# Juegos y Rarezas Matemáticas

# Ecuación de Clairaut, un desarrollo algebraico

# Clairaut´s equation, an algebraic procedure

J. A. Sánchez-Cano y O.García-Jaimes

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 097–108, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Abr'19; Aceptación: 15 Sep'19

1 de octubre de 2019

**Resumen**

En este artículo se presenta una forma alternativa para encontrar la solución singular de la ecuación diferencial de Clairaut, usando para ello un razonamiento algebraico. Con este método se llega a la solución implícita, evitando resolver por eliminación el parámetro que aparece en el sistema de ecuaciones paramétricas que resulta al resolver dicha ecuación por el método clásico.

**Palabras Clave:** Ecuaciones diferenciales, Ecuación de Clairaut, Envolvente, soluciones singulares.

**Abstract**

This paper presents an alternative way to find the singular solution of Clairaut´s differential equation, using algebraic reasoning. With this method the solution is given in implicit form, avoiding the resolution by removing the parameter that appears in the system of parametric equations that results when this equation is solved by the classical method.

**Keywords:** Differential Equations, Clairaut´s Equation, Envelope, Singular solutions.

## 1. Introducción

En la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales juega un papel importante la noción de solución completa. Por ejemplo, en la ecuación de Clairaut la solución general viene a ser una familia de rectas, y la envolvente, es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia, también es solución, en este caso, una solución singular, de la ecuación de Clairaut. La ecuación de Clairaut [1], [2] y [6], es uno de los ejemplos típicos de ecuaciones diferenciales de primer orden con solución completa. En este trabajo se propone encontrar la solución singular de la ecuación de Clairaut, usando un método algebraico muy sencillo, el cual surgió en el problema de obtener extremos de funciones de una variable real, usando sólo el álgebra elemental, dicho método se encuentra en [3]-[5].

Una condición para poder resolverla algebraicamente es que la función $f(p)$ que se define a continuación sea algebraica. Una ecuación de la forma

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{1}$$

donde $f(p)$ es una función definida en un intervalo y con derivada continua, se llama *ecuación de Clairaut* . Introduciendo una nueva variable $p = dy/dx$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} dy &= pdx \\ y &= xp + f(p), \end{aligned} \tag{2}$$

que es equivalente a la ecuación (1). Sustituyendo en la primera de las ecuaciones (2) la segunda, se obtiene

$$\left(x + f'(p)\right) dp = 0.$$

De aquí que $p = C =$ const o bien, $x = -f(p)$.
En el primer caso,

$$y = Cx + f(C). \tag{3}$$

En el segundo caso,

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p). \end{cases} \tag{4}$$

Fácilmente se comprueba que si existe la derivada segunda $f''(p)$ y ésta no es nula, entonces la curva (4) es la envolvente para la familia uniparamétrica de curvas de (3) y, por consiguiente, será una curva integral singular para la ecuación de Clairaut. El interés en estas ecuaciones se debe al hecho de que (1) tiene una familia uniparamétrica de soluciones consistentes de líneas rectas (3). Además, la **envolvente** de esta familia (es decir, la curva cuyas tangentes está dada por la familia) también es una solución de (1), y se conoce como **solución singular** (4).

**Ejemplo.** Determinemos todas las soluciones para la siguiente ecuación diferencial en forma explícita y bosquejemos algunas curvas solución

$$y = y'x - \sqrt{y' - 1}.$$

Solución:

La ecuación diferencial de Clairaut está dada por $y = xy' + f(y')$ donde $f(y') = -\sqrt{y'-1}$. Luego, $f(p) = -\sqrt{p-1}$. Usando $p$ como el parámetro, las curvas solución de una ecuación diferencial de Clairaut cumplen con el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(p) &= -f'(p) \\ y(p) &= -pf'(p) + f(p). \end{aligned}$$

