Lecturas Matemáticas
Volumen **41** (1) (2020), páginas 21-40
ISSN 0120-1980

La convergencia de series en un espacio de Banach

Series convergence in Banach spaces

Josefina Alvarez

New Mexico State University, EEUU

Resumen. Este artículo considera, desde un punto de vista histórico, varias formas de convergencia de series en un espacio de Banach, analizando las relaciones que hay entre ellas y el papel que juega la completitud secuencial del espacio.

***Palabras clave*:** Series convergentes, espacios de Banach.

Abstract. This article considers, from a historical point of view, several types of convergence, for series in a Banach space, analyzing the relations between them and the role played by the sequential completeness of the space.

***Key words*:** Convergent series, Banach spaces.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 40-03, 40A05.

1. Introducción

Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos reales, el estudio de su convergencia aparece en la mayoría de los libros de introducción al análisis (ver, por ejemplo, [15], capítulo 3; [4], capítulo 4). También es usual incluir en tales libros los conceptos de convergencia absoluta y convergencia incondicional. El objeto principal de este artículo es el estudiar estos y otros conceptos de convergencia en un espacio de Banach, que siempre supondremos real. Veremos qué relaciones hay entre varias formas de convergencia y qué papel juega la completitud secuencial del espacio. Además, pondremos cuidado en mencionar numerosos puntos históricos de interés.

Nuestra exposición se inicia con una sección dedicada a definir varias formas de convergencia de series en un espacio lineal normado. En la siguiente sección vemos qué relaciones hay entre algunas de esas formas, en el caso de series con términos reales.

Dedicamos la cuarta sección a estudiar varias formas de convergencia para series en un espacio de Banach. En la quinta y última sección, consideramos series en un espacio lineal normado, sin suponer que es de Banach, viendo algunos resultados positivos y también algunos negativos. Así ilustramos la importancia, o no, de la completitud secuencial del espacio. Nuestra exposición termina con una lista de referencias, que permitirá profundizar los temas que aquí consideramos.

2. Donde definimos varias formas de convergencia

Sea X un espacio lineal normado que, para fijar ideas, siempre supondremos real y sea $\|\cdot\|$ la norma en X. Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos x_j en X, comenzamos por recordar varias formas de convergencia.

Definición 1. *La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge, a un valor $x \in X$ llamado suma de la serie, si la sucesión de sus sumas parciales converge a x. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N = N_\varepsilon \geq 1$ tal que*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x \right\| < \varepsilon, \tag{1}$$

para todo $n \geq N$. Si no existe $x \in X$ satisfaciendo (1), se dice que la serie no converge, o que diverge.

La definición de sucesión convergente, en una forma equivalente, fue dada por John Wallis (1616-1703) en 1655 ([23], pág. 16).

Lema 1. *Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge, su suma x es única.*

Demostración. Si existen $x, y \in X$ satisfaciendo (1), dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\|x - y\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - x \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - y \right\| < 2\varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{R}$ es arquimediano (ver, por ejemplo, [4], pág. 17, teorema 1) o, en otras palabras, como no hay en $\mathbb{R}$ infinitesimales distintos de cero, concluímos que $\|x - y\| = 0$, o $x = y$.

Esto completa la prueba del lema. $\square$

De acuerdo con ([23], pág. 16), la expresión "serie convergente" se debe al matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien comenzó a usarla en 1668. En cuanto a la expresión "serie divergente", la misma referencia afirma que Nicolaus (I) Bernoulli (1687-1759) la formuló en 1713. La definición formal de serie convergente, y el criterio ahora llamado de Cauchy, aparecen en el *Cours d'Analyse*, publicado por Augustin L. Cauchy (1789-1857) en 1821.

Definición 2. *La serie* $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge absolutamente si la serie de términos reales* $\sum_{j\geq 1} \|x_j\|$ *converge.*

Definición 3. *La serie* $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge incondicionalmente a* $x \in X$*, si la serie* $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$*converge a* x*, para cada biyección* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, donde* $\mathbb{N}$ *indica el conjunto* $\{1, 2, ...\}$ *de los números naturales.*

La serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ *se llama un reordenamiento, o un arreglo, de la serie original* $\sum_{j\geq 1} x_j$*.*

Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge a* $x \in X$*, pero existe al menos una biyección* σ *tal que la serie* $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ *no converge a* x*, se dice que la serie* $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge condicionalmente.*

Observemos que convergencia incondicional implica convergencia. Esto se ve tomando la biyección identidad. Como consecuencia, el valor x en la definición anterior es único. Cuando la serie converge condicionalmente, hay que tener cuidado en cómo se ordenan los términos de la serie. Esto adquiere importancia, por ejemplo, cuando se quiere multiplicar dos series (ver, por ejemplo, [15], págs. 72-75).

Definición 4. *La serie* $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge por subseries, si para cada subsucesión* $\{x_{j_k}\}_{k\geq 1}$ *de* $\{x_j\}_{j\geq 1}$*, la serie* $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ *converge.*

Recordemos que $\{x_{j_k}\}_{k\geq 1}$ es una subsucesión de $\{x_j\}_{j\geq 1}$ si la función $k \to j_k$, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, es estrictamente creciente.

Lema 2. *En la definición anterior, la suma de cada subserie es única.*

Demostración. Fijada la subserie $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$, si existen $x, y \in X$ tal que $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ converge a x y también a y, el lema 1 implica que $x = y$.

