

Representación compleja de los gráficos Alfa para la lógica implicativa con conjunción

Complex Representation of Alpha Graphs for Implicative Logic with Conjunction

Arnold Oostra^{1,a}

Resumen. La lógica implicativa con conjunción, que es el segmento de la lógica proposicional intuicionista determinado por los conectivos \wedge y \rightarrow , tiene un sistema de gráficos existenciales al estilo de los gráficos Alfa de Peirce. En este artículo se propone una definición formal de estos diagramas como objetos matemáticos, más aún, como objetos geométricos en el plano complejo.

Palabras claves: Lógica implicativa con conjunción; álgebras de Hilbert; gráficos existenciales Alfa; curvatura total; isotopía.

Abstract. For implicative logic with conjunction, which is the segment of intuitionistic propositional logic determined by the connectives \wedge and \rightarrow , there exists a system of existential graphs in the style of Peirce's Alpha graphs. In this paper we propose a formal definition of these diagrams as mathematical objects, moreover, as geometrical objects on the Complex plane.

Keywords: Implicative logic with conjunction; Hilbert algebras; existential Alpha graphs; total curvature; isotopy.

Mathematics Subject Classification: 03B60, 57N37.

Recibido: diciembre de 2018

Aceptado: marzo de 2019

1. Introducción

Los sistemas lógicos, en especial los proposicionales, tienen muchas presentaciones diversas aunque equivalentes en tanto permiten realizar las mismas deducciones por diferentes caminos. De manera tradicional tales presentaciones se clasifican en dos grupos: las versiones sintácticas son sistemas formales constituidos por fórmulas sujetas a reglas y a las cuales no se asigna ningún significado o interpretación; en las versiones semánticas, por el contrario, se elabora una interpretación de las fórmulas en alguna estructura.

Aunque aún está en sus etapas iniciales, se está abriendo paso una tercera forma de desarrollar la lógica que consiste en presentar las fórmulas mediante

¹Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

^aaaoostra@gmail.com, noostra@ut.edu.co

diagramas bidimensionales. Sin duda, uno de los representantes más significativos en esta clase es el sistema de los *gráficos existenciales* propuesto por Charles S. Peirce a partir de 1896 para la lógica clásica [16, 21, 22]. Los gráficos Alfa de Peirce corresponden a la lógica proposicional mientras el sistema Beta corresponde a la lógica de primer orden o cálculo de predicados. De manera reciente, se ha propuesto una variante del sistema gráfico peirceano para la lógica intuicionista [12, 13, 14] que de manera automática determina sistemas de gráficos existenciales para varios de los segmentos de esa lógica. Por distintas razones teóricas, el segmento más sencillo que posee gráficos al estilo de Peirce es aquel determinado por los conectivos \wedge y \rightarrow . Puesto que el segmento dado por el conectivo \rightarrow se llama lógica implicativa [15], el nombre adecuado para el sistema dado por estos dos conectivos es *lógica implicativa con conjunción* [4].

Desde la década de los 60 del siglo XX se han elaborado demostraciones de la equivalencia entre determinado sistema lógico formal y cierto sistema de gráficos existenciales [16, 18, 22]. En estas demostraciones, sin embargo, nunca se hace una reflexión sobre el carácter de los dibujos que conforman los gráficos existenciales. ¿Tienen existencia matemática? ¿Es posible construir el conjunto de todos los gráficos de cierto sistema? Hasta donde se ha podido verificar, esta cuestión se considera por primera vez en el histórico artículo [1], publicado en el año 2000. Allí se consideran dos definiciones de los gráficos Alfa, una algebraica y una geométrica [18], si bien esta última presenta una inexactitud en el artículo original, señalada y corregida en el trabajo [9]. Dado que los gráficos tienen una esencia geométrica bidimensional, no parece tener mucho sentido formular definiciones algebraicas de estos objetos.

Este artículo está encaminado a definir de manera geométrica en el plano complejo los gráficos existenciales para la lógica implicativa con conjunción. En la primera parte se describe esta lógica en sus tres versiones equivalentes: semántica, sintáctica y gráfica, esta porción es un resumen del artículo [4] y del trabajo [7]. En la segunda parte de este artículo se estudian las nociones requeridas para la representación geométrica de los gráficos implicados y se llega a una definición formal de los mismos, resolviendo así el problema planteado para esta lógica particular. En la tercera parte se muestra la dificultad que presenta el mismo problema para la lógica intuicionista, de suerte que la definición formal de los gráficos para esa lógica proposicional queda como un problema abierto. Estas dos últimas partes del artículo son del todo originales, si bien se basan en el desarrollo del trabajo [9], correspondiente a la lógica clásica.

2. La lógica implicativa con conjunción

La *lógica implicativa con conjunción* (abreviado LIC en adelante) es una lógica proposicional en la cual solo se consideran los conectivos de conjunción e implicación, con las mismas reglas básicas que los rigen en el cálculo proposicional clásico (CPC) y en el cálculo proposicional intuicionista (CPI).

Aunque de apariencia simple, la LIC tiene al menos tres presentaciones en

esencia diferentes: una versión sintáctica, una versión semántica y una versión gráfica al estilo de los gráficos existenciales de C. S. Peirce.

2.1. Sintaxis

En tanto sistema deductivo formal, la LIC se desarrolla con exactitud como la lógica proposicional clásica [2], dejando solo los axiomas de la conjunción y la implicación. El conjunto de todos los resultados o teoremas de la LIC está contenido de manera estricta en el de la CPI, que a su vez está contenido de forma estricta en el correspondiente conjunto de teoremas del CPC.

