades abiertas.

Tomemos el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ , y definamos  $\Gamma$  como un grupo kleiniano, es decir,  $\Gamma$  es un subgrupo discreto del conjunto de isometrías de  $\mathbb{H}^3$  que preservan la orientación, y donde el conjunto de puntos donde  $\Gamma$  actúa de forma discontinua es no vacío. Estos grupos por sí solos representan un área de estudio muy extensa, pero solo nos interesa en el momento un único concepto, el conjunto límite [18], el cual es un conjunto que se le puede asociar a todo grupo kleiniano, y presenta en muchos casos un comportamiento fractal.

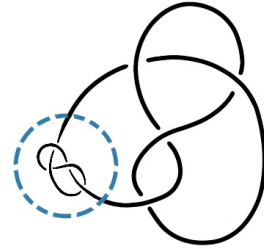
Hinojosa, Verjovsky y Boege [13], han dedicado tiempo a estudiar cierta relación existente entre los grupos kleinianos y los nudos salvajes, la idea es la siguiente: comenzamos fijando un nudo manso  $K$  arbitrario, y asociado a este, un collar de perlas [12], entendido como una familia de esferas tangentes entre si, cuya unión encierra al nudo; por ejemplo, en la figura 19 se muestra un collar de perlas asociado al nudo del ocho.

Al considerar las inversiones sobre cada una de las esferas, ver figura 20, se tiene que estas forman un grupo, de hecho un grupo kleiniano, y por lo tanto, se le puede asociar un





**Figura 19.** Collar subordinado al 8



**Figura 20.** Reflexión sobre una esfera

conjunto límite, que en este caso es un nudo, y más aún, un nudo salvaje, en donde cada punto es un punto singular [12], en la figura 4 podemos apreciar este proceso en varias esferas a la vez. Además de esto, para dos nudos mansos no equivalentes, los nudos salvajes construidos con este método, tampoco son equivalentes, por lo tanto, a cada nudo manso se le puede asociar un nudo salvaje. Existen nudos salvajes que no se pueden obtener por este método, como el obtenido del arco de Artin y Fox en el ejemplo 1 al cerrar sus extremos. Esta observación reafirma nuevamente la idea de Milnor de que existen más nudos salvajes que mansos [19], afirmación que justificó utilizando otros conceptos.

Tomemos ahora el caso de la clasificación de las 3-variedades, que ha sido históricamente uno de los problemas más relevantes de la topología en bajas dimensiones, en donde el estudio de los nudos permitió grandes avances en esta teoría, por ejemplo, en 1976, Hilden y Montesinos probaron un teorema muy relevante en la teoría de cubiertas ramificadas de Fox, y es que *toda 3-variedad cerrada, conexa y orientable se puede ver como una cubierta 3 a 1 ramificada sobre un nudo*, ver [20],[11]. De hecho, se tiene que el nudo en consideración admite una serie de movimientos que pueden modificarlo continuamente hasta transformarlo en un nudo salvaje, todo esto sin modificar la 3-variedad inicial, en otras palabras, cuando tenemos una 3-variedad cerrada, conexa y orientable, podemos verla como una cubierta ramificada sobre un nudo salvaje. Recientemente, Montesinos mostró que toda 3-variedad orientable se puede ver como una cubierta ramificada sobre un conjunto que es manso en un subconjunto denso [21], abarcando así tanto 3-variedades cerradas como las 3-variedades abiertas.

### Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín y a COLCIENCIAS por su apoyo parcial mediante el proyecto FP44842-013-2018 del Fondo Nacional de Financiamiento para la Ciencia, la Tecnología y la Innovación.

