Comunicaciones en Estadística
Junio 2009, Vol. 2, No. 1

Profundización teórica de modelos de volatilidad ARCH - GARCH y una aplicación al caso colombiano

Deepening the theorical volatility models ARCH - GARCH and an application to the Colombian case

Heivar Yesid Rodríguez Pinzón[a]
heivarrodriguez@usantotomas.edu.co

Resumen

Con este trabajo se quiere presentar el soporte teórico de los modelos ARCH y GARCH propuestos por Engle (1982) y Bollerslev (1986), desarrollando las demostraciones de media y varianza, condicional y no-condicional a partir de los supuestos hechos por Engle (1982) y finalmente se presenta el ajuste de un proceso, que presenta dinámicas ARCH y GARCH.

Palabras clave: modelos ARCH, modelos GARCH, volatilidad, inflación.

Abstract

This work presents the theoretical support of ARCH and GARCH models proposed by Engle (1982) and Bollerslev (1986), developing the demonstrations of mean and variance, conditional and non-conditional based in the assumptions made by Engle (1982) and finally it presents an adjustment process, which presents the dynamic proper of ARCH and GARCH models.

Key words: ARCH models, GARCH models, volatility, inflation.

1. Introducción

Los desarrollos de series de tiempo, propuestos por Box & Jenkins (1976), plantean el modelamiento la serie en nivel, olvidando en parte la volatililidad del proceso del cual proviene la misma, característica que en la actualidad, se ha convertido en un elemento clave en la toma de decisiones, especialmente en mercados financieros.

[a]Docente. Universidad Santo Tomás

En estos mercados la volatilidad es una característica fundamental, su medición y pronóstico es de vital importancia para los operadores para asegurarse o apalancarse frente a eventos que conlleven aperdidas que no se puedan cubrir. De manera que la ausencia de un análisis de la volatilidad debilita todo proceso de toma de decisiones.

Al considerar la volatilidad como un proceso estocástico, se buscar ajustar un modelo que permita describir y analizar su comportamiento histórico y a partir de este su comportamiento futuro. Para el caso de procesos de varianza constante la metodología de Box-Jenkins ha sido ampliamente utilizada, sin embargo, este supuesto no es sostenible (plausible) en varias áreas de investigación, por lo que se deben consideran otras alternativas.

Dentro de estas alternativas aparecen los modelos ARCH (Autorregresive Condicional Heterocedastic) y GARCH (Generalized Autorregresive Condicional Heterocedastic) propuestos por Engle (1982) y Bollerslev (1986) respectivamente, modelos que permiten especificar el comportamiento de la varianza. Estos modelos se plantean pensando que se modela en la media condicional y la varianza condicional simultáneamente. La diferencia entre lo condicional y no condicional es que la expectativa condicional se refiere a una expectativa hacia el futuro pero sujeta a la información observada hasta el momento t - corto plazo -.

Este trabajo presenta el soporte teórico de los modelos ARCH y GARCH propuestos por Engle (1982) y Bollerslev (1986). Se desarrollan las demostraciones de varianza condicional y no-condicional a partir de los supuestos hechos por Engle (1982) y finalmente se presenta una apliación la serie de la Inflación Colombiana.

2. Modelos

Los modelos presentados plantean la varianza h_t - volatilidad-, como proceso estocástico que obedece un modelo a estimar, los principales resultados de los artículos de Engle (1982) y Bollerslev (1986) son mostrados en las secciones 2.1 y 2.2 y posteriormente en la sección 3, se presentan los resultados de este trabajo, y son las demostraciones no desarrolladas en los artículos antes mencionados.

2.1. Modelo Autorregresivo Condicional Heterocedástico (ARCH)

El modelo ARCH fue presentado por Engle (1982), como alternativa para modelar procesos con periodos de turbulencia y periodos de calma , y a largo plazo sigan siendo estacionarios. La familia de procesos ARCH esta definida como se muestra a continuación.

Un proceso $\{y_t\}$ es un proceso ARCH(p) si obedece las ecuaciones:

$$y_t = z_t h_t^{1/2} \quad \text{con } z_t \sim NID(0,1) \tag{1}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2, \quad \text{con } \alpha_0 > 0 \quad \text{y } \alpha_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, ..., p \tag{2}$$

A partir de estos supuestos se puede mostrar:

1. $E(y_t) = 0$
2. $V(y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i}$

Nota 1: De 2., se tiene que $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i < 1$.

2.2. Modelo Autorregresivo Condicional Heterocedástico Generalizado (GARCH)

Este proceso fue presentado por Bollerslev (1986); es una generalización de los procesos ARCH. El modelo GARCH adiciona una parte autoregresiva al comportamiento de la varianza, planteado en el modelo ARCH.