El alfabeto para la LIC es la unión disjunta del conjunto \mathcal{L} de las letras proposicionales, los conectivos $\{\rightarrow, \wedge\}$ y los paréntesis. Las fórmulas se definen de manera inductiva y se eliminan los paréntesis que solo encierran una letra. Como axiomas se toman las siguientes fórmulas.

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
4. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
5. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

La única regla de inferencia de la LIC es *modus ponens (MP)* que de las fórmulas $\alpha \rightarrow \beta$ y α permite pasar a la fórmula β . Una fórmula φ de la LIC *se deduce* de un conjunto de fórmulas Σ , lo cual se simboliza

$$\Sigma \vdash_{\text{LIC}} \varphi,$$

si existe una sucesión finita $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ de fórmulas de la LIC, con $\varphi_n = \varphi$, tal que cada uno de los términos φ_i tiene la forma de un axioma, o pertenece a Σ , o bien se deduce de dos términos anteriores de la sucesión por *MP*. Un *teorema* de la LIC es una fórmula τ que se deduce del conjunto vacío de premisas, lo cual se denota $\vdash_{\text{LIC}} \tau$.

Ejemplo 2.1. Las deducciones siguientes se obtienen con facilidad de los axiomas.

1. $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash_{\text{LIC}} \alpha \rightarrow \gamma$
2. $\vdash_{\text{LIC}} \alpha \rightarrow \alpha$
3. $\alpha \wedge \beta \vdash_{\text{LIC}} \beta \wedge \alpha$
4. $\alpha \vdash_{\text{LIC}} \alpha \wedge \alpha$

En la LIC también es válido el siguiente *teorema de la deducción*.

Afirmación 2.2. Sea Σ un conjunto de fórmulas y sean α, β fórmulas.

$$\Sigma \vdash_{\text{LIC}} \alpha \rightarrow \beta \quad \text{si y solo si} \quad \Sigma, \alpha \vdash_{\text{LIC}} \beta.$$

Ejemplo 2.3. Casi de inmediato se siguen las deducciones siguientes.

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash_{\text{LIC}} (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$
2. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \vdash_{\text{LIC}} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$

A partir de la afirmación 2.2 se puede probar el siguiente hecho notable, que relaciona los dos conectivos de esta lógica mediante una adjunción.

Afirmación 2.4. Sean α, β, γ fórmulas de la LIC.

$$\alpha \vdash_{\text{LIC}} \beta \rightarrow \gamma \quad \text{si y solo si} \quad \alpha \wedge \beta \vdash_{\text{LIC}} \gamma.$$

Aunque se hayan adoptado los axiomas de la lógica clásica para la conjunción e implicación, en la LIC no se pueden probar todas las propiedades de estos conectivos que se cumplen en el CPC. Por ejemplo

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \not\vdash_{\text{LIC}} \alpha,$$

pero para asegurar que esta deducción es imposible se requiere una semántica para el sistema formal.

2.2. Semántica

Una semántica algebraica para una lógica es una clase de estructuras algebraicas en las cuales se pueden “leer” o interpretar las fórmulas y que permite decidir su validez. Cualquier semántica algebraica de la LIC contiene de manera estricta la del CPI, que a su vez contiene de forma estricta la del CPC. Así que, en cierto sentido, la semántica se comporta al revés que la sintaxis.

Para interpretar una fórmula cualquiera de la LIC las letras proposicionales se asocian con elementos del álgebra y se requieren solo dos operaciones binarias para los conectivos. Una clase adecuada para esta lógica está dada por los semirretículos de Hilbert, un tipo especial de álgebras de Hilbert distinguida con ese nombre en [4]. Un *álgebra de Hilbert* es una estructura $(H, \rightarrow, 1)$ que satisface los axiomas siguientes.

1. $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$
2. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$
3. $a \rightarrow 1 = 1$
4. Si $a \rightarrow b = 1$ y $b \rightarrow a = 1$ entonces $a = b$

En toda álgebra de Hilbert la relación binaria definida como

$$a \leq b \quad \text{si} \quad a \rightarrow b = 1$$

es una relación de orden, para la cual la constante 1 es el elemento máximo.

Respecto a su orden natural, un álgebra de Hilbert puede ser un semirretículo inferior si cada par de elementos a, b tiene una máxima cota inferior, denotada $a \wedge b$. Un *semirretículo de Hilbert* es un álgebra de Hilbert que es un semirretículo inferior respecto a su orden inducido y que además satisface la condición siguiente, que corresponde a la afirmación 2.4:

$$a \leq b \rightarrow c \quad \text{si y solo si} \quad a \wedge b \leq c.$$

En el mencionado artículo [4] hay un ejemplo de un álgebra de Hilbert que es semirretículo pero no cumple esta condición adicional.

La semántica algebraica del CPI está dada por las álgebras de Heyting [11]. Toda álgebra de Heyting es un semirretículo de Hilbert, luego en particular los abiertos de cualquier espacio topológico, ordenados por la inclusión, constituyen un semirretículo de Hilbert. Pero todo conjunto ordenado lineal con máximo 1 y sin mínimo es un semirretículo de Hilbert que no es un álgebra de Heyting, con la operación \rightarrow definida como sigue.

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b; \\ b & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Por otra parte, la semántica algebraica del CPC está dada por las álgebras booleanas. Toda álgebra booleana es un álgebra de Heyting, luego también es un semirretículo de Hilbert. Esto se puede ver de manera directa definiendo la operación \rightarrow como

$$a \rightarrow b = a' \vee b,$$

en este caso el orden inducido es el orden propio del álgebra booleana. Este conjunto ordenado siempre es semirretículo inferior con su operación \wedge .