De donde la solución se determinará a partir de:

$$x(p) = -f'(p) = \frac{1}{2\sqrt{p-1}}, \tag{5}$$

$$y(p) = \frac{p}{2\sqrt{p-1}} - \sqrt{p-1} = \frac{2-p}{2\sqrt{p-1}}. \tag{6}$$

Despejando $p$ en la ecuación (5):

$$\sqrt{p-1} = \frac{1}{2x} \Rightarrow p = \frac{1}{4x^2} + 1. \tag{7}$$

Reemplazando el valor de $p$ encontrado en (7) en (6), se tiene

$$y(x) = \frac{2 - \left(\frac{1}{4x^2} + 1\right)}{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{4x^2 - 1}{4x}, \quad x \neq 0.$$

La cual es la curva envolvente. Por otro lado, la integral general viene dada por la familia de rectas $y = Cx - \sqrt{C-1}, \quad C \geq 1$.

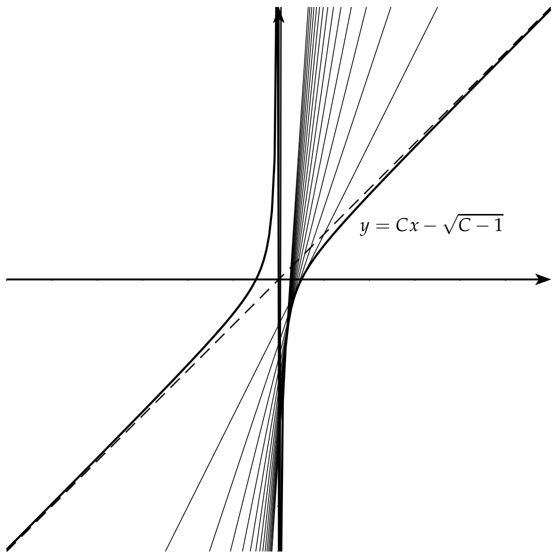


*Figura 1. Algunas curvas solución de la ecuación diferencial de Clairaut* $y = y'x - \sqrt{y'-1}$

Obsérvese que la gráfica de la curva envolvente $y(x) = \dfrac{4x^2-1}{4x}, \quad x \neq 0$, es asintótica a la recta $y = x$ (asíntota oblicua), a medida que $C$ aumenta, la recta solución está más cerca del eje $Y$.

## 2. Método algebraico

El método algebraico que se propondrá se aplicará para encontrar la solución singular de la ecuación diferencial de Clairaut, imponiendo que la función $f(p)$ sea algebraica. Por otro lado, asumiremos que la solución general viene dada por la familia uniparamétrica de rectas $y = Cx + f(C)$, como en la solución clásica. Pero, como se verá, esta solución general puede ser encontrada algebraicamente mediante la solución de un sistema sencillo de ecuaciones.

Veamos entonces cómo proceder cuando se tenga una ecuación diferencial de Clairaut, donde la función dada f sea algebraica: Dada la ecuación diferencial de Clairaut

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Paso 1. Hacemos $p = y'$ (como en la solución clásica).

Paso 2. Resolvemos la ecuación algebraica: $G(p; x, y) = 0$, donde $G(p; x, y) = f(p) + xp - y$, donde la cual la escribiremos como una ecuación polinómica de grado $n$ (por ejemplo), en la variable $p$. Impondremos que una de sus soluciones sea real y doble, esto es, expresamos:

$$G(p; x, y) = (p - \alpha)^2 P_{n-2}(p), \quad P_{n-2}(\alpha) \neq 0,$$

donde $\alpha$ es función de $x$ y $y$, adicionalmente, $P_{n-2}(p)$ es un polinomio de grado $n-2$ en la variable $p$ y con coeficientes, funciones de $x$ e $y$, y finalmente, igualamos coeficientes en la ecuación $G(p;x,y) = (p-\alpha)^2 P_{n-2}(p)$ y eliminamos parámetros para llegar a la solución singular.