Esto completa la prueba del lema. □

Finalmente,

Definición 5. *La familia* $\{x_j\}_{j\geq 1}$ *es sumable, con suma* $x \in X$*, si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un subconjunto finito* F_ε *de* $\mathbb{N}$ *tal que*

$$\left\| \sum_{j\in F} x_j - x \right\| < \varepsilon, \tag{2}$$

para todo conjunto finito F *tal que* $F_\varepsilon \subseteq F \subset \mathbb{N}$*.*

Lema 3. *Si la familia* $\{x_j\}_{j\geq 1}$ *es sumable, su suma* x *es única.*

Demostración. Si existen $x, y \in X$ satisfaciendo (2), dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - y\| \leq \left\| \sum_{j\in F_\varepsilon} x_j - x \right\| + \left\| \sum_{j\in F_\varepsilon} x_j - y \right\| < 2\varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como en el caso del lema 1, concluímos que $x = y$.

Esto completa la prueba del lema. □

Aunque en nuestra exposición trabajaremos simplemente con la definición 5, digamos que sumabilidad es la existencia del límite de las sumas $\sum_{j\in F} x_j$ respecto a los subconjuntos finitos F de $\mathbb{N}$, ordenados, o dirigidos, por inclusión. Éste es el llamado límite de Moore y Smith (ver, por ejemplo, [8], capítulo 2; [17]), definido por los matemáticos Eliakin H. Moore (1862-1932) y Herman L. Smith (1892-1950), en [9]. Esta noción de límite es la que se usa, cuando se quiere describir con precisión la existencia del límite de las sumas de Riemann (ver, por ejemplo, [1], sección 2). Por supuesto, la noción de sumabilidad puede definirse para una familia $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, donde Λ es un conjunto arbitrario. Aquí nos limitaremos al caso de familias numerables $\{x_j\}_{j\geq 1}$, es decir al caso $\Lambda = \mathbb{N}$.

Observemos que la definición de sumabilidad no menciona ninguna ordenación en el índice j tomando valores en F. Así, se puede pensar que la sumabilidad es una forma “incondicional” de convergencia. Es lo que Pete Clark llama “unordered summation” (ver [3], pág. 299).

3. Algunos resultados para series de términos reales

En esta sección, supondremos que X es el espacio $\mathbb{R}$ de los números reales y enunciaremos algunos de los resultados que se conocen en este caso. Esto le dará un contexto a las relaciones que queremos estudiar, en el caso de un espacio de Banach.

Proposición 1. *(ver, por ejemplo, [4], pág. 45, teorema 21) Si la serie de términos reales $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente, cada reordenamiento también converge absolutamente, e incondicionalmente a un cierto $x \in X$. En particular, convergencia absoluta implica convergencia.*

El siguiente resultado provee una definición alternativa de convergencia absoluta en el caso de series de términos reales.

Proposición 2. *Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie converge absolutamente.*
2. *Para cada sucesión $\{\epsilon_j\}_{j\geq 1}$ tal que $\epsilon_j = 1$ o -1, la serie $\sum_{j\geq 1} \epsilon_j x_j$ converge.*

Demostración. Para probar que 1) implica 2), sólo tenemos que observar que $|\epsilon_j x_j| = |x_j|$ y usar la proposición 1.

Si suponemos que 2) se cumple, elegimos la sucesión $\{\epsilon_j\}_{j\geq 1}$ de la siguiente manera:

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \geq 0 \\ -1 & \text{si } x_j < 0 \end{cases} .$$

Entonces, $\sum_{j\geq 1} \epsilon_j x_j = \sum_{j\geq 1} |x_j|$, lo cual prueba que la serie converge absolutamente.

Esto completa la prueba de la proposición. □

El matemático Gustav L. Dirichlet (1805-1859), demostró en 1837 que si una serie de términos reales converge absolutamente, todos sus reordenamientos convergen, a una misma suma ([6], pág. 192). Aunque no parece haber en la literatura una mención específica de cuándo y quién introdujo las nociones de convergencia absoluta y convergencia incondicional, el resultado de Dirichlet indica que ambas ya estaban siendo estudiadas en los años 1830 y pico.

Teorema 1. *(ver, por ejemplo, [15], pág. 76, teorema 3.54) Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales converge, pero no absolutamente, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un reordenamiento $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ que converge a y. Además, existen reordenamientos que divergen.*

Este resultado se debe a Bernhard Riemann (1826-1866), quien lo incluyó en su tesis de habilitación, defendida en Göttingen en 1854 ([6], pág. 192). A partir de este resultado, podemos decir lo siguiente:

Corolario 1. *Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, si*

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x \textit{ es la suma de una reordenación } \sum_{j\geq 1} x_{\sigma(j)} \right\},$$

entonces, $\mathcal{S}$ es, o el conjunto vacío, o un número, o $\mathbb{R}$.

Hay extensiones muy interesantes de este resultado, por ejemplo el teorema de Levy y Steinitz [14].

Como consecuencia de la proposición 1, podemos decir que una serie que converge, pero no absolutamente, converge condicionalmente.

De la proposición 1 y el teorema 1, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2. *La serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales converge absolutamente si y sólo si converge incondicionalmente.*

Proposición 3. *(ver, por ejemplo, [22], pág. 7, ejercicio 4) Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie converge por subseries.*
2. *La serie converge absolutamente.*

Uniendo el corolario 2 a la proposición 3, podemos enunciar el siguiente resultado:

Corolario 3. *Dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ de términos reales, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie converge absolutamente.*
2. *La serie converge incondicionalmente.*

3. *La serie converge por subseries.*

Como consecuencia de este corolario, podemos ver a 2) en la proposición 2 como una definición equivalente de convergencia incondicional.

En cuanto al concepto de sumabilidad, lo consideramos en la siguiente sección.

4. El caso de un espacio de Banach

Comencemos diciendo que el concepto de convergencia absoluta provee una definición equivalente de la completitud secuencial de un espacio lineal normado. En efecto,

Proposición 4. *(ver, por ejemplo, [22], pág. 167, teorema 4) Dado un espacio lineal normado X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El espacio X es un espacio de Banach.*
2. *Toda serie con términos en X que es absolutamente convergente, es también convergente.*

Probaremos ahora la siguiente proposición, que extiende a un espacio de Banach X la proposición 1 enunciada en la sección anterior.