Para precisar estas estructuras como una semántica de la LIC se considera una función o *valuación* $v : \mathcal{L} \rightarrow H$ del conjunto de las letras proposicionales a cualquier semirretículo de Hilbert H . Los conectivos de esta lógica corresponden a las operaciones del álgebra, luego la valuación v da lugar a una única función extensión, denotada \bar{v} , del conjunto de todas las fórmulas en H . Ahora una fórmula φ de la LIC es *consecuencia* de un conjunto de fórmulas Σ , lo cual se simboliza

$$\Sigma \models_{sH} \varphi,$$

si para cualquier valuación v tal que $\bar{v}[\sigma] = 1$ para cada $\sigma \in \Sigma$ también se tiene $\bar{v}[\varphi] = 1$. Una fórmula τ de la LIC es *válida* si es consecuencia del conjunto vacío, es decir, si $\bar{v}[\tau] = 1$ para cualquier valuación v .

Los resultados siguientes precisan la afinidad existente entre las relaciones de deducción y consecuencia, y así, entre la sintaxis y la semántica de la LIC.

Afirmación 2.5 (Teorema de validez). Sea Σ cualquier conjunto de fórmulas de la LIC y sea φ una fórmula.

$$\text{Si } \Sigma \underset{\text{LIC}}{\vdash} \varphi \text{ entonces } \Sigma \underset{\text{sH}}{\models} \varphi.$$

Para establecer este hecho basta verificar que todos los axiomas del sistema son válidos y que la regla *MP* preserva la validez, esto es, que $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \underset{\text{sH}}{\models} \beta$. Con ello cualquier valuación que asigna 1 a las premisas también lo hace a todas las fórmulas de la deducción, en particular a la conclusión φ .

Afirmación 2.6 (Teorema de completitud). Sea φ una fórmula de la LIC.

$$\text{Si } \underset{\text{sH}}{\models} \varphi \text{ entonces } \underset{\text{LIC}}{\vdash} \varphi.$$

De esta manera, los teoremas de la LIC son exactamente las fórmulas válidas. Para demostrar la afirmación 2.6 se considera que dos fórmulas α, β están relacionadas si $\alpha \underset{\text{LIC}}{\vdash} \beta$ y $\beta \underset{\text{LIC}}{\vdash} \alpha$. Esta es una relación de equivalencia compatible con los conectivos, de tal manera que el conjunto cociente \mathfrak{L} es un semirretículo de Hilbert. El elemento máximo 1 de \mathfrak{L} es el conjunto de todos los teoremas, luego basta considerar la valuación canónica que asigna a cada fórmula su clase de equivalencia. Si cierta fórmula es válida entonces su imagen por esta valuación es 1, luego la fórmula pertenece al máximo y es un teorema.

En verdad, las pruebas de estos teoremas de validez y completitud siguen las mismas líneas que los resultados correspondientes en el CPC [2] y el CPI [11]. La estructura cociente obtenida del conjunto de fórmulas se conoce como *álgebra de Lindenbaum*: en el CPC es un álgebra booleana y en el CPI es un álgebra de Heyting. En el caso especial del CPC se establece el teorema de completitud de manera plena, para cualquier conjunto Σ de premisas.

Sea H un conjunto ordenado lineal con máximo 1 y sean $a, b \in H$ elementos tales que $b < a < 1$. Este es un semirretículo de Hilbert, luego la función $v : \{p, q\} \rightarrow H$ definida como $v(p) = a, v(q) = b$ es una valuación. Ahora

$$\bar{v}[(p \rightarrow q) \rightarrow p] = (a \rightarrow b) \rightarrow a = b \rightarrow a = 1$$

mientras $\bar{v}[p] = a \neq 1$, luego $(p \rightarrow q) \rightarrow p \underset{\text{sH}}{\not\models} p$. Por el teorema de validez se concluye entonces que $(p \rightarrow q) \rightarrow p \underset{\text{LIC}}{\not\vdash} p$.

Este ejemplo ilustra la forma en que las versiones sintáctica y semántica de la LIC se complementan de manera mutua. Pero hay una presentación del todo diferente de esta lógica, en la cual las proposiciones no se representan por fórmulas sino mediante diagramas bidimensionales. Ese es el tema estudiado en la próxima sección.

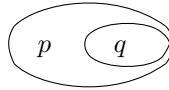
2.3. Gráfica

Como se señaló en la introducción, los gráficos existenciales fueron creados por C. S. Peirce a fines del siglo XIX y se pueden entender como una versión gráfica

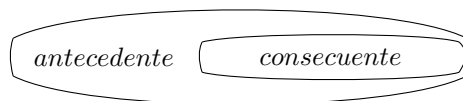
de la lógica clásica. A comienzos del siglo XXI se introdujeron gráficos existenciales para la lógica intuicionista [12, 13] y, como se mostrará a continuación, también para la LIC [7]. Muy distinto a lo que sucede con las presentaciones anteriores, los gráficos para el CPC y la LIC son subconjuntos propios y diferentes del conjunto de gráficos Alfa intuicionistas correspondientes al CPI.