Un proceso $\{y_t\}$ obedece una dinámica GARCH(p,q), si satisface las ecuaciones:

$$y_t = z_t h_t^{1/2}, z_t \sim NID(0,1), h_t > 0 \quad \text{y } z_t \perp y_s (s < t) \tag{3}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j y_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}, \quad \text{con } p \geq 0, q > 0, \ \alpha_0 > 0, \tag{4}$$
$$\alpha_j \geq 0, i = 1, ..., q, \quad \text{y } \beta_i \geq 0, i = 1, ..., p$$

Notese que $z_t \perp y_s$ `equivale a` $Cov(z_t, y_s) = 0$ `para todo` $(s < t)$.

Dados los supuestos anteriores se tiene:

1. $E(y_t) = 0$
2. $V(y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum\limits_{j=1}^{q} \alpha_j - \sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i}$

Nota 2: Analogo a lo mostrado para un porceso ARCH(p) se tiene que,

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1 \tag{5}$$

3. Resultados

Los procesos ARCH y GARCH planteados en el capitulo anterior presentan características importantes para el modelado de series de tiempo y para un mejor entendimiento del comportamiento asociado a este tipo de procesos. A continuación se presentan las demostraciones para llegar a sus momentos de orden 1 y 2, a partir de los supuestos dados en las ecuaciones (1) al (4). Inicialmente los resultados se presentan para un proceso ARCH(1), en seguida para un ARCH(p), y finalmente para un proceso GARCH(1,1).

3.1. Proceso ARCH(1)

3.1.1. Esperanza y varianza no-condicionales

De las ecuaciones (1) y (2) tenemos $y_t = z_t h_t^{1/2}$ con $z_t \sim NID(0,1)$ y $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$.

El primer y segundo Momento No-condicionales, del proceso y_t, están dados por:

1. Media

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(z_t h_t^{1/2}) \\ &= E(z_t)E[(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2}] \quad \text{porque } z_t \perp y_s(\texttt{para } s < t) \\ &= 0 \quad (\text{puesto que } E(z_t) = 0) \end{aligned}$$

2. Varianza

$$\begin{aligned} V(y_t) &= E(y_t^2) \\ &= E(z_t^2)E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}^2), \quad (\text{puesto que } E(z_t^2) = 1) \end{aligned}$$

Esto se tiene para todo t. Tomando $E(y_{t-1}^2)$ en función de $E(y_{t-2}^2)$, se tiene:

$$E(y_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1[\alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-2}^2)]$$

De forma analoga, regresando k-veces hacia el pasado y dado que $\alpha_1 < 1$ te-nemos:

$$E(y_t^2) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_0 \alpha_1^j + \alpha_1^k E(y_{t-k}^2)$$

Llevando $k \longrightarrow \infty$ la ecuación anterior se convierte en

$$E(y_t^2) = \alpha_0 (\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j)$$

Por lo tanto

$$E(y_t^2) = \alpha_0/(1-\alpha_1)$$

3.1.2. Función de autocovarianza

La conclusión final, a partir de los resultados de la sección 3.1.1 y de la presente sección es que un proceso proceso ARCH(1), cumple con las condiciones de un ruido blanco (media cero y varianza constante).

En adelante Ψ_{t-1} denota la σ - algebra generada por $\{y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ...\}$ es decir Ψ_{t-1} es la información observada hasta el punto $t-1$.

De las ecuaciones (1) y (2) tenemos $y_t = z_t h_t^{1/2}$ con $z_t \sim NID(0,1)$ y $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$, entonces:

$$\begin{aligned} y_t^2 &= z_t^2(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 z_t^2 + \alpha_1 z_t^2 y_{t-1}^2, \quad (\text{para todo t } , y_{t-1}^2 = \alpha_0 z_{t-1}^2 + \alpha_1 z_{t-1}^2 y_{t-2}^2) \end{aligned}$$

Reemplazando y_{t-1}^2 en y_t^2, se obtiene:

$$\begin{aligned} y_t^2 &= \alpha_0 z_t^2 + \alpha_1 z_t^2[\alpha_0 z_{t-1}^2 + \alpha_1 z_t^2 y_{t-2}^2] \\ &= \alpha_0 z_t^2 + \alpha_1 \alpha_0 z_t^2 z_{t-1}^2 + \alpha_1^2 z_t^2 z_{t-1}^2 y_{t-2}^2 \\ &= ..., \text{continuando la recursión en } y_{t-k} \\ &= \alpha_0 \sum_{j=0}^{k} \alpha_1^j z_t^2 z_{t-1}^2 ... z_{t-j}^2 + \alpha_1^{k+1} z_t^2 z_{t-1}^2 ... z_{t-k}^2 y_{t-k-1}^2 \end{aligned}$$