Proposición 5. *Sea X un espacio de Banach. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos en X converge absolutamente, cada reordenamiento también converge absolutamente, e incondicionalmente a un cierto $x \in X$. En particular, convergencia absoluta implica convergencia.*

Demostración. Como consecuencia de la proposición 4, la desigualdad

$$\left\| \sum_{j=n}^{n+p} x_j \right\| \leq \sum_{j=n}^{n+p} \|x_j\|$$

muestra que la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge en X a un cierto $x \in X$.

Si consideramos un reordenamiento $k \to \sigma(k)$ de $\mathbb{N}$ y si fijamos $N_n \geq 1$ tal que todos los términos en la suma parcial $\sum_{1\leq k\leq n} x_{\sigma(k)}$ aparecen en la suma parcial $\sum_{1\leq j\leq N_n} x_j$, tenemos,

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| x_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{j=1}^{N_n} \|x_j\| \leq \sum_{j\geq 1} \|x_j\| .$$

Como toda sucesión de números reales acotada y no decreciente converge (ver, por ejemplo, [4], pág. 28, teorema 11), la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge absolutamente. Por lo tanto, volviendo a usar la proposicion 5, resulta que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ converge en X, a un cierto $y \in X$. Afirmamos que $x = y$.

Para verlo, dado $\varepsilon > 0$ fijamos $N = N_\varepsilon \geq 1$ tal que $\left\|\sum_{1\leq j\leq N} x_j - x\right\| < \varepsilon$ y $\sum_{j\geq N+1}\|x_j\| < \varepsilon$. Además, podemos seleccionar una suma parcial

$$\sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)}$$

tal que todos los términos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ aparecen en ella. En efecto, como σ es una biyección, deben de existir $n_1, .., n_N$ tal que $\sigma(n_j) = j$, para $1 \leq j \leq N$. Reordenando los valores n_j, si es necesario, podemos suponer que $n_1 < ... < n_N$. Finalmente, agregamos a $\{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_N)\}$, si es necesario, todos los valores intermedios, a fin de obtener

$$\{1, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n_N)\}.$$

Si elegimos $M \geq n_N$, podemos asegurarnos que también

$$\left\|\sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} - y\right\| < \varepsilon.$$

Así,

$$\begin{aligned}\|x-y\| \leq\ & \underbrace{\left\|x - \sum_{j=1}^{N} x_j\right\|}_{\text{(i)}} + \underbrace{\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j - \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)}\right\|}_{\text{(ii)}} \\ & + \underbrace{\left\|\sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} - y\right\|}_{\text{(iii)}}.\end{aligned}$$

La elección de N implica que el término (i) es $< \varepsilon$. En cuanto a (ii),

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j - \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{\text{ciertos } \sigma(k)\geq N+1} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{j\geq N+1} \|x_j\| < \varepsilon.$$

Finalmente, por la manera en que hemos elegido M, (iii) es también $< \varepsilon$. Es decir,

$$0 \leq \|x-y\| < 3\varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Concluímos entonces que $x = y$.

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Es natural preguntarse si la recíproca de esta proposición es válida. Si lo fuera, podríamos decir que, en cualquier espacio de Banach, las series que convergen incondicionalmente son exactamente las series que convergen absolutamente. Stefan Banach (1892-1945) formuló este problema en ([2], pág. 240). Por cierto, Banach se refirió a un espacio normado secuencialmente completo. Fue Maurice Fréchet (1878-1973) quien dio a este tipo de espacio el nombre de Banach (ver la biografía de Banach en [12]).

El problema propuesto por Banach estuvo abierto casi veinte años, hasta que fue resuelto por Aryev Dvoretsky (1916-2008) y Ambrose Rogers (1920-2005) en un famoso artículo [5]. El resultado principal de este artículo, conocido como el teorema de Dvoretsky y Rogers, dice lo siguiente:

Teorema 2. *([5], teorema 1) Si X es un espacio de Banach, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Las series incondicionalmente convergentes en X son exactamente aquellas series que convergen absolutamente en X.*
2. *El espacio X tiene dimensión lineal finita.*

Recordemos que la dimensión lineal es el cardinal común a toda base de Hamel (ver, por ejemplo, [11], pág. 183, capítulo 4, sección 7). Es decir, a toda base de X como espacio lineal.

La implicación 2) $\Rightarrow$ 1) resulta de observar que el corolario 2 se extiende sin dificultad al caso de un espacio de dimensión lineal finita.

La implicación 1) $\Rightarrow$ 2) es un resultado muy profundo, que ha inspirado nuevos problemas y resultados e, indirectamente, ha originado una nueva rama del Análisis Funcional, llamada Análisis Funcional Geométrico (ver, por ejemplo, la biografía de Dvoretsky en [12]). La demostración original de 1) $\Rightarrow$ 2) es de una naturaleza geométrica. En ([21], pág. 440, teorema 1), se puede ver otra demostración, basada en la teoría de los operadores que suman absolutamente (ver [21], pág. 431, capítulo IV, sección 30). En nuestra exposición, nos limitaremos a ilustrar el teorema de Dvoretsky y Rogers con algunos ejemplos.