En los gráficos Alfa clásicos, inventados por Peirce, los diagramas se desarrollan sobre una hoja bidimensional que él llamó *hoja de aserción*. Escribir una proposición sobre la hoja significa afirmarla; escribir dos o más significa afirmarlas todas; en general, un gráfico dibujado sobre la hoja se considera afirmado. A fin de negar una proposición o un gráfico basta encerrarlo con una curva cerrada simple, o curva de Jordan, llamada *corte* por Peirce. En este sistema de representación entonces se consideran dos conectivos fundamentales: la conjunción, sin signo específico porque se representa yuxtaponiendo los diagramas de los términos conjugados; y la negación, cuyo signo es el corte que rodea el diagrama del término negado. Los demás conectivos se obtienen de estos dos de la forma conocida en el CPC. Por ejemplo, en esa lógica la implicación $\alpha \rightarrow \beta$ es equivalente a $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ luego se representa de manera gráfica con dos cortes encajados: el antecedente se dibuja entre los dos cortes y el consecuente dentro del corte interno.

Con estos preliminares es claro que para desarrollar la LIC mediante gráficos al estilo de Peirce solo se requiere un signo para la implicación. Se propone el siguiente diagrama, que de hecho es una variante del signo de la implicación en los gráficos Alfa clásicos y que aparece de manera ocasional en los manuscritos de Peirce.

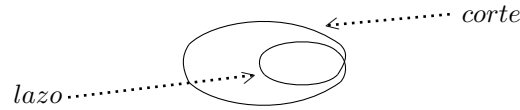


Aquí p es el antecedente y q el consecuente así que, en general:



De manera más formal, los elementos con los cuales se elaboran los gráficos Alfa para la LIC son los siguientes.

- La superficie sobre la cual se escribe, denominada *hoja de aserción*.
- El conjunto \mathcal{L} de las *letras* proposicionales.
- Curvas llamadas *rizos*, que están compuestas por dos curvas cerradas simples que se intersecan en un solo punto y una de las cuales está en el interior de la otra.



La curva exterior de un rizo se denomina *corte* y la interior, *lazo*; la porción de la hoja comprendida entre el corte y el lazo se denomina *área exterior* del rizo y la porción rodeada por el lazo, *área interior*.

Las *reglas de formación* de este sistema de gráficos corresponden a los pasos de la definición por recurrencia de las fórmulas para una lógica proposicional. Se conviene que cualquier porción acotada, simplemente conexa y sin marcas de la hoja de aserción es un gráfico; una letra escrita en la hoja de aserción es un gráfico; también la yuxtaposición de dos o más gráficos dados es un gráfico; por fin, dos gráficos escritos sobre la hoja de aserción, uno en el área exterior y otro en el área interior de un rizo dibujado, constituyen un gráfico. De manera específica, si A y B son gráficos entonces el siguiente es un gráfico.

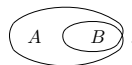


En la yuxtaposición la ubicación relativa de los gráficos es irrelevante y en el trazado del rizo no importa la forma específica del mismo. Así, si dos gráficos se pueden deformar de manera continua el uno en el otro entonces se consideran iguales.

La correspondencia entre los gráficos elaborados y las fórmulas proposicionales se deriva de la siguiente interpretación de los gráficos.

- La hoja de aserción se interpreta como lo verdadero.
- Dibujar un gráfico sobre la hoja de aserción significa afirmarlo. Escribir una letra significa afirmar la proposición que ella representa. Dibujar dos gráficos sobre la hoja de aserción significa afirmarlos ambos.
- Dibujar un rizo significa afirmar la implicación cuyo antecedente es el gráfico que está en el área exterior y cuyo consecuente es el gráfico que está en el área interior.

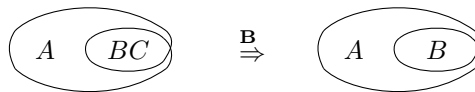
A partir de esta interpretación resulta evidente la traducción entre las fórmulas de la LIC y los gráficos Alfa para la misma lógica: las letras son las mismas; la fórmula $A \wedge B$ corresponde al gráfico AB ; la fórmula $A \rightarrow B$ corresponde al gráfico



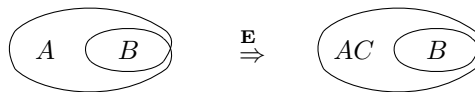
Ahora se conviene que, en general, un *área* es una región de la hoja limitada por curvas, sean estas cortes o lazos. Un área es *par* o *impar* según el número de curvas que la rodean, contando por igual los cortes y los lazos.

Los gráficos existenciales no son solo un sistema de representación gráfico de las fórmulas lógicas, su creador sobre todo diseñó un sistema de reglas de inferencia gráfica que permiten desarrollar todas las demostraciones lógicas pertinentes. Las *reglas de transformación* de los gráficos Alfa para la LIC son adaptaciones de las de Peirce y están dadas como sigue.

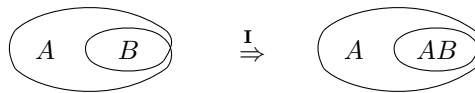
(B) Borramiento. En un área par está permitido borrar cualquier gráfico.



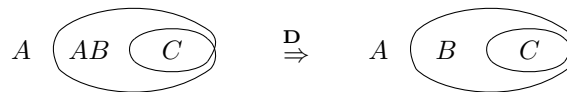
(E) Escritura. En un área impar está permitido dibujar cualquier gráfico.



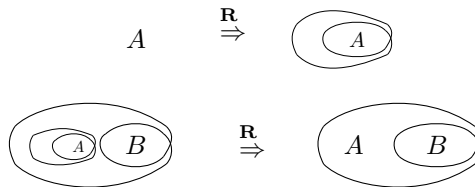
(I) Iteración. Está permitido iterar o repetir cualquier gráfico en su misma área o en áreas encerradas por cortes o lazos adicionales contenidos en ella. Aquí “adicional” significa que las curvas dentro de las cuales se copia no hacen parte del gráfico a iterar.



(D) Desiteración. Está permitido borrar cualquier gráfico que pudiera haber sido escrito por iteración.