### Referencias

- [1] Adams, C. C., *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, Freeman and Co., New York, 1994.
- [2] Arroyo A., Othoniel J., Ruisánchez J. and Manjarrez, F., *Nudos Salvajes*, Edition Athoniel, (2017), ISBN:978-2-95611557-0-6.
- [3] Artin E. and Fox R., *Some Wild Cells and Spheres in three-Dimensional Space* , Annals of Mathematics, **49** (1948), 979-990.
- [4] Alford W. and Ball B., *Some Almost Polyhedral Wild Arcs*, Duke Mathematical Journal,**30** (1963), 33-38.
- [5] Bing R. H., *The geometric topology of 3-manifolds*, Colloquium Publications, (1983).
- [6] Bing R. H., *Locally Tame Sets are Tame*, Annals of Mathematics, **59** 1,(1954), 145-158.
- [7] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, 2 ed, Walterde Gruyter, New York, NY, 2003.
- [8] Burton D., *Elementary Number Theory*, 7 ed., Mcgraw-Hill, 2011.
- [9] Conway J. H., *An Enumeration of Knots and Links, and Some of Their Algebraic Properties*, Computational Problems in Abstract Algebra. Oxford, England: Pergamon Press, (1970), 329-358.
- [10] Ghys E. and Leys J., *Lorenz and modular flows: a visual introduction*, (2006).
- [11] Hilden, H. M. *Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of  $S^3$* , Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 1243–1244.
- [12] Hinojosa G., *Wild Knots as limit sets of Kleinian Groups*, Contemporary Mathematics, **389**, (2005).
- [13] Hinojosa G., Verjovsky A. and Boege M., *Wild knots in higher dimensions as limit sets of kleinian groups*, Contemporary Mathematics, **13**(11) (2009).
- [14] Kauffman L. and Lambropoulou S., *On the classification of rational tangles*, Advances in Applied Mathematics, **33**(2) (2004), 199-237.
- [15] Kauffman L. and Lambropoulou S., *On the Classification of Rational Knots*, L' Enseign. Math., **49**(3-4) (2003), 357-410.
- [16] Kawauchi A. and Yanagimoto T., *Teaching and Learning of Knot Theory in School Mathematics*, Springer, 2012.
- [17] Lomonaco Jr. S., *Uncountably Many Mildly Wild Non-Wilder Arcs*, Proceedings of the American Mathematical Society, **19**(4) (1968), 895-898.
- [18] Maskit B., *Kleinian Groups*, Springer Verlag, (1978).
- [19] Milnor J., *Most knots are wild*, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences , **54**(3) (1964), 335-338.
- [20] Montesinos J. M., *A representation of closed orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of  $S^3$* , Bull. Amer.Math. Soc. **80** (1974), 845–846.

- [21] Montesinos J. M., *Representing open 3-manifolds as 3-folds branched coverings*, Revista Colombiana de Matemáticas, 15(2) (2002), 533-542.
- [22] Murasugi, K. *Knot theory and its applications*, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [23] Riley, R., *Parabolic representations of knot groups I*, Proc. London Math. Soc. **24**(3) (1972), 217-242.
- [24] Toro M. M., *Equivalence of rational links and 2-bridge links revisited*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 24, No. 3 (2015) 1550015 (17 pages).
- [25] Turner, J. C. and van de Griend, P. C. eds, *History and Science of Knots*, Series of Knots and Everything, Vol. 11, World Scientific, Singapur, 1996.
- [26] Zapata S., *Grupos Kleinianos y Nudos salvajes*, tesis de pregrado, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, (2019).
- [27] <https://imaginary.org/es/node/920>
- [28] <http://paginas.matcuer.unam.mx/aubinarroyo/nudossalvajes/>
- [29] <https://www.cronista.com/clase/checklist/Nudos-salvajes-una-teoria-matematica-aplicada-al-arte-20190715-0005.html>
- [30] <https://www.youtube.com/watch?v=wJhht6di02E>

Recibido el 14 mayo de 2020. Aceptado para publicación el 30 de julio de 2020

SEBASTIAN ZAPATA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
MEDELLÍN, COLOMBIA  
e-mail: sezapatare@unal.edu.co

MARGARITA TORO  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
MEDELLÍN, COLOMBIA  
e-mail: mmtoro@unal.edu.co