Vamos a comenzar usando el contexto de un espacio de Hilbert (ver, por ejemplo, [11], pág. 272, capítulo 5, parte B) porque allí podemos construir ejemplos sencillos. Por consistencia, suponemos siempre que el espacio de Hilbert es real. Comenzamos dando el siguiente resultado:

Proposición 6. *Supongamos que H es un espacio de Hilbert en el que hay una familia ortonormal $\{x_j\}_{j\geq 1}$ que es infinita y numerable. Consideremos en H una serie de la forma $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$, donde $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión real. Entonces,*

1. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*
   a) *La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge.*
   b) *La serie real $\sum_{j\geq 1} \alpha_j^2$ converge.*
   c) *La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge incondicionalmente.*
2. *La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge absolutamente si y sólo si la serie real $\sum_{j\geq 1} |\alpha_j|$ converge.*

Demostración. Para probar 1), comenzamos suponiendo que la serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge, en H, a un cierto $x \in H$. Es decir, suponemos que existe el

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\|_H^2 = 0.$$

Por otra parte, usando la continuidad del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$,

$$\langle x_k, x \rangle_H = \langle x_k, \sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j \rangle_H = \sum_{j\geq 1} \alpha_j \langle x_k, x_j \rangle_H = \alpha_k,$$

para todo $k \geq 1$. Finalmente,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle x_k, x \rangle_H^2 \underset{\text{(i)}}{\leq} \|x\|_H^2\,,$$

para todo $n \geq 1$, donde la desigualdad (i) es la llamada desigualdad de Bessel. Esto muestra que la serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j^2$ converge.

Recíprocamente, si la serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j^2$ converge, podemos escribir

$$\left\| \sum_{j=n}^{n+m} \alpha_j x_j \right\|_H^2 = \sum_{j=n}^{n+m} \alpha_j^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

uniformemente en $m \geq 1$. Puesto que H es un espacio de Banach, resulta que la serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge.

Esto prueba que 1)a) y 1)b) son equivalentes.

Si suponemos que la serie real $\sum_{j\geq 1} \alpha_j^2$ converge, el corolario 3 nos dice que esta serie también converge incondicionalmente. Por lo tanto, dada una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum_{k\geq 1} \alpha_{\sigma(k)}^2$ converge, lo cual equivale a decir que la serie $\sum_{k\geq 1} \alpha_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)}$ converge. Sólo nos falta probar que converge a $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$. Veamos esto.

Dado $\varepsilon > 0$ fijamos $N = N_\varepsilon \geq 1$ tal que $\left\| \sum_{j\geq N+1} \alpha_j x_j \right\|_H < \varepsilon$ y $\sum_{j\geq N+1} \alpha_j^2 < \varepsilon^2$. Además, consideramos una suma parcial $\sum_{1\leq k\leq M} \alpha_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)}$ tal que todos los términos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ aparecen en ella y

$$\left\| \sum_{k=1}^{M} \alpha_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)} - y \right\|_H < \varepsilon.$$

Así,

$$\left\| \sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j - y \right\|_H \leq \underbrace{\left\| \sum_{j\geq N+1} \alpha_j x_j \right\|_H}_{\text{(i)}} + \underbrace{\left\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j - \sum_{k=1}^{M} \alpha_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)} \right\|_H}_{\text{(i)}}$$

$$+ \underbrace{\left\| \sum_{k=1}^{M} \alpha_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)} - y \right\|_H}_{\text{(iii)}} .$$

La elección de N implica que el término (i) es $< \varepsilon$. En cuanto a (ii),

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j - \sum_{k=1}^{M} \alpha_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)} \right\|_H^2 = \sum_{\text{ciertos } \sigma(k)\geq N+1} \alpha_{\sigma(k)}^2 \leq \sum_{j\geq N+1} \alpha_j^2 < \varepsilon^2.$$

Finalmente, por la manera en que hemos elegido M, (iii) es también $< \varepsilon$. Es decir,

$$0 \leq \left\| \sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j - y \right\|_H < 3\varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, lo cual muestra que 1)b) implica 1)c). Es claro que 1)c) implica 1)a). Esto concluye la prueba de 1).

La prueba de 2), es una consecuencia de la igualdad

$$\|\alpha_j x_j\|_H = |\alpha_j| .$$

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Observemos que la existencia de una familia ortonormal infinita en H implica que H es un espacio de dimensión lineal infinita (ver, por ejemplo, [11], pág. 306, teorema 5.17.3).

Recordemos que la condición "$\sum_{j\geq 1} \alpha_j^2$ converge" define l^2, un espacio de Hilbert de sucesiones, que es el espacio de Hilbert original, estudiado por David Hilbert (1862-1943) (ver la biografía de Hilbert en [12]).

En cuanto a la condición "$\sum_{j\geq 1} |\alpha_j|$ converge" define l^1, que es un espacio de Banach de sucesiones reales $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$.

En general, para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio l^p se define de la siguiente manera:

Definición 6. *Dado $1 \leq p < \infty$, l^p consiste de las sucesiones reales $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ para las cuales la serie $\sum_{j\geq 1} |\alpha_j|^p$ converge. Cuando $p = \infty$, l^∞ consiste de las sucesiones reales acotadas.*

Con la norma

$$\left\|\{\alpha_j\}_{j\geq 1}\right\|_{l^p} = \left(\sum_{j\geq 1} |\alpha_j|^p\right)^{1/p}$$

si p es finito y

$$\left\|\{\alpha_j\}_{j\geq 1}\right\|_{l^\infty} = \sup_{j\geq 1} |\alpha_j|$$

si $p = \infty$, l^p es un espacio de Banach (ver, por ejemplo, [22], pág. 207, capítulo 6, sección 6.1; pág. 218, capítulo 6, sección 6.2).

Si $1 \leq p < q \leq \infty$, se tiene la inclusión

$$l^p \subseteq l^q$$

(ver, por ejemplo, [22], pág. 20, proposición 7). Esta inclusión es estricta, como lo muestra la sucesión $\left\{\frac{1}{j^{1/p}}\right\}_{j\geq 1}$.