(R) Rizado. Está permitido dibujar o borrar un rizo con el área exterior vacía alrededor de cualquier gráfico, en cualquier área.



En esencia, estas reglas son las mismas del sistema Alfa clásico propuesto por Peirce. La única regla diferente es la de rizado, que reemplaza la de corte doble en los gráficos clásicos.

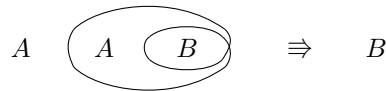
Ahora un gráfico G se transforma en el gráfico H , lo cual se simboliza

$$G \Rightarrow H,$$

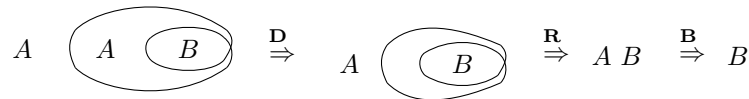
si existe una sucesión finita G_1, G_2, \dots, G_n de gráficos, con $G_1 = G$ y $G_n = H$, tal que para cada índice i ($1 < i \leq n$) se puede pasar del gráfico G_{i-1} al gráfico G_i aplicando alguna de las cinco reglas de transformación. Siguen unos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 2.7 (*Modus ponens*). $A, A \rightarrow B \Rightarrow B$

Enunciado gráfico:



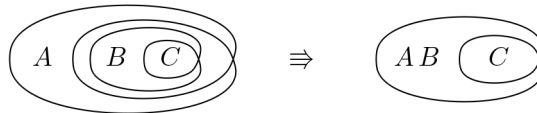
Demostración.



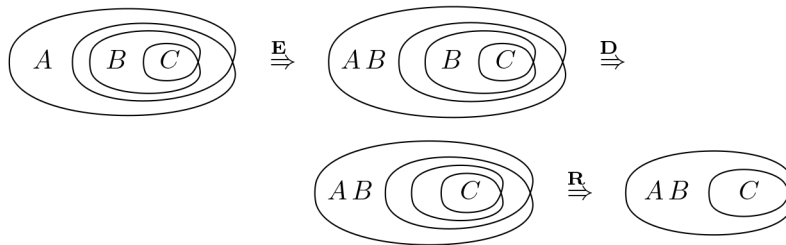
□

Ejemplo 2.8. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$

Enunciado gráfico:



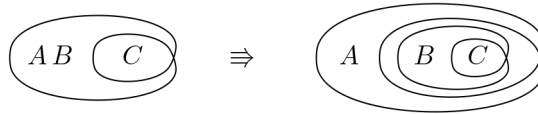
Demostración.



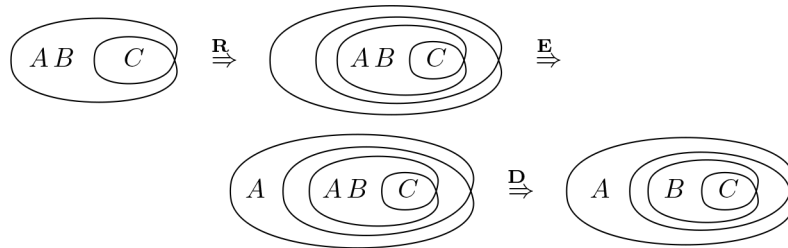
□

Ejemplo 2.9. $(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Enunciado gráfico:



Demostración.



Con esta representación bidimensional y las correspondientes reglas de transformación se puede desarrollar la LIC de manera del todo gráfica. La demostración de que este sistema de gráficos existenciales Alfa es equivalente a la LIC se desarrolló con todo detalle en el trabajo [7]. Sin embargo, hay un asunto de fundamentación teórica que no se trató en ese escrito y que constituye el tema de la segunda parte de este artículo.

3. Representación en el plano complejo

Una demostración rigurosa de la equivalencia entre la versión sintáctica de la LIC y los gráficos Alfa para la misma consistiría en establecer una función biyectiva entre el conjunto de las fórmulas y el conjunto de los gráficos, que además preserve las relaciones de deducción en ambos sentidos. La pregunta inmediata es: ¿Cuál es el conjunto de los gráficos Alfa para la LIC? ¿Es posible definirlo de forma rigurosa? Aunque tal proyecto se podría emprender de manera algebraica como está sugerido en [1], la naturaleza de los gráficos existenciales es geométrica, luego hay razones de peso para intentar una definición topológica.

En el caso particular de los gráficos Alfa para la LIC, resulta una conexión inesperada entre la lógica formal y la variable compleja.

3.1. Cómo representar un rizo

Según lo indicado en la sección precedente, en la representación de los gráficos Alfa clásicos solo es necesario dibujar las letras y los cortes.

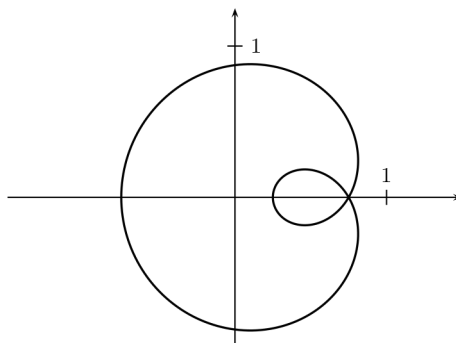
Como hoja de aserción se toma el plano complejo \mathbb{C} con toda su estructura algebraica y métrica. Para representar en puntos diferentes n letras, contando posibles repeticiones, basta tomar una función inyectiva $F_n \rightarrow \mathbb{C}$ siendo $F_n = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto finito con n elementos. A fin de asignar las letras a los puntos elegidos se define una función auxiliar $\pi : F_n \rightarrow \mathcal{L}$ en el conjunto de las letras proposicionales, esta función no necesita ser inyectiva porque una misma letra puede aparecer varias veces en diferentes lugares del mismo gráfico.