Tomando limite cuando k $\longrightarrow \infty$, tenemos:

$$y_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j z_{t-1}^2 ... z_{t-j}^2$$

Dadas las ecuaciones (1), (2), (5), tenemos:

$$
\begin{aligned}
y_t &= z_t(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2} \\
&= z_t \left[\alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j z_{t-1}^2 ... z_{t-j}^2 \right]^{1/2} \\
&= z_t \left[\alpha_0 \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j z_{t-1}^2 ... z_{t-j}^2 \right) \right]^{1/2} \\
&= z_t A_{t-1},
\end{aligned}
$$

donde $A_{t-1} = \left[\alpha_0 \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j z_{t-1}^2 ... z_{t-j}^2 \right) \right]^{1/2}$, se debe notar que A_{t-1} es función de $z_{t-1}, z_{t-2}, ...$

De los resultados anteriores la función de autocovarianza entre y_t y y_{t+h}, esta dada por:

3. $$
\begin{aligned}
Cov(y_t, y_{t+h}) &= E(y_t y_{t+h}) \\
&= E(z_{t+h} z_t A_{t-1} A_{t+h-1}) \\
&= E(E(z_{t+h} z_t A_{t-1} A_{t+h-1} \mid \Psi_{t+h-1})) \\
&= E(z_t A_{t-1} A_{t+h-1} E(z_{t+h} \mid \Psi_{t+h-1})) \\
&= 0, \quad \text{(porque } E(z_{t+h} \mid \Psi_{t+h-1})) = 0
\end{aligned}
$$

De las ecuaciones anteriores tenemos $y_t \sim RB(0\ ,\ \sigma_y^2)$, con $\sigma_y^2 = \alpha_0/(1-\alpha_1)$, pero y_t no es IID, como se verá en la siguiente sección.

3.1.3. Esperanza y varianza condicional

A continuación se presenta el desarrollo de la esperanza y varianza condicional del proceso y_t.

1. Esperanza condicional

$$
\begin{aligned}
E(y_t \mid \Psi_{t-1}) &= E(z_t \mid \Psi_{t-1})(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2} \\
&= E(z_t)(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2}, \quad \text{(porque } z_t \perp y_s \quad \text{con } s < t.) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2. Varianza condicional

$$
\begin{aligned}
V(y_t \mid \Psi_{t-1}) &= E(z_t^2 \mid \Psi_{t-1})(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) \\
&= E(z_t^2)(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

De los resultados anteriores se resalta:

- La media es constante en ambos casos, igual a cero.
- La varianza no-condicionada es constante (varianza de largo plazo); mientras que,
- la varianza condicional a corto plazo depende de y_{t-1}. Por lo que dados los supuestos, el proceso puede presentar periodos de alta volatilidad o de calma, la varianza a corto plazo no es constante.

3.1.4. Generalización ARCH(p)

Los resultados presentados para un ARCH(1), se pueden generalizar para un proceso ARCH(p), como se presenta a continuación. El resultado más importante es que un proceso ARCH es un ruido blanco pero no es IID.

En los siguientes items se presentará una generalización de la esperanza y varianza no-condicional, anteriormente presentadas. Teniendo en cuenta las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

Esperanza no-condicional

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= E(z_t h_t^{1/2}) \\
&= E(z_t(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2)^{1/2}) \\
&= E(z_t)E(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2)^{1/2}, \quad (\text{porque } z_t \perp y_s \quad \text{para todo } s < t) \\
&= E(z_t)(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2)^{1/2}, \quad (\text{porque } z_t \perp y_s \quad \text{para todo } s < t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Varianza no-condicional

$$
\begin{aligned}
V(y_t) &= E(y_t^2)\\
&= E(z_t^2(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2))\\
&= E(z_t^2)E(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2)\\
&= E(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2)\\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E(y_{t-i}^2)\\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_i E(y_{t-i-k}^2))\\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i\alpha_0 + \alpha_i^2 \sum_{k=1}^{p} E(y_{t-i-k}^2)) \qquad \text{(a)}\\
&= \alpha_0 \sum_{j=1}^{k} (\sum_{i=1}^{p} \alpha_i)^j \qquad \text{(b)}\\
&= \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}
\end{aligned}
$$

Los desarrollos para obtener (a) y (b), se muestran en el añexo 1. En los siguientes items se presentará una generalización de la esperanza y varianza condicional, de nuevo Ψ_{t-1} es la $\sigma-$algebra generada por $\{y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ...\}$