De estas observaciones y de la proposición 6 obtenemos de inmediato el resultado que sigue:

Corolario 4. *Supongamos que H es un espacio de Hilbert en el que hay una familia ortonormal $\{x_j\}_{j\geq 1}$ que es infinita y numerable. Consideremos en H una serie de la forma $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$, donde $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión real. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie $\sum_{j\geq 1} \alpha_j x_j$ converge incondicionalmente pero no absolutamente.*
2. *La sucesión $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ pertenece a l^2 pero no pertenece a l^1.*

Estos resultados nos llevan a considerar lo siguiente:

Ejemplo 1. *Sea $\left\{e^k\right\}_{k\geq 1}$ la familia ortonormal en l^2 definida, para cada $k \geq 1$, como*

$$e_j^k = \begin{cases} 1 & \textit{para } j = k \\ 0 & \textit{para } j \neq k \end{cases}. \tag{3}$$

Entonces, la serie

$$\sum_{k\geq 1} \frac{e^k}{k} \tag{4}$$

converge incondicionalmente en l^2, pero no converge absolutamente.

Es interesante observar que la misma serie (4) da un ejemplo en l^p para $1 < p \leq \infty$. En efecto, de la igualdad

$$\left\|\frac{e^k}{k}\right\|_{l^p} = \frac{1}{k},$$

es claro que la serie (4) no converge absolutamente en l^p, para $1 \leq p \leq \infty$.

Para probar la convergencia incondicional, comenzamos fijando una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *arbitraria y un valor de* p, $1 < p < \infty$. *Afirmamos que la serie* $\sum_{k\geq 1} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)}$ *converge a* $x = \left\{\frac{1}{j}\right\}_{j\geq 1}$. *En efecto,*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \\ -\frac{1}{j} & \text{si } j \notin \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \end{cases}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right\|_{l^p}^p = \sum_{j\notin\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}} \frac{1}{j^p}.$$

Como $p > 1$, *dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $M = M_\varepsilon \geq 1$ *tal que*

$$\sum_{j\geq M+1} \frac{1}{j^p} < \varepsilon^p. \tag{5}$$

Como en la prueba de la proposición 5, existe $N = N_M \geq 1$ *tal que*

$$\{1, \ldots, M\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\},$$

para $n \geq N$. *Es decir, para esos valores de* n,

$$\begin{aligned} \mathbb{N}\backslash\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} &\subseteq \mathbb{N}\backslash\{1, \ldots, M\} \\ &= \{j \in \mathbb{N} : j \geq M+1\}, \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} - x\right\|_{l^p}^p < \varepsilon^p$$

para todo $n \geq N$.

Cuentas muy similares permiten demostrar que la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{e^{\sigma(k)}}{\sigma(k)}$ *converge a* x *en* l^∞. *Más aún, los términos de la serie y la sucesión* x *pertenecen al espacio de Banach* c_0 *de las sucesiones reales que convergen a cero, con la norma* $\|\cdot\|_{l^\infty}$ *(ver, por ejemplo, [22], pág. 169, ejemplo 11).*

En cuanto al caso $p = 1$, *el ejemplo que hemos dado no funciona porque la estimación (5) no es cierta para* $p = 1$. *En [18] se puede ver un ejemplo en* l^1, *de una complejidad notable, sobre el cual no diremos nada más.*

Continuando con nuestra exposición, mencionemos que en un artículo publicado en *Studia Mathematica* en 1933, Władysław Orlicz (1903-1990) consideró, en un espacio de Banach, la noción de convergencia incondicional y definió la noción de convergencia por subseries, probando la equivalencia de ambas.

En 1938, Billy J. Pettis (1913-1979) definió en [13] la siguiente versión débil de convergencia por subseries:

Definición 7. *Dado un espacio de Banach* X *y dada una serie* $\sum_{j\geq 1} x_j$ *con términos en* X*, la serie es débilmente convergente por subseries, si para cada subsucesión* $\{x_{j_k}\}_{k\geq 1}$ *de* $\{x_j\}_{j\geq 1}$*la serie* $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ *converge débilmente. Es decir, existe* $x \in X$ *tal que la serie* $\sum_{k\geq 1} l\left(x_{j_k}\right)$ *converge a* $l\left(x\right)$*, para cada funcional lineal y continua* l *en el dual topológico* X' *de* X*.*

Lema 4. *Si la serie* $\sum_{j\geq 1} x_j$ *converge débilmente por subseries, la suma débil de cada subserie es única.*

Demostración. Fijada una subserie $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ arbitraria, si existen $x, y \in X$ tal que $\sum_{k\geq 1} x_{j_k}$ converge débilmente a x y también a y, esto significa que la serie $\sum_{k\geq 1} l\left(x_{j_k}\right)$ converge a $l\left(x\right)$ y a $l\left(y\right)$, para cada $l \in X'$.

De acuerdo con el lema 1, debe ser $l\left(x-y\right) = 0$ para toda $l \in X'$. Como consecuencia del teorema de Hahn y Banach, existe $l \in X'$ tal que $\left\|l\right\|_{X'} = 1$ y $l\left(x-y\right) = \left\|x-y\right\|$ (ver, por ejemplo, [22], pág. 189, corolario 4). Es decir, $x = y$.

Esto completa la demostración del lema. □

Pettis probó, en el mismo artículo [13] (ver pág. 282, teorema 2.32), que la convergencia por subseries débil es equivalente a la convergencia por subseries. Además probó (ver pág. 281, lema 2.31), que la convergencia por subseries débil implica la siguiente condición:

Para cada funcional lineal y continua l en el dual de X, existe el

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j\geq k} l\left(x_j\right) = 0, \tag{6}$$

uniformemente con respecto a l para $\left\|l\right\|_{X'} = 1$. Es decir,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{l\in X', \left\|l\right\|_{X'}=1} \sum_{j\geq k} l\left(x_j\right) = 0.$$

Combinando los resultados de Orlicz y Pettis, se obtiene la equivalencia, en un espacio de Banach, de la convergencia incondicional, la convergencia por subseries y la convergencia por subseries débil.

Llegamos ahora al concepto de sumabilidad (ver la definición 5), el cual fue introducido por Moore en 1939 ([10], pág. 63). Moore probó, en ese artículo, la equivalencia de la sumabilidad, de la convergencia absoluta, y de la convergencia incondicional, en el caso en que el espacio es el espacio real $\mathbb{R}$, el espacio complejo $\mathbb{C}$, o el espacio de los cuaterniones.