**Nota 1.** Supongamos inicialmente que $f$ es una función polinómica de grado $n$ en la variable real $x$, luego la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene en todos los puntos de su dominio una recta tangente. Luego para encontrar la familia de rectas tangentes a la gráfica de $f$ debemos resolver el sistema de ecuaciones: $y = f(x)$ y $y = mx + b$ . Donde $m$ representa la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de $y = f(x), \quad x \in R$ . Ahora, debemos por lo tanto resolver la ecuación $f(x) - mx - b = 0$, forzando a que esa ecuación tenga raíces reales e iguales, es decir, imponemos que la ecuación tiene la forma

$$f(x) - mx - b = (p-\alpha)^2 P_{n-2}(p), \quad P_{n-2}(\alpha) \neq 0. \tag{8}$$

Por ejemplo, estamos interesados, sin usar cálculo diferencial , en hallar la familia de rectas tangentes (o envolventes) de la parábola $y = x^2$. Para esto, resolvemos el sistema de ecuaciones: $y = x^2$ y $y = mx + b$, esto es, resolvemos la ecuación $x^2 - mx - b = 0$, imponemos raíces reales e iguales , resolvemos $x^2 - mx - b = (x-\alpha)^2$, obteniendo $y = 2\alpha x - \alpha^2, \quad \alpha \in R$, o bien , $y = mx - \frac{m^2}{4}, \quad m \in R$. Pero $m = \frac{dy}{dx}$, por lo tanto, reemplazando en la ecuación anterior llegamos a la ecuación de Clairaut $y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

La ecuación (8), con $m = 0$, aparece en [3], para encontrar los extremos relativos y los puntos de inflexión de una función polinómica $f$. El caso cuando $f$ es algebraica se encuentra en [4], para hallar los extremos relativos de una función algebraica. Nótese que la ecuación $G(p;x,y) = 0$ puede llevarse siempre a una ecuación polinómica a través de operaciones finitas de suma, resta, multiplicación, división o potenciación, y por lo tanto, el método puede ser aplicado.

**Nota 2.** Si consideramos en particular la ecuación de segundo grado en la forma

$$Lp^2 + 2Mp + N = 0.$$

la solución singular, cuando esta existe, es $S = 0$, donde $S$ es $LN - M^2$ o un factor de éste. En general, $LN - M^2$ no se puede factorizar, y esta no sería una solución a menos que

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - 2M\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} + N\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{9}$$

donde $LN = M^2$ ; y esto en general deberá dar dos ecuaciones simultáneamente independientes que determinan a $x$ y a $y$ como cantidades constantes.
Así, por ejemplo, consideremos nuevamente la ecuación de Clairaut $y = xy' - \sqrt{y'-1}$, observemos que haciendo $y' = p$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$x^2p^2 - (2xy+1)p + \left(y^2+1\right) = 0,$$

donde, según la ecuación (9), $L = x^2, \quad M = -\frac{2xy+1}{2}x^2$ y $L = y^2 + 1$. Entonces, con $S = LN - M^2$, es decir, $S = -\frac{4x^2-4xy-1}{4}$, se cumple que al reemplazar en la ecuación (9) y realizar todas las operaciones, se llega finalmente al par de ecuaciones simultáneamente independientes que determinan a $x$ y a $y$ como cantidades constantes (Nota 2), esto es,

$$(x-y)\left(4x^2 - 4y - 1\right) = 0.$$

claramente, $y = x$ es la solución de la ecuación de Clairaut, mientras que $y(x) = x - \frac{1}{4x}, \quad x \neq 0$ es la solución singular (obtenida en el ejemplo anterior).

En resumen, en el caso en que la ecuación es de grado 2, basta con hacer el discriminante 0 para imponer que la solución real sea doble. El discriminante igualado a cero constituye entonces la solución singular.