1. Esperanza condicional

$$
\begin{aligned}
E(y_t \mid \Psi_{t-1}) &= E(z_t \mid \Psi_{t-1})(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2)^{1/2}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

2. Varianza condicional

$$
\begin{aligned}
V(y_t^2 \mid \Psi_{t-1}) &= E(z_t^2 \mid \Psi_{t-1})(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2) \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2 \\
&= h_t
\end{aligned}
$$

Las conclusiones para un modelo ARCH(p) son:

- Un ARCH(p) es un proceso de ruido blanco pero no es independiente y no es identicamente distribuido.
- Las esperanzas condicional y no-condicional son iguales a cero.
- La varianza no-condicional es constante; mientras que
- la varianza condicional depende de $y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p}$; luego no es fija.

3.2. Esperanzas y varianzas para un GARCH(1,1)

3.2.1. Esperanzas y varianza no-condicional

Siguiendo con los resultados presentados por Bollerslev (1986), se presenta los desarrollos de la esperanza y varianza en el caso GARCH(1,1).

1. Esperanza no-condicional

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= E(z_t(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^{1/2}) \\
&= E(z_t)E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^{1/2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2. Varianza no-condicional

$$
\begin{aligned}
V(y_t) &= E(y_t^2) \\
&= E(z_t^2(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})) \\
&= E(z_t^2)E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}) \\
&= E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}^2) + \beta_1 E(h_{t-1})) \quad \text{(c)} \\
&= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad \text{(d)}
\end{aligned}
$$

Los desarrollos para obtener (c) y (d), se presentan en el anexo 2.

3.2.2. Esperanza y varianza condicional

1. Esperanza condicional

$$\begin{aligned} E(y_t \mid \Psi_{t-1}) &= E(z_t \mid \Psi_{t-1})(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^{1/2} \\ &= E(z_t)(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^{1/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Varianza condicional

$$\begin{aligned} V(y_t \mid \Psi_{t-1}) &= E(z_t^2 \mid \Psi_{t-1})(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}) \\ &= E(z_t^2)(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}) \\ &= h_t \end{aligned}$$

De los resultados anteriores se puede resaltar que:

1. La esperanza condicional y no-condicionada son iguales a 0.
2. La varianza de largo plazo es constante, mientras que la varianza de corto plazo puede cambiar.

3.3. Función de verosimilitud del proceso ARCH(1)

La estimación de los parametros de un proceso ARCH(1)[1], no se plantea sobre la función de verosimilitud, sino sobre la función de verosimilitud condicional, y dados los suspuestos del modelo ARCH(1), este tiene distribución condicional normal con media cero y varianza h_t.

Sea B_t la función de densidad de y_t, dada Ψ_{t-1}, B_t esta dada por:

$$B_t = f_{y_t|\Psi_{t-1}} = \frac{1}{(2\pi h_t)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(h_t)^{-1} y_t^2}.$$

La función de verosimilitud condicionada conjunta de T observaciones, está dada por:

$$B_1 B_2 ... B_T = L = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{(2\pi h_t)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(h_t)^{-1} y_t^2}$$

[1]De la misma forma se hace para un proceso ARCH(p)

Maximizar la función anterior es equivalente a maximizar el logaritmo, donde el logaritmo de la función de densidad de la t-esima observación l_t, esta dado por:

$$l_t = \ln(B_t) = k - \frac{1}{2}\ln h_t - \frac{1}{2}\frac{y_t^2}{h_t}, \quad \text{con } k = \ln\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}$$

Y sea l el promedio del logaritmo de la probabilidad, tal que:

$$l = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t$$

$$l_t = k - \frac{1}{2}\ln h_t - \frac{1}{2}\frac{y_t^2}{h_t}$$

Si notamos $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)^{'}$, el vector de parámetros, la función l_t debe ser maximizada con respecto a α. Las condiciones de primer orden y segundo orden(Hessiano), son:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha} = \frac{\partial l_t}{\partial h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha} = \frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{h_t} + \frac{y_t^2}{2h_t^2}\right] = \frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right] \tag{6}$$

$$M = \frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} = -\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\left(\frac{y_t^2}{h_t}\right) + \left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right]\frac{\partial}{\partial \alpha'}\left[\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\right] \tag{7}$$

Tomando esperanza condicional en (7) tenemos:

$$E(M \mid \Psi_{t-1}) = -\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}E\left(\frac{y_t^2}{h_t} \mid \Psi_{t-1}\right)$$

$$+ E\left(\left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right]\frac{\partial}{\partial \alpha'}\left[\frac{1}{h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\right] \mid \Psi_{t-1}\right) \tag{8}$$