Un corte de los gráficos Alfa clásicos es una curva cerrada simple, que se puede definir de manera sencilla como una función continua e inyectiva $S^1 \rightarrow \mathbb{C}$. Aquí la circunferencia unidad S^1 tiene la topología que hereda como subespacio de \mathbb{C} . Para dibujar dos cortes se considera la suma topológica o coproducto de sendas circunferencias unidad. Una única función $S^1 + S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ es continua si y solo si cada función restringida lo es, y es inyectiva si y solo si cada función restringida es inyectiva y además sus imágenes son disjuntas. De esta manera, una función continua e inyectiva $S^1 + S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ tiene como recorrido dos curvas cerradas simples que no se tocan, o en términos de los gráficos existenciales clásicos, dos cortes.

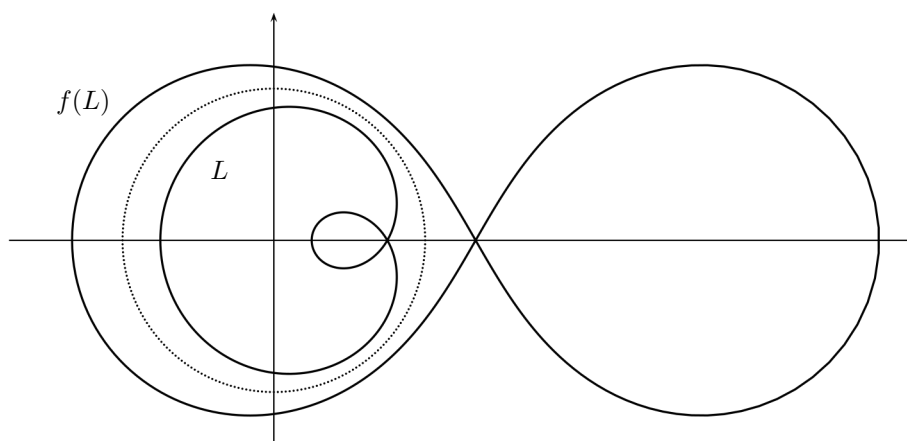
En general, un gráfico Alfa clásico se dibuja en el plano complejo mediante una función continua e inyectiva $mS^1 + F_n \rightarrow \mathbb{C}$ junto con la función auxiliar $\pi : F_n \rightarrow \mathcal{L}$. Aquí mS^1 es la suma topológica de una cantidad finita m de copias de la circunferencia unidad, cada una con la topología de subespacio de \mathbb{C} , mientras que en el conjunto F_n se toma la topología discreta. En el trabajo [9] se encuentran ejemplos y detalles técnicos adicionales para el caso clásico.

De acuerdo con este antecedente, a fin de representar los gráficos Alfa para la LIC en el plano complejo solo se requiere dibujar los rizos como funciones en \mathbb{C} . Para ello en apariencia basta reemplazar la circunferencia unidad S^1 por una adecuada curva cerrada.

La familia de curvas conocidas como *limaçon* fue estudiada y bautizada así por Étienne Pascal, padre del conocido Blaise Pascal. Se puede representar mediante coordenadas polares por la ecuación $\rho = a + \cos(\theta)$ donde $a > 0$. Cuando $a \geq 1$ se trata de una curva de Jordan; en el caso extremo $a = 1$ se obtiene una *cardioide*; cuando $0 < a < 1$ la curva tiene un lazo y sirve para los propósitos de este estudio. En particular se escoge la curva L descrita por la ecuación $\rho = \frac{1}{2} + \cos(\theta)$, pero reflejada en el eje vertical y luego trasladada hacia la derecha $\frac{3}{4}$ como se muestra en la figura.



Siguiendo el procedimiento empleado en el caso clásico, un rizo para la LIC se podría definir como una función continua e inyectiva $L \rightarrow \mathbb{C}$. Sin embargo, como ya se presagió en el trabajo [9], en este caso tales condiciones no son suficientes. Por ejemplo la función compleja $f(z) = \frac{1}{z}$ es inyectiva y continua en L pero la imagen de esta curva por f , que se muestra en la figura siguiente, es un tipo de lemniscata que no es un rizo de los gráficos Alfa para la LIC.



Luego es necesario exigir alguna condición adicional a una función continua e inyectiva $L \rightarrow \mathbb{C}$ a fin de que ella pueda representar de manera adecuada un rizo para la LIC en el plano complejo. En la sección siguiente se explora una de tales cláusulas.

3.2. Curvatura total

En la última figura de la sección precedente se observa que en el punto donde la curva L se cruza consigo misma su curvatura no cambia de signo, mientras

que en el correspondiente punto imagen, que es justo el punto donde la curva $f(L)$ se cruza consigo misma, la curvatura de ésta cambia de signo. Sería demasiado estricto exigir que la función de representación conservara el signo de la curvatura, dado que muchas curvas de Jordan que se usan para los gráficos Alfa clásicos no tienen esa característica. Pero sí se puede pedir una condición sobre la curvatura total.