En la Sección 2.1 se explicará en dos ejemplos cómo aplicar el método. En el primero de estos ejemplos supondremos, como en la solución clásica, que la solución general, viene dada por la familia de rectas dada por $y = Cx + f(C)$ y encontraremos la solución singular. En el segundo ejemplo, encontraremos la solución general algebraicamente.

## 2.1. Ejemplos

**Ejemplo 2.1.1.** Determinemos todas las soluciones para la ecuación diferencial $y = y'x - \sqrt{y'-1}$ en forma explícita.
Es ecuación de Clairaut, por tanto hacemos $y' = p$ para obtener: $y = px - \sqrt{p-1}$ . La transformamos en una ecuación polinómica para p de grado 2: $p^2x^2 - (2xy+1)p + \left(y^2+1\right) = 0$ , (ejemplo anterior) . Su solución es:

$$p = \frac{(2xy+1) \pm \sqrt{(2xy+1)^2 - 4x^2\left(y^2+1\right)}}{2x^2}, \quad x \neq 0. \tag{10}$$

Haciendo cero el discriminante (pues queremos soluciones reales e iguales)

$$\begin{aligned} 4x^2y^2 + 4xy + 1 - 4x^2y^2 - 4x^2 = 0& \\ &\Rightarrow 4xy - 4x^2 + 1 = 0 \\ &\Rightarrow y = \frac{4x^2-1}{4x}. \end{aligned}$$

La última función, esto es, $y = \frac{4x^2-1}{4x}, \quad x \neq 0$, es la solución singular de la ecuación de Clairaut. Nótese que de (10) se tiene lo siguiente: $p = \frac{(2xy+1)}{2x^2}$. Si reemplazamos el valor de $y$ encontrado anteriormente en esta última ecuación se tiene

$$p = \frac{2x\left(\frac{4x^2-1}{4x}\right)+1}{2x^2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{4x^2+1}{4x^2} \quad \Rightarrow \quad p = 1 + \frac{1}{4x^2}.$$

Pero si se tiene en cuenta que $p = dy/dx$, entonces podemos resolver la ecuación diferencial sencilla:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{4x^2} \Rightarrow y = x - \frac{1}{4x}.$$

Obsérvese que se toma la constante de integración 0. Veamos el por qué. Supongamos que la solución obtenida es: $y = x - \frac{1}{4x} + k, \quad x \neq 0$, con $k \neq 0$, y sea $(x_0, y_0)$ un punto de tangencia de la curva, esto es,

$$y_0 = x_0 - \frac{1}{4x_0} + k, \quad x \neq 0, \tag{11}$$

por lo tanto $C = 1 + \frac{1}{4x_0^2}$ con $C > 1$ . Fijemos $C = 2$ (por ejemplo), con lo cual se tiene que $2 = 1 + \frac{1}{4x_0^2}$, o bien $x_0 = \pm\frac{1}{2}$. Remplazando estos valores en la ecuación $y = xC - \sqrt{C-1}$ se obtienen dos puntos de tangencia para $C = 2$ , a saber, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ .

Case 1. $x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = 0$, en ecuación (9) , se tiene que $k = 0$. (Note que $C = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\langle x_0, x_0 \rangle} > \frac{y_0}{x_0}$ se cumple, ya que $C = 2 > \frac{0}{1/2}$).
Case 2. $x_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = 2$ en ecuación (11), se tiene $k = -2$ , en este caso se tiene que

$C = 2 > \frac{-2}{-1/2} = 4$ (absurdo!).

En conclusión, deberá tenerse siempre que la constante de integración sea cero, y esto es precisamente la solución singular encontrada.

En resumen:
Solución general: $y = Cx + \sqrt{C-1}, \quad C \geq 1$.
Solución singular: : $y = \frac{4x^2-1}{4x}, \quad x \neq 0$.