Como $E(y_t^2 \mid \Psi_{t-1}) = h_t$, y h_t es constante dado Ψ_{t-1} entonces:

$$E\left(\frac{y_t^2}{h_t} \mid \Psi_{t-1}\right) = 1 \Longrightarrow E\left(\left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right]\frac{\partial}{\partial \alpha'}\left[\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\right] \mid \Psi_{t-1}\right) = 0$$

Así la ecuación (8) es:

$$E(M \mid \Psi_{t-1}) = -\frac{1}{2}h_t\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}$$

La matriz de información Ξ, es simplemente la esperanza negativa del promedio del Hesiano sobre todas las observaciones, entonces :

$$\Xi_{\alpha\alpha} = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{2T} E\left(\frac{1}{h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\right)$$

su respectivo estimador esta dado por:

$$\widehat{\Xi}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\right)$$

Ahora si la función h_t es de orden lineal en los parámetros, se podría escribir de la forma:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + ... + \alpha_p y_{t-p}^2$$

podemos ver que la matriz de información y el vector gradiente tienen una forma simple. Sea $z_t = (1, y_{t-1}^2, ..., y_{t-p}^2)$ y $\alpha' = (\alpha_p, \alpha_p, ..., \alpha_p)$, podemos reescribir la función h_t descrita como:

$$h_t = z_t\alpha, \ \texttt{y} \ \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} = z_t$$

El vector gradiente será:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha} = \frac{1}{2h_t} z_t \left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right]$$

y el estimador de la matriz de información, esta dado por:

$$\widehat{\Xi}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{z_t' z_t}{h_t^2}\right)$$

3.4. Distribución del proceso lineal de primer orden ARCH(1)

En la búsqueda de determinar las condiciones para que el proceso sea estacionario y encontrar la distribución marginal de los *y's*, un argumento recursivo es requerido. Los momentos impares son cero por simetría y los momentos pares son calculados usando el siguiente teorema. En todos los casos se asume que el proceso comienza indefinidamente el pasado con 2r momentos finitos iniciales.

Teorema 1. *Para un entero r, el $2r$-ésimo momento para un proceso lineal ARCH(p), con $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$ existe si y s'olo si,*

$$\alpha_1^r \prod_{j=1}^{r}(2j-1) < 1$$

Demostración. Este resultado se mostrará para los casos $r = 2$, $r = 3$, y luego se presentará el caso general $r = m$. Sea

$$w_t' = (y_t^{2r}, y_t^{2(r-1)}, ..., y_t^2)$$

Se tiene que $E(w_t|\Psi_{t-1}) = \mathbf{b} + \mathbf{D}w_{t-1}$. A continuación, se mostrará que la matriz $\mathbf{D}$ de orden r x r es triangular superior y $\mathbf{b}$ es un vector constante de orden r x 1.

De probabilidad se tiene que dada una variable aleatoria $u \sim N(0, \sigma^2)$ se tiene:

$$E(u^{2r}) = \sigma^{2r} \prod_{j=1}^{r} (2j - 1) \tag{9}$$

En particular para el modelo ARCH, si $z_t \sim N(0, 1)$, entonces:

$$E(z_t^{2r}) = \prod_{j=1}^{r} (2j - 1) \quad \text{(9a)}$$

Para $r = 2$

$$w_t = \begin{pmatrix} y_t^4 \\ y_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^2 z_t^4 \\ (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) z_t^2 \end{pmatrix},$$

$$E(w_t|\Psi_{t-1}) = \begin{pmatrix} (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^2 E(z_t^4|\Psi_{t-1}) \\ (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) E(z_t^2|\Psi_{t-1}) \end{pmatrix}$$

aplicando (9a), se tiene que $E(z_t^4) = 3$. Por lo tanto:

$$E(w_t|\Psi_{t-1}) = \begin{pmatrix} 3\alpha_0^2 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_1^2 & 6\alpha_0\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1}^4 \\ y_{t-1}^2 \end{pmatrix}$$

Para $r = 3$

$$w_t = \begin{pmatrix} y_t^6 \\ y_t^4 \\ y_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^3 z_t^6 \\ (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^2 z_t^4 \\ (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) z_t^2 \end{pmatrix},$$

$$E(w_t|\Psi_{t-1}) = \begin{pmatrix} (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^3 E(z_t^6|\Psi_{t-1}) \\ (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^2 E(z_t^4|\Psi_{t-1}) \\ (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) E(z_t^2|\Psi_{t-1}) \end{pmatrix}$$

aplicando (9a)la $E(z_t^6) = 15$, y desarrollando el polinomio tenemos

$$= \begin{pmatrix} 15 \\ 3\alpha_0^2 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15\alpha_1^2 & 45\alpha_0\alpha_1^2 & 45\alpha_0^2\alpha_1 \\ 0 & 3\alpha_1^2 & 6\alpha_0\alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1}^6 \\ y_{t-1}^4 \\ y_{t-1}^2 \end{pmatrix}$$