Sea $z : I \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ una curva definida en algún intervalo real $I \subseteq \mathbb{R}$. Si la curva es regular, esto es, al menos dos veces diferenciable y con $z'(t) \neq 0$ para cada t , entonces se define su *curvatura* en un punto $t \in I$ como

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Puesto que $|z'| = ((x')^2 + (y')^2)^{1/2}$ (véase [5]), el denominador se puede expresar como $|z'|^3$. Por otro lado se observa la siguiente igualdad.

$$\overline{z'}z'' = (x' - iy')(x'' + iy'') = (x'x'' + y'y'') + i(x'y'' - x''y')$$

Luego $x'y'' - x''y' = \Im(\overline{z'}z'')$ y la curvatura se puede expresar así:

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{\Im(\overline{z'}z'')}{|z'|^3} = \frac{1}{|z'|^2} \Im\left(\frac{\overline{z'}z''}{|z'|}\right) = \frac{1}{|z'|^2} \Im\left(\frac{z''}{z'}\right).$$

Ahora bien, la *curvatura total* de una curva parametrizada por longitud de arco s se define como

$$\mathcal{T} = \int_a^b \kappa(s) ds.$$

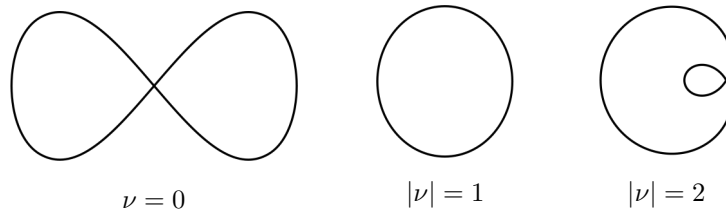
Con esta parametrización se tiene $|z'(s)| = 1$ para cada s , luego la expresión de la curvatura total se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \int_a^b \kappa(s) ds = \int_a^b \Im\left(\frac{z''}{z'}\right) ds = \\ &= \Im\left(\int_a^b \frac{z''}{z'} ds\right) = \Im(\text{Log}(z')_a^b) = \text{Arg}(z'(b)) - \text{Arg}(z'(a)). \end{aligned}$$

Dado que, en estas circunstancias, el complejo $z'(s)$ se puede entender como el vector unitario tangente a la curva en s , el cálculo anterior permite interpretar la curvatura total como la variación total en el argumento del campo vectorial tangente.

En el caso especial de una curva cerrada el vector tangente final coincide con el inicial, luego la curvatura total es un múltiplo entero ν de 2π , número denominado *índice de rotación* de la curva y que se puede interpretar de manera intuitiva como la cantidad de giros completos que da el vector tangente al recorrer una vez la curva cerrada [3]. Aunque en la definición presentada aquí se requiere la regularidad de la curva, esta noción se puede extender a

muchas curvas que satisfacen condiciones menos restrictivas [3, 10, 17]. En una adecuada curva de Jordan se tiene $\nu = \pm 1$, el signo depende del sentido de la rotación; para la limaçon L se tiene $\nu = \pm 2$; para una epitrocoide de dos lazos “interiores” como los de la limaçon se tiene $\nu = \pm 3$; para una epitrocoide de l lazos interiores es $\nu = \pm(l + 1)$; por fin, para una lemniscata se tiene $\nu = 0$. Véase la figura siguiente.



A partir de estas consideraciones se puede pensar que un invariante adecuado para la representación de los gráficos Alfa para la LIC es la curvatura total. En este artículo se llamará “total” a una aplicación definida en una curva y que conserva su curvatura total. En la definición que sigue la palabra “adecuada” significa que es posible determinar la curvatura total de la curva descrita, sea con la definición dada arriba o con alguna generalización.

Definición 3.1. Sea $\sigma : I \rightarrow \mathbb{C}$ una curva adecuada con imagen $S = \sigma(I)$. Una aplicación inyectiva y continua $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es S -total si la compuesta $f\sigma : I \rightarrow \mathbb{C}$ es adecuada y además la curvatura total de $f(S)$ es igual en valor absoluto a la de S .

Si la curva S es cerrada, en esta definición se puede cambiar “curvatura total” por “índice de rotación”. En el caso específico de la limaçon L parametrizada por $\lambda : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ con $\lambda(t) = \frac{3}{4} - (\frac{1}{2} + \cos(t)) \cos(t) + i (\frac{1}{2} + \cos(t)) \sin(t)$, una aplicación $f : L \rightarrow \mathbb{C}$ es L -total si y solo si la función compuesta $f\lambda$ es una curva adecuada y tiene índice de rotación ± 2 . Cualquier aplicación lineal $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$ es L -total; en contraste, como ya se observó, la aplicación $f(z) = \frac{1}{z}$ no es L -total.

Se deja planteado aquí el problema de especificar condiciones técnicas suficientes para que determinada función sea L -total o, en general, S -total. Tales condiciones dependen, a su vez, de la noción de curvatura adoptada.

Con estas convenciones se emprenderá, en la próxima sección, la formalización buscada.

3.3. Una definición formal

Con las herramientas desarrolladas se puede elaborar la definición rigurosa de los gráficos para la LIC como objetos matemáticos y, en especial, geométricos.

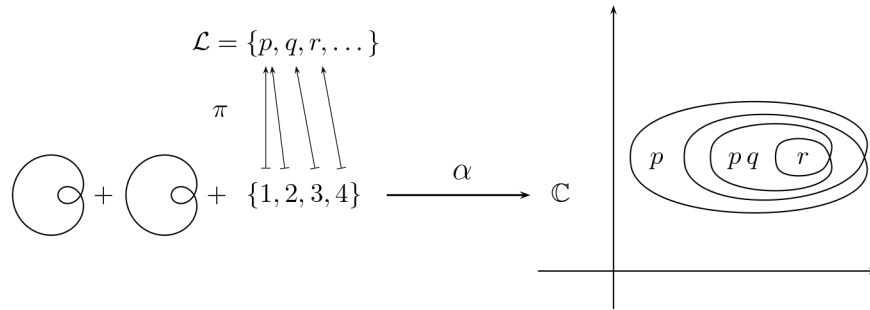
Definición 3.2. Un *pregráfico Alfa para la LIC* es una función continua e inyectiva

$$\alpha : mL + F_n \longrightarrow \mathbb{C},$$

donde mL es la suma topológica de m copias de la limaçon L , definida en el apartado anterior; cada restricción $\alpha|_L$ es una aplicación L -total; y F_n es un conjunto finito con n elementos, dotado de la topología discreta y acompañado de una función $\pi : F_n \rightarrow \mathcal{L}$.