Basándose en los resultados de Orlicz, Pettis y Moore, Teophil H. Hildebrandt (1888-1980) consideró en [7] las condiciones de convergencia que hemos mencionado, probando el siguiente resultado:

Teorema 3. *Dado un espacio de Banach* X *y dada una serie* $\sum_{j\geq 1} x_j$ *con términos en* X*, los siguientes enunciados son equivalentes:*

A. *La serie converge incondicionalmente.*

B. *La serie converge por subseries.*

C. *La serie converge débilmente por subseries.*

D. *La serie satisface la condición (6).*

E. *La familia* $\{x_j\}_{j\geq 1}$ *es sumable.*

Por cierto, Hildebrandt afirma en su artículo (ver pág. 960), que de estas condiciones equivalentes, la condición de sumabilidad E es la más elegante.

Recordemos que los resultados de Orlicz y Pettis demuestran que A, B y C son equivalentes y que C implica D. Teniendo en cuenta esto, Hildebrandt observa que para probar el teorema 3, es suficiente probar las implicaciones D $\Rightarrow$ E $\Rightarrow$ A. Sin embargo, Hildebrandt prueba las equivalencias A $\Leftrightarrow$ E, B $\Leftrightarrow$ E, C $\Leftrightarrow$ E, y D $\Leftrightarrow$ E, pues, en su opinión, esta forma de demostración es más completa. Además, Hildebrandt la considera más elegante y más clara que la prueba circular A $\Rightarrow$ B $\Rightarrow$ C $\Rightarrow$ D $\Rightarrow$ E $\Rightarrow$ A.

Que A y E son equivalentes muestra que la sumabilidad es, en efecto, una forma "incondicional" de convergencia, como dijimos al final de la sección 2.

Combinando el teorema 3 con el lema 16.1 en ([16], pág. 458), obtenemos finalmente el siguiente resultado:

Teorema 4. *Dado un espacio de Banach X y dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos en X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie converge incondicionalmente.*
2. *Para cada sucesión $\{\epsilon_j\}_{j\geq 1}$ tal que $\epsilon_j = 1$ o -1, la serie $\sum_{j\geq 1} \epsilon_j x_j$ converge.*
3. *Para cada sucesión de términos reales $\{\beta_j\}_{j\geq 1}$ tal que $|\beta_j| \leq 1$ para $j \geq 1$, la serie $\sum_{j\geq 1} \beta_j x_j$ converge.*
4. *La serie converge por subseries.*
5. *La serie converge débilmente por subseries.*
6. *La serie satisface la condición (6).*
7. *La familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es sumable.*

Observemos, en particular, que 2) en el teorema 4, es la condición 2) en la proposición 2. El teorema 4 muestra, entre otras cosas, que 2) es equivalente a la convergencia incondicional de la serie. Por otra parte, el teorema de Dvoretsky y Rogers nos dice que esta condición 2) será equivalente a la convergencia absoluta, exactamente en los espacios de dimensión lineal finita. Lo mismo podemos decir de 3).

5. La importancia, o no, de ser completo

Para ilustrar la proposición 4, mostramos a continuación un ejemplo de un espacio linear normado, con una serie absolutamente convergente que no converge.

Ejemplo 2. *El espacio en cuestión será c_{00}, que es el espacio de las sucesiones reales $\{x_j\}_{j\geq 1}$ que tienen un número finito de términos distintos de cero. En c_{00} consideramos la norma del supremo $\|\cdot\|_{l^\infty}$.*

Si para cada $k \geq 1$, e^k es la sucesión en c_{00} definida en (3), la serie

$$\sum_{k\geq 1} \frac{e^k}{k^2}$$

converge absolutamente, puesto que

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\|e^k\|_{l^\infty}}{k^2} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2},$$

que es convergente. Sin embargo, la serie no converge en c_{00} con respecto a la norma $\|\cdot\|_{l^\infty}$. En efecto, supongamos que existe $e = \{e_j\}_{j\geq 1} \in c_{00}$ tal que $\sum_{k\geq 1} \frac{e^k}{k^2} = e$ en c_{00}. Para esa sucesión e particular, existe $M = M_e \geq 1$ tal que $e_j = 0$ para $j > M$. Es decir, para $j > M$,

$$\sum_{k\geq 1} \frac{e_j^k}{k^2} = 0,$$

lo cual no puede ser, debido a cómo hemos definido e_j^k.

En particular, este ejemplo muestra que c_{00} no es un espacio de Banach y que la proposición 1 no puede extenderse a cualquier espacio lineal normado.

Es natural preguntarse qué papel juega la completitud secuencial del espacio X en el teorema 4. Vamos a concluir nuestra exposición dando algunos comentarios sobre este punto. Comenzamos por el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. *Veremos que en el teorema 4, 1) no implica 4), en general, si no se supone que el espacio X es de Banach. Es decir, no siempre, en un espacio lineal normado, convergencia incondicional implica convergencia por subseries. Para ello, desarrollaremos en detalle el ejemplo sugerido en [19].*

Consideramos otra vez el espacio c_{00}, pero esta vez como subespacio de l^2.

Recordemos que dado un número real a, la notación $\lfloor a \rfloor$ indica el mayor número entero que es $\leq a$. Con esta notación, definimos en c_{00} la serie

$$\sum_{m\geq 2} (-1)^m \, 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor}, \tag{7}$$

donde $e^{\lfloor m/2 \rfloor}$ es la sucesión definida como en (3), para $k = \lfloor m/2 \rfloor$ y cada $m \geq 2$.