**Ejemplo 2.1.2.** Vamos a resolver la ecuación diferencial de Clairaut:

$$y = y'x + \sqrt{1+y'^2}.$$

Hacemos $y' = p$ para obtener: $y = px + \sqrt{1+p^2}$.
Resolviendo para p:

$$\begin{aligned} & y - px = \sqrt{1+p^2} \\ \Leftrightarrow \quad & (y-px)^2 = 1 + p^2 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 - 2pxy + p^2x^2 = 1 + p^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x^2 - 1\right) p^2 - 2pxy + \left(y^2 - 1\right) = 0 \\ & p = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right)}}{2\left(x^2-1\right)}. \end{aligned}$$

Haciendo cero el discriminante (pues buscamos soluciones reales e iguales)

$$\begin{aligned} 4x^2y^2 - 4\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad 4x^2y^2 - 4y^2x^2 + 4y^2 + 4x^2 - 4 &= 0 \\ \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

De aquí, que la circunferencia centrada en el origen y radio 1, es la envolvente de la familia de rectas $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$, que viene a ser la integral general de la ecuación de Clairaut. De hecho, podemos encontrar la familia de rectas $y = mx + b$ las cuales son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
En efecto, para esto resolvemos el sistema:

$$y = mx + b \tag{12}$$
$$x^2 + y^2 = 1. \tag{13}$$

Sustituyendo (12) en (13) se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2 + (mx+b)^2 &= 1 \\ \leftrightarrow \quad x^2 + m^2x^2 + 2mbx + b^2 &= 1 \\ \leftrightarrow \quad \left(1+m^2\right)x^2 + 2mbx + \left(b^2-1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo para $x$, se tiene.

$$x = \frac{-mb \pm \sqrt{m^2 - b^2 + 1}}{(1+m^2)}.$$

Por un lado, se tiene que la abscisa $x$ es: $x = -\dfrac{mb}{(1+m^2)}$.
Donde $m$ y $b$ verifican lo siguiente: $m^2 - b^2 + 1 = 0$.

O bien, resolviendo para b: $b = \mp\sqrt{1+m^2}$. Reemplazando en (9), se tiene que la familia de rectas tangentes a la circunferencia de radio 1 de la ecuación (10), viene dada por $y = mx \pm \sqrt{1+m^2}, \quad (m \in R)$
Obsérvese que si hacemos $m = C$ y si tomamos la raíz positiva se tiene entonces la solución general $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$, la curva y sus tangentes pueden verse en la Figura 2.

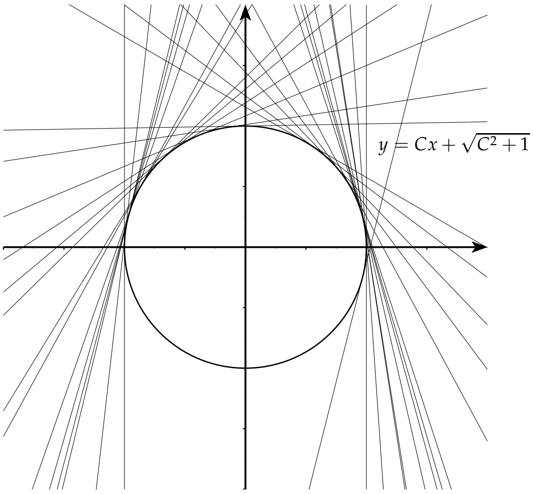


*Figura 2. Algunas curvas solución de la ecuación de Clairaut $y = xy' + \sqrt{(y')^2+1}$*

**Ejemplo 2.1.3.** Resolvamos la ecuación de Clairaut:

$$y = y'x - (y')^3 .$$

Hacemos $y' = p$ para obtener: $y = px - p^3$. Resolviendo para p: $p^3 - px + y = 0$. Como estamos imponiendo soluciones reales e iguales, dos en este caso, escribimos $G(p; x, y) = p^3 - px + y = (p-\alpha)^2 P_1(p)$. Donde $P_1(p)$ es un polinomio de grado uno. Con lo cual, podemos escribir en la siguiente forma:

$$p^3 - px + y = (p-\alpha)^2(p+\beta) = p^3 + (\beta - 2\alpha)p^2 + \left(\alpha^2 - 2\alpha\beta\right)p + \alpha^2\beta.$$