Ahora dado que la distribución condicional de y es normal y aplicando (9a) tenemos:

$$\begin{aligned} E(y_t^{2m}|\Psi_{t-1}) &= h_t^{2m} \prod_{j=1}^{r}(2j-1) \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^m \prod_{j=1}^{r}(2j-1)) \end{aligned} \tag{10}$$

Expandiendo esta expresión, se establece que el momento es una combinación lineal de w_{t-1}. Luego

$$\begin{aligned} E(w_t \mid \Psi_{t-2}) &= E\left[E\left(w_t \mid \Psi_{t-1}\right) \mid \Psi_{t-2}\right] \\ &= E\left[(b + Dw_{t-1}) \mid \Psi_{t-2}\right] \\ &= b + DE(w_{t-1} \mid \Psi_{t-2}) \\ &= b + D(b + Aw_{t-2}) \\ &= b + Db + D^2 w_{t-2} \end{aligned}$$

en general

$$E(w_t \mid \Psi_{t-k}) = (I + D + D^2 + ... + D^{k-1})b + D^k w_{t-k}$$

Dado el supuesto de que la serie comienza indefinidamente en el pasado con $2r$ momentos, el limite cuando k tiende a infinito existe si y solo si los valores propios de D se encuentran dentro del circulo unitario.

El limite puede escribirse como:

$$\text{lím}_{k\to\infty} E(w_t \mid \Psi_{t-k}) = (I - D)^{-1} b$$

El cual no depende de las variables condicionales y ni de t. Luego, es una expresión para los momentos estacionarios de la distribución condicional de y.

$$E(w_t) = (I - D)^{-1} b$$

Con lo anterior solamente establecemos que la condición en el teorema es necesario y suficiente tener todos los valores propios dentro del circulo unitario. Como la matriz será triangular superior, los elementos de la diagonal son los valores propios. De (7) se tiene que los elementos de la diagonal son simplemente

$$\alpha_1^m \prod_{j=1}^{m}(2j-1) = \prod_{j=1}^{m} \alpha_1(2j-1) \approxeq \theta_m \quad \text{para m=1,...,r}$$

Si $\theta_r \geq 1$, los valores propios no se encuentran en el circulo unitario. También se muestra que si $\theta_r < 1$, entonces $\theta_m < 1$ para todo $m < r$. Nótese que θ_m es un producto de m factores que son crecientes de forma monótona. Si el m-ésimo factor es más grande que uno, entonces θ_{m-1} necesariamente mas pequeño que θ_m.

Si el m-ésimo factor es menor que uno, todos los otros factores también serán menores que uno y luego, θ_{m-1}también es menor que uno y tiene todos los factores menores que uno. Por lo anterior se establece que una condición necesaria y suficiente para todos los elementos de la diagonal es que sean menores que uno, es decir, $\theta_r < 1$. □

El teorema fue facilmente usado para encontrar el segundo y cuarto momento de un proceso de primer orden. La condición para que la varianza sea finita es simplemente que $\alpha_1 < 1$, mientras que para tener un cuarto momento finito se requiere que $3\alpha_1 < 1$. Con la verificación de estas condiciones, los momentos pueden ser calculados con la formula $E(w_t \mid \Psi_{t-k}) = (I-D)^{-1}b$

Teorema 2. *El proceso lineal ARCH(p), con* $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, ..., \alpha_p \geq 0$ *tiene covarianza estacionaria si y solo si, la ecuación caracteristica asociada, tiene todas las raices fuera del circulo unitario. La varianza estacionaria esta dada por* $E(y_t^2) = \alpha_0 / \left(1 - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\right)$

Demostración. Sea $w_t' = (y_t^2, y_{t-1}^2, ..., y_{t-p}^2)$

Luego en terminos de la matriz D,

$$E(w_t|\Psi_{t-1}) = b + Dw_{t-1}$$

donde $b' = (\alpha_0, 0, ..., 0)$ y

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_p & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando esperanzas sucesivamente, se obtiene:

$$E(w_t \mid \Psi_{t-k}) = (I + D + D^2 + ... + D^{k-1})b + D^k w_{t-k}$$

Debido a que la serie comienza indefinidamente en el pasado, tiene con varianza finita, si y solo si, todos los valores propios se encuentran dentro del circulo unitario, el limite existe y está dado por:

$$\lim_{k\to\infty} E(w_t|\Psi_{t-1}) = (I-D)^{-1}b$$

Como este no depende de condiciones iniciales o de t, este vector es la varianza común para todo t. Esta condición es equivalente a la condicón que todas las raices de la ecuación caracteristica $(1-\alpha_1 z - ... - \alpha_p z^p)$, formada por los α's, se encuentran fuera del circulo unitario. Anderson (1958). Finalmente, el limite de el primer elemento puede ser re-escrito como:

$$E(y_t^2) = \frac{\alpha_0}{\left(1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\right)}$$