Observemos que si $m = 2j$ para $j \geq 1$,

$$(-1)^m \, 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} = 2^{-j} e^j, \tag{8}$$

mientras que si $m = 2j + 1$ para $j \geq 1$,

$$(-1)^m \, 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} = -2^{-j} e^j. \tag{9}$$

Es decir que la serie (7) converge absolutamente en l^2. De acuerdo con la proposición 5, la serie (7) converge incondicionalmente en l^2. De (8) y (9) concluímos que fijado $n \geq 2$,

$$\sum_{m=2}^{n} (-1)^m \, 2^{-\lfloor m/2 \rfloor} e^{\lfloor m/2 \rfloor} = \begin{cases} 2^{-l} e^l & \text{si } n \text{ es par, } n = 2l \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar, } n = 2l + 1 \end{cases},$$

para $l \geq 1$.

Usando otra vez la proposición 5, resulta que la serie (7) converge incondicionalmente a cero en l^2 y por lo tanto también en c_{00}.

Por otra parte, de (8) tenemos que la subserie

$$\sum_{j \geq 1} (-1)^{2j} \, 2^{-\lfloor 2j/2 \rfloor} e^{\lfloor 2j/2 \rfloor}$$

converge absolutamente y por lo tanto, de acuerdo a la proposición 5, converge en el espacio de Banach l^2. Sin embargo, la serie $\sum_{j \geq 1} 2^{-j} e^j$ no converge en c_{00}. El razonamiento es similar a lo dicho en el ejemplo 2. En efecto, supongamos que existe $e = \{e_l\}_{l \geq 1} \in c_{00}$ tal que $\sum_{j \geq 1} 2^{-j} e^j = e$, en c_{00}. Para esa sucesión en particular, existe $M = M_e \geq 1$ tal que $e_l = 0$ para $l > M$. Es decir,

$$\sum_{k \geq 1} 2^{-j} e_l^j = 0,$$

para $l > M$, lo cual no puede ser, debido a cómo hemos definido e_l^j. O sea que la serie (7) no es convergente por subseries, en c_{00}.

En cuanto a ejemplos de implicaciones que no necesitan la completitud secuencial del espacio, comenzamos por la más obvia, que es 4) $\Rightarrow$ 5). Es decir, la convergencia por subseries implica la convergencia por subseries débil. Por cierto, el interés de los resultados de Orlicz y Pettis es en la recíproca, 5) $\Rightarrow$ 4). O sea, convergencia por subseries débil implica convergencia por subseries. Este resultado sorprendente, conocido como teorema de Orlicz y Pettis, es cierto en cualquier espacio lineal normado (ver, por ejemplo, [21], pág. 221). En general, un teorema se llama de tipo Orlicz y Pettis, cuando asegura que la convergencia por subseries en una cierta topología, implica la convergencia por subseries, en una topología más fuerte (ver, por ejemplo, [21], pág. 242).

Como otro ejemplo, a continuación probaremos que la equivalencia 1) $\Leftrightarrow$ 7) en el teorema 4, es cierta en cualquier espacio lineal normado. Lo que haremos es reproducir, con todo detalle, la demostración esbozada en [7], de la equivalencia de A y E en el teorema 3. Así comprobamos que no usa la completitud secuencial de X.

Proposición 7. *Dado un espacio lineal normado X y dada una serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ con términos en X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie converge incondicionalmente en X.*
2. *La familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es sumable en X.*

Demostración. Comenzamos probando que 1) implica 2). Para ello suponemos que 2) no se cumple, es decir que la familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ no es sumable. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ no converge, podemos concluir que 1) no se cumple. Si la serie converge, digamos que converge a $x \in X$. Por hipótesis, la familia $\{x_j\}_{j\geq 1}$ no es sumable a x. Entonces debe de existir $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada subconjunto finito F de $\mathbb{N}$, existe un conjunto finito $\mathbb{N} \supset F' \supseteq F$ tal que

$$\left\| \sum_{j\in F'} x_j - x \right\| \geq \varepsilon_0. \tag{10}$$

Por otra parte, la convergencia de la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ a x, significa que existe $N = N_{\varepsilon_0} \geq 1$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x \right\| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \tag{11}$$

para todo $n \geq N$. A partir de esta información construíremos un reordenamiento de la serie que no converge a x. Esto mostrará que la serie no converge incondicionalmente, debido a la unicidad del límite.

De acuerdo con (11),

$$\left\| \sum\nolimits_{1\leq j\leq N} x_j - x \right\| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Para $F_1 = \{1, \ldots, N\}$, elegimos $F_1' \supseteq F_1$ satisfaciendo (10). Si $F_2 = \left\{1, \ldots, \text{máx}_{j\in F_1'}\right\}$,

$$\left\| \sum\nolimits_{j\in F_2} x_j - x \right\| < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

de acuerdo con (11).

Como en el primer paso, seleccionamos $F_2' \supseteq F_2$ satisfaciendo (10). Así siguiendo, obtenemos dos familias $\{F_s\}_{s\geq 1}$ y $\{F_s'\}_{s\geq 1}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ con $F_s' \supseteq F_s$, para todo $s \geq 1$. Como la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ no es sumable, este proceso no puede terminar. Es decir, que la familia $\{F_1, F_1' \backslash F_1, F_2' \backslash F_2, \ldots\}$ es una partición de $\mathbb{N}$.

Entonces, podemos definir una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ enumerando sucesivamente los elementos en los conjuntos $F_1, F_1' \backslash F_1, F_2' \backslash F_2, \ldots$.