Igualando término a término en la ecuación anterior, tomando como constantes a x y a y, tenemos que resolver el sistema:

$$\beta - 2\alpha = 0, \tag{14}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta = -x, \tag{15}$$

$$\alpha^2\beta = y. \tag{16}$$

De (14), tenemos que $\beta = 2\alpha$ , remplazando este valor en (15) se tiene $\alpha = \pm\sqrt{\frac{x}{3}}, \quad x \geq 0$. Luego $\beta = \pm 2\sqrt{\frac{x}{3}}, \quad x \geq 0$. Sustituyendo estos valores en (16), obtenemos por tanto, $\left(\frac{x}{3}\right)\left(\pm 2\sqrt{\frac{x}{3}}\right) = y, \quad x \geq 0$. O bien, finalmente: $y = \pm 2\left(\frac{x}{3}\right)^{3/2}, \quad x \geq 0$.

En forma más general, se tiene el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.1.4.** Resolvamos la ecuación $y = xy' + (y')^n, \quad n \neq 0{,}1$.
Usando el método algebraico, obtenemos la ecuación

$$p^n - xp + y = (p-\alpha)^2 P_{n-2}(p), \quad P_{n-2}(\alpha) \neq 0,$$

donde

$$P_{n-2}(p) = p^{n-2} + \beta_1 p^{n-3} + \beta_2 p^{n-4} + \cdots + \beta_{n-3} p + \beta_{n-2},$$

al igualar término a término en la ecuación anterior obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
\beta_1 - 2\alpha &= 0 \\
\beta_2 - 2\alpha\beta_1 + \alpha^2 &= 0 \\
\beta_3 - 2\alpha\beta_2 + \alpha^2\beta_1 &= 0 \\
&\vdots \\
\beta_{n-2} - 2\alpha\alpha_{n-3} + \alpha^2\beta_{n-4} &= 0 \\
\alpha^2\beta_{n-3} - 2\alpha\beta_{n-2} &= (-1)^{n+1}x \\
\alpha^2\beta_{n-2} &= (-1)^{n+1}y,
\end{aligned}$$

o simplificando, se tiene

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 2\alpha, \\
\beta_2 &= 3\alpha^2, \\
\beta_3 &= 4\alpha^3, \\
&\vdots \\
\beta_{n-3} &= (n-2)\alpha^{n-3}, \\
\beta_{n-2} &= (n-1)\alpha^{n-2}, \\
\alpha^2\beta_{n-3} - 2\alpha\beta_{n-2} &= -x, \\
\alpha^2\beta_{n-2} &= y.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la penúltima ecuación del sistema anterior los valores obtenidos de $\beta_{n-3}$ y $\beta_{n-2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\alpha^2\beta_{n-3} - 2\alpha\beta_{n-2} = -x \rightarrow \quad & \alpha^2[(n-2)\alpha^{n-3}] - 2\alpha[(n-1)\alpha^{n-2}] = -x. \\
\rightarrow \quad & (n-2)\alpha^{n-1} - 2(n-1)\alpha^{n-1} = -x \\
\rightarrow \quad & (n-2-2n+2)\alpha^{n-1} = -x \\
\rightarrow \quad & n\alpha^{n-1} = x.
\end{aligned}$$

Con lo cual, se obtiene finalmente la solución:

$$p = \alpha = \left(\frac{x}{n}\right)^{1/(n-1)}, \quad n \neq 0, 1.$$

Este valor de $\alpha$ hallado, reemplazado en la última ecuación del sistema da lugar a la única solución , a saber,

$$\begin{aligned}
\alpha^2\beta_{n-2} = y \longrightarrow \quad & \alpha^2(n-1)\alpha^{n-2} = y \\
\longrightarrow \quad & \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}(n-1)\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} = y.
\end{aligned}$$

O finalmente

$$y = \frac{n-1}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad n \neq 0, 1.$$

Si $n$ es impar, luego la solución es válida para $x \leq 0$ y $x \in \Re$ para $n$ par.
Dicha solución puede encontrarse fácilmente resolviendo el sistema (4).