□

4. Aplicación al caso colombiano

Ahora se presentará el modelado de la variable Inflación para el caso colombiano, con la metodología que sirvió base de este documento, los datos fueron tomados del Banco de la Republica de Colombia.

La definición más usual de inflación nos dice que inflación es el crecimiento continuo y generalizado de los precios de los bienes y servicios existentes en una economía. Otras definiciones la explican como el movimiento persistente al alza del nivel general de precios o disminución del poder adquisitivo del dinero.

En la figura 1. se aprecian los cambios logarítmicos de la serie de datos correspondiente a la variable inflación donde claramente se aprecia que es estacionaria en media pero no en volatilidad. En ella se observa periodos de calma y periodos de turbulencia. Por lo anterior se aplicará la metodología de Box-Jenkins para ajustar el modelo ARIMA, y posteriormente se complementará con modelos ARCH o GARCH.

En el cuadro 1. se presentan los coeficientes obtenidos para el modelamiento de los retornos logarítmicos de la variable Inflación, el modelo ajustado corresponde a una modelo $ARIMA(24,1,18)$.

Figura 1: Retornos logarítmicos de la variable Inflación

AR(1)	-0.4773	MA(1)	-0.0417
AR(4)	-0.4706	MA(4)	-0.5127
AR(12)	0.3592	MA(5)	-0.1643
AR(13)	-0.1512	MA(11)	0.0868
AR(17)	0.2532	MA(12)	-0.2729
AR(19)	-0.1064	MA(16)	0.2512
AR(22)	-0.2222	MA(17)	0.2856
AR(24)	0.17377	MA(18)	0.1512

Tabla 1: Coeficientes del modelo ARIMA (24,1,18)

En la figura 2. se aprecian los residuales del modelo $ARIMA(24, 1, 18)$ para la serie Inflación, la cual muestra periodos de baja variabilidad (por ejemplo alrededor de la observación 400) y otros de alta variabilidad (alrededor de la observación 100). Lo anterior es evidencia de no homocedasticidad.

En el cuadro 2. se presentan los coeficientes del modelo ARCH(3). Y finalmente, en la figura 3. se muestra el pronóstico de la variable Inflación, (y sus intervalos de confianza, con el fin de compararlos con el modelo ARCH,) los cuales se obtienen a partir del pronóstico del retorno logarítmico del modelo ARMA estimado. Los intervalos de confianza del pronóstico se obtienen a partir del pronóstico de volatilidad del modelo ARCH (3) estimado. De esta gráfica podemos resaltar el hecho que los intervalos de confianza generados por el modelo ARIMA (`li.arma` y `ls.arma`) son superiores a los intervalos generados por el modelo GARCH (`li.garch` y `ls.garch`), este comportamiento s'olo se tiene en las primeras observaciones, al correr los pronósticos en tiempo futuro los intervalos se invierten, esto quiere decir,

Figura 2: Residuales del Modelo ARIMA(24,1,18) para la variable Inflación

que a medida que pasa el tiempo los intervalos del modelo GARCH son superiores a los intervalos del modelo ARIMA, igual al proceso anterior.

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Pr > $\|t\|$
Intercept	1	0.001524	0.0000939	16.24	<.0001
ARCH0	1	0.000027	9.6172E-7	28.20	<.0001
ARCH1	1	0.5540	0.0587	9.43	<.0001
ARCH2	1	0.1927	0.0458	4.21	<.0001
ARCH3	1	3.1519	0.1280	24.63	<.0001

Tabla 2: Coeficientes del modelo ARCH (3)

A. Desarrollo de la varianza no-condicional de un ARCH(p)

Primero se mostrará el caso ARCH(2)

$$
\begin{aligned}
V(y_t) &= E(y_t^2) \\
&= E(z_t^2 h_t) \\
&= E(z_t^2)E(h_t) \\
&= E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2)
\end{aligned}
$$

Figura 3: Pronóstico de la variable Inflación

De lo anterior tenemos que, para todo $t \rightarrow E(y_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}^2) + \alpha_2 E((y_{t-2}^2))$ y en particular para $t-1$ y $t-2$

$$E(y_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-2}^2) + \alpha_2 E((y_{t-3}^2)), \ \ \texttt{y} E(y_{t-2}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-3}^2) + \alpha_2 E((y_{t-4}^2))$$

Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned} E(y_t^2) &= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2}^2 y_{t-3}^2) + \alpha_2(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-3}^2 + \alpha_2 y_{t-4}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1^2 y_{t-2}^2 + 2\alpha_1\alpha_2 y_{t-3}^2 + \alpha_2^2 y_{t-4}^2 \end{aligned}$$

Reemplazando $y_{t-2}^2, y_{t-3}^2, y_{t-4}^2$ obtenemos de nuevo

$$\begin{aligned} E(y_t^2) &= \alpha_0 + \alpha_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_0(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + \alpha_1^3 y_{t-3}^2 + 3\alpha_1^2\alpha_2 y_{t-4}^2 + 3\alpha_1\alpha_2^2 y_{t-5}^2 + \alpha_2^3 y_{t-6}^2 \\ &= \sum_{j=0}^{2} \alpha_0(\alpha_1 + \alpha_2)^j + (\alpha_1^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2 B + 3\alpha_1\alpha_2^2 B^2 + \alpha_2^3 B^3) y_{t-3}^2 \\ &= \ldots \texttt{(En general para k)} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_0(\alpha_1 + \alpha_2)^j + (\alpha_1 + \alpha_2 B)^k y_{t-k}^2 \end{aligned}$$

Llevando al limite cuando $k \rightarrow \infty$

$$
\begin{aligned}
E(y_t^2) &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_0(\alpha_1 + \alpha_2)^j \\
&= \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)}
\end{aligned}
$$

Para el caso ARCH(P), desarrollará teniendo en cuenta el caso anterior

$$
\begin{aligned}
V(y_t) &= E(y_t^2) \\
&= E(z_t^2 h_t) \\
&= E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + ... + \alpha_p y_{t-p}^2) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}^2) + ... + \alpha_p E(y_{t-p}^2) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-2}^2) + ... \\
&+ \alpha_p E(y_{t-p-1}^2) + ... + \alpha_p(\alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-p-1}^2) + ... + \alpha_p E(y_{t-2p}^2)) \\
&= \alpha_0 + \alpha_0\alpha_1 + ... + \alpha_0\alpha_p + \alpha_1^2[\alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-3}^2) + ... + \alpha_p E(y_{t-p-2}^2)] + ... + \alpha_1\alpha_p[\alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-p-2}^2) + ... + \alpha_p E(y_{t-p-2}^2 \\
&= ...\texttt{Iterando } k\texttt{-veces y tomando el limite cuando} k \to \infty \\
&= \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right]^j \\
&= \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}
\end{aligned}
$$

B. Desarrollo de la varianza no-condicionadal de un GARCH(1,1)

$$
\begin{aligned}
V(y_t) &= E(y_t^2)\\
&= E(z_t^2(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}))\\
&= E(z_t)E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})\\
&= E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})\\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}^2) + \beta_1 E(h_{t-1}))\\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2}) + \beta_1 E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2})\\
&= \alpha_0 + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\beta_1 + [\alpha_1^2 + \alpha_1\beta_1]E(y_{t-2}^2) + [\beta_1^2 + \alpha_1\beta_1]E(h_{t-2})\\
&= \alpha_0 + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\beta_1 + \alpha_0\alpha_1^2 + \alpha_0\alpha_1\beta_1 + [\alpha_1^3 + \alpha_1^2\beta_1]E(y_{t-3}^2) + [\alpha_1^2\beta_1 + \alpha_1\beta_1^2]E(h_{t-3}^2) + \alpha_0\beta_1^2 + \alpha_0\alpha_1\beta_1 + [\alpha_1\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta\\
&= \text{...}\texttt{Iterando } k\texttt{-veces y tomando el limite cuando}k \to \infty\\
&= \alpha_0 \left[\sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_1 + \beta_1)^j\right]\\
&= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}
\end{aligned}
$$

Agradecimientos

Agradecimiento muy especial a los pares del articulo, dados los valiosos aportes que a el hicieron.

Referencias

Anderson, T. W. (1958), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Jhon Wiley and Sons.

Bollerslev, T. (1986), 'Generalizad autorregresive condicional heterocedasticity.', *Journal of Econometrics* **31**, 307–327.

Box, G. & Jenkins, G. (1976), *Introduction to Time Series*, Prentice Hall.

Engle, R. F. (1982), 'Autorregresive conditional heterocedasticity with estimates of the variance of the united kingdom inflation', *Econométrica* **50**, 987–1007.