Afirmamos que la serie $\sum_{k\geq 1} x_{\sigma(k)}$ así obtenida no converge en X. Para verlo, es suficiente probar que sus sumas parciales no forman una sucesión de Cauchy en X. Es decir, que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que dado $M \geq 1$, se pueden elegir $m = m_{M,\varepsilon_1} \geq M$ y $l = l_{M,\varepsilon_1} \geq 1$ tales que

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{m+l} x_{\sigma(k)} \right\| \geq \varepsilon_1. \tag{12}$$

En efecto, por la manera de construir los conjuntos F_s y F_s', podemos decir, para todo $s \geq 1$,

$$\left\| \sum_{j \in F_s' \setminus F_s} x_j \right\| \geq \left\| \sum_{j \in F_s'} x_j - x \right\| - \left\| \sum_{j \in F_s} x_j - x \right\| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Por otra parte, por la forma en que se definió σ y por ser σ una biyección, dado $M \geq 1$, deben de existir $m = m_{M,\varepsilon_0} \geq M$ y $l = l_{M,\varepsilon_0} \geq 1$ tales que $\{\sigma(m+1), \ldots, \sigma(m+l)\}$ $= F_s' \setminus F_s$ para algún $s \geq 1$. Es decir, que (12) se cumple para $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$. Así, 1) implica 2).

Recíprocamente, si suponemos que la familia $\{x_j\}_{j \geq 1}$ es sumable, por definición debe de existir un único $x \in X$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, hay un subconjunto finito F_ε de $\mathbb{N}$ con

$$\left\| \sum_{j \in F} x_j - x \right\| < \varepsilon,$$

para todo conjunto finito $\mathbb{N} \supset F \supseteq F_\varepsilon$.

Si fijamos una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, debe de existir $M = M_\varepsilon \geq 1$ tal que $\{\sigma(1), \ldots \sigma(M_\varepsilon)\} \supseteq F_\varepsilon$. Entonces, para cada $m \geq M$, tendremos

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - x \right\| < \varepsilon.$$

Esto muestra que la serie $\sum_{j \geq 1} x_j$ converge incondicionalmente. Así, concluimos la prueba de la proposición. $\square$

Creemos que es un ejercicio interesante el reescribir esta demostración usando el límite de Moore y Smith (ver, por ejemplo, [20]).

Además, de la misma manera que hemos probado la proposición 7, comprobando que la completitud secuencial de X no es necesaria, también se puede analizar la demostración de las otras implicaciones en los teoremas 3 y 4.

Finalmente, digamos que hay que tener en cuenta que, a veces, el trabajar en un espacio lineal normado que no es de Banach, puede hacernos perder ciertas propiedades de interés. Éste es el caso, por ejemplo, de la sumabilidad de cada subfamilia de una familia sumable (ver, por ejemplo, [20]).

Reconocimientos: Los datos biográficos sin referencias, han sido tomados de **[12].** Agradezco al revisor por notar un error, y por sugerir varios cambios que han mejorado la presentación.

Referencias

[1] J. Alvarez, C. Espinoza-Villalva y M. Guzmán-Partida "The integrating factor method in Banach spaces", *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, volumen 11, número 1, verano 2018, págs. 115-132, scma.maragheh.ac.ir/article_31559.html.

[2] S. Banach, *Théorie Des Opérations Linéaires*, Warsaw 1932.

[3] P. L. Clark, *Honors Calculus*, 2014, math.uga.edu/~pete/2400full.pdf.

[4] J. DePree y C. Swartz, *Introduction To Real Analysis*, John Wiley & Sons 1988.

[5] A. Dvoretsky y C. A. Rogers, Absolute and uncondicional convergence in normed linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 36 (1950) 192-197, http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1063160.

[6] E. Hairer y G. Wanner, *Analysis By Its History*, Springer 1996.

[7] T. H. Hildebrandt, Unconditional convergence in normed vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46 (1940) 959-962, www.ams.org/journals/bull/1940-46-12/S0002-9904-1940-07344-6/S0002-9904-1940-07344-6.pdf.

[8] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand 1955.

[9] E. H. Moore y H. L. Smith, A general theory of limits, *Amer. J. Math.* 44 (1922) 102-121, http://www.jstor.org/stable/pdf/2370388.pdf.

[10] E. H. Moore, General Analysis, *Memoirs Amer. Phil. Soc.*, volumen 1, parte 2 (1939).

[11] A. W. Naylor y G. R. Sell, *Linear Operator Theory In Engineering And Science*, Springer-Verlag 1982.

[12] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History Of Mathematics archive*, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/.

[13] B. J. Pettis, On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, volumen 44, número 2 (setiembre 1938) 277-304, https://www.ams.org/journals/tran/1938-044-02/S0002-9947-1938-1501970-8/S0002-9947-1938-1501970-8.pdf.

[14] P. Rosenthal, The remarkable theorem of Levy and Steinitz, *The Amer. Math. Monthly*, volumen 94, número 4 (abril 1987) 342-351, http://www.jstor.org/stable/2323094.

[15] W. Rudin, *Principles Of Mathematical Analysis, Third Edition*, McGraw-Hill 1976.

[16] I. Singer, *Bases In Banach Spaces I*, Springer-Verlag 1970.

[17] H. L. Smith, A general theory of limits, *National Mathematics Magazine*, volumen 12, número 8 (mayo 1938) 371-379, http://www.jstor.org/stable/3028618.

[18] *Math Stack Exchange*, http://math.stackexchange.com/questions/120180 /ell-1-and-unconditional-convergence.

[19] *Math Stack Exchange*, http://math.stackexchange.com/questions/2469324 /two-definitions-of-unconditional-convergence-in-a-normed-vector-space-x?rq=1.

[20] *Math Stack Exchange*, http://math.stackexchange.com/questions/613374 /summability-vs-unconditional convergence.

[21] C. Swartz, *An Introduction To Functional Analysis*, Marcel Dekker 1992.

[22] C. Swartz, *Measure, Integration And Function Spaces*, World Scientific 1994.

[23] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course Of Modern Analysis*, American Edition, Cambridge University Press 1945.

Recibido el 13 de diciembre de 2018. Aceptado para publicación el 30 de julio de 2020.

JOSEFINA ALVAREZ
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
LAS CRUCES, NEW MEXICO 88003, USA
e-mail: jalvarez@nmsu.edu