**Ejemplo 2.1.5.** Resolvamos ahora la ecuación $y = 2xy' + y\,(y')^2$.Observamos que la ecuación dada aparentemente no es de Clairaut, esto es, no es de la forma $y = y'x + f\,(y')$.
Veamos que la ecuación dada puede convertirse a una de Clairaut.
En efecto, multiplicando por $y$, obtenemos: $y^2 = 2xy' + y^2\,(y')^2$. Luego haciendo la sustitución $u = y^2, \quad u' = du/dx = 2y'$ , y reemplazándola en la última ecuación, produce la ecuación de Clairaut: $u = xu' + \frac{(u')^2}{4}$.

Hacemos $u' = p$ para obtener, $u = px + \frac{p^2}{4}$. Resolviendo para $p$: $p^2 + 4px - 4u = 0$, o bien, $p = \frac{-4x \pm \sqrt{16x^2+16u}}{2}$.

De donde obtenemos lo siguiente haciendo el discriminante 0: $p = -2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \quad \Rightarrow u = -x^2$. Que es la misma solución que se produce cuando hacemos el discriminante cero y despejamos $u$. Obsérvese que no hay solución singular en este caso ya que deshaciendo el cambio queda $u = y^2 = -x^2$.

La solución general viene dada por la familia de curvas: $u = Cx + \frac{C^2}{4}$, luego la solución general del problema original es $y^2 = Cx + \frac{C^2}{4}$.

**Ejemplo 2.1.6.** Vamos a resolver la ecuación diferencial $e^{2x}\left(y^2 y - yy'\right) = (y')^2, \quad y > 0$.
Haciendo $v = y, \quad u = e^x$se obtiene una ecuación de Clairaut como el lector puede comprobar.
Ya que se sabe que la ecuación es de Clairaut, trabajamos directamente, esto es, hacemos $p = y'$ y desarrollando la ecuación obtenemos,

$$p^2 + ye^{2x}p - e^{2x}y^2 \ln y = 0.$$

Cuya solución viene dada por

$$p = \frac{-ye^{2x} \pm \sqrt{y^2e^{4x} + 4e^{2x}y^2 \ln y}}{2}.$$

Encontramos la solución general haciendo el discriminante 0

$$\begin{aligned} y^2e^{4x} + 4e^{2x}y^2 \ln y &= 0 \\ y^2\left(e^{4x} + 4e^{2x} \ln y\right) &= 0, \quad y > 0 \\ 4 \ln y &= -e^{2x}. \end{aligned}$$

El resultado final viene siendo la solución singular de la ecuación de Clairaut, esto es, la envolvente de la familia de rectas (en u, v): $e^{2x}\left(y^2 \ln y - Cy\right) = C^2, \quad y > 0$. (solución general). Nuevamente, dicha solución singular puede ser encontrada resolviendo la ecuación diferencial $p = \frac{dy}{dx} = -\frac{ye^{2x}}{2}$.

**Ejemplo 2.1.7.** Resolvemos la ecuación

$$y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad a > 0.$$

En este caso llegamos a la ecuación polinómica de grado 4:

$$p^4 - 2\frac{y}{x}p^3 + \frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2}p^2 - 2\frac{y}{x}p + \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $u = y/x$ en la ecuación anterior tenemos

$$p^4 - 2up^3 + \left(1 + u^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)p^2 - 2up + u^2 = 0.$$

Imponemos soluciones reales e iguales, dos en este caso. Luego

$$G(p;x,y) = p^4 - 2up^3 + \left(1 + u^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)p^2 - 2up + u^2 = (p-\alpha)^2 P_2(p).$$

Donde $P_2(p)$ es un polinomio de grado dos. Lo escribimos de la siguiente forma:

$$p^4 - 2up^3 + \left(1 + u^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)p^2 - 2up + u^2 = (p-\alpha)^2\left(p^2 + \beta p + \gamma\right).$$

Igualando término a término en la ecuación anterior, tomando como constantes a x y u, resolvemos el sistema.

$$\beta - 2\alpha = -2u \tag{17}$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \gamma = 1 + u^2 - a^2/x^2 \tag{18}$$
$$\alpha^2\beta - 2\alpha\gamma = -2u \tag{19}$$
$$\alpha^2\gamma = u^2 \tag{20}$$

De la ecuación (17) tenemos $\beta = 2\alpha - 2u$ reemplazando este valor en las ecuaciones (18) y (19) tenemos respectivamente

$$-3\alpha^2 + 4u\alpha + \gamma = 1 + u^2 - \frac{a^2}{x^2} \tag{21}$$

y

$$2\alpha^3 - 2u\alpha^2 - 2\alpha\gamma = -2u \tag{22}$$

Ahora, en la ecuación (20) tenemos $\gamma = u^2/\alpha^2$, reemplazando este valor en la ecuación (22) hallamos que $\alpha = u$ or $\alpha = -u^{1/3}$. En el primer caso $\gamma = 1$ y reemplazando estos valores en la ecuación (21), se tiene $a = 0$ lo cual es absurdo. Tenemos entonces $\alpha = -u^{1/3}$ luego $\gamma = u^{4/3}$ reemplazando estos valores en la ecuación (21), obtenemos por tanto, $\left(u^{2/3}+1\right)^3 = a^2/x^2$ lo cual a su vez lleva a la solución singular $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (astroide)

## 3. Conclusiones

Se ha presentado un método algebraico para encontrar la solución singular de la ecuación de Clairaut, supuesto que la función que aparece en dicha ecuación es algebraica. Dicha solución singular es la curva envolvente de la solución general. Es claro, que al aplicar la teoría clásica de solución, la respuesta resulta a veces inmediata, otras veces, no tanto, pues lo que se tiene que hacer, para encontrar la solución singular, es resolver el sistema de ecuaciones paramétricas dado por (4). Mientras que por el método propuesto, llegamos siempre a la solución, sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones paramétricas.

## Referencias

[1] FORSYTH, A. R., *A treatise on Differential Equations*, Mineola, Dover Pub. 6 Ed., New York, 1996.

[2] NOVO, S., OBAYA, R., ROJO, J., *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, MacGraw-Hill, Madrid, 1995.

[3] SÁNCHEZ-CANO, José Albeiro, *Método alterno para la gráfica de función polinómica*, Revista UNION, Nº 30, pp. 49–59, junio 2012.

[4] ——, *Método alternativo para la gráfica de funciones algebraicas*, Revista SUMA, Nº 73(2), pp. 25–38, julio 2013.

[5] SÁNCHEZ-CANO, José Albeiro, CASTAÑEDA-R, Gustavo, *Problemas de Optimización Vía Álgebra*, Revista UNION, Nº 49, pp. 41–60, abril 2017.

[6] TENENBAUM, M., POLLARD, H., *EOrdinary Differential Equations*, Dover Pub., New York, 1985.

**Sobre los autores**

*Nombre:* José Albeiro Sánchez Cano
*Correo electrónico:* josanche@eafit.edu.co
*Institución:* Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad EAFIT, Medellin-Colombia.

*Nombre:* Orlando García Jaimes
*Correo electrónico:* olgarcia@eafit.edu.co
*Institución:* Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad EAFIT, Medellin-Colombia.