Puesto que el dominio es un espacio compacto al ser suma de finitos espacios compactos [6, 9] y el codominio es Hausdorff, la función continua e inyectiva α de esta definición siempre es una inmersión topológica [20].

Ejemplo 3.3. Sin detallar los cálculos exactos, sigue el esquema de un pregráfico con dos rizos y cuatro letras.



La deformación continua de un pregráfico Alfa en otro equivalente corresponde a maneras diferentes de dibujar el mismo gráfico y no debe confundirse con la transformación dada por las reglas. Tal deformación se logra mediante una homotopía, si bien aun para el caso Alfa clásico se requiere la condición adicional que cada función “intermedia” de la homotopía debe ser inyectiva. De nuevo por las propiedades de los espacios esto significa que cada una de estas funciones es una inmersión topológica, de manera que la deformación corresponde a una isotopía. En el caso de los gráficos Alfa para la LIC se requiere además que cada función intermedia sea L -total en cada sumando L , es decir, que sea a su vez un pregráfico Alfa.

Una *homotopía regular* es una homotopía H entre inmersiones diferenciables en el plano tal que cada función intermedia H_u es regular y tanto H_u como su derivada varían de manera continua con u [8]. El célebre teorema de Whitney-Graustein [19] establece que existe una homotopía regular entre dos inmersiones de la circunferencia unidad S^1 en el plano \mathbb{C} si y solo si tienen la misma curvatura total, resultado que se ha extendido a otras curvas [8].

Invirtiendo la situación, en este artículo se define una *isotopía regular* entre dos pregráficos de igual dominio como una homotopía tal que cada función intermedia es a su vez un pregráfico, esto es, es una inmersión topológica (isotopía) y es L -total en cada sumando L (regular).

Definición 3.4. Los pregráficos Alfa para la LIC

$$\begin{aligned} \alpha : mL + F_n &\longrightarrow \mathbb{C}, & \pi : F_n &\rightarrow \mathcal{L} \\ \alpha' : m'L + F_{n'} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \pi' : F_{n'} &\rightarrow \mathcal{L} \end{aligned}$$

son *equivalentes* si

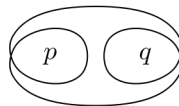
- $m = m'$ y $n = n'$ de manera que, salvo permutaciones, los dominios se pueden tomar iguales;
- $\pi = \pi'$;
- Existe una isotopía regular $R : \alpha \rightarrow \alpha'$.

Como en todos los casos de homotopía e isotopía, la relación establecida en la definición 3.4 es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los pregráficos Alfa para la LIC. Con lo cual se llega a la siguiente noción formal.

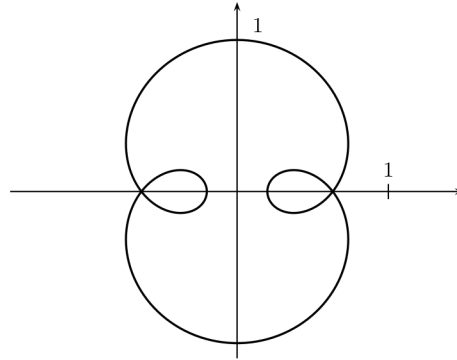
Definición 3.5. Un *gráfico Alfa para la LIC* es una clase de equivalencia (o clase de isotopía regular) de pregráficos Alfa para la LIC.

4. Un problema nuevo

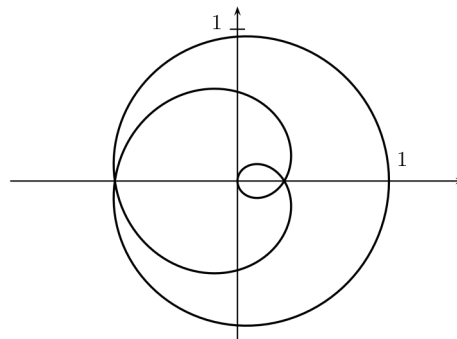
La definición 3.5 resuelve el problema de la determinación de los gráficos Alfa para la LIC como objetos geométricos. Para los gráficos Alfa correspondientes a la lógica intuicionista plena solo hace falta un signo para la disyunción. En el sistema Alfa intuicionista [13, 14] este conectivo se representa mediante un *bucle* constituido por una curva cerrada simple y dos lazos en su interior. Cabe anotar que este diagrama también fue utilizado por Peirce de manera ocasional.



Siguiendo con la definición formal de los gráficos como objetos geométricos, ahora además de la circunferencia unidad S^1 para los cortes y la limaçon L para los rizos, a fin de trazar los bucles se incluye la siguiente epitrocoide E parametrizada como $\varepsilon(t) = \frac{1}{5}(3 \operatorname{sen}(t) + 2 \operatorname{sen}(3t)) + \frac{i}{5}(3 \cos(t) + 2 \cos(3t))$, con $t \in [0, 2\pi]$, cuyo índice de rotación es $\nu = -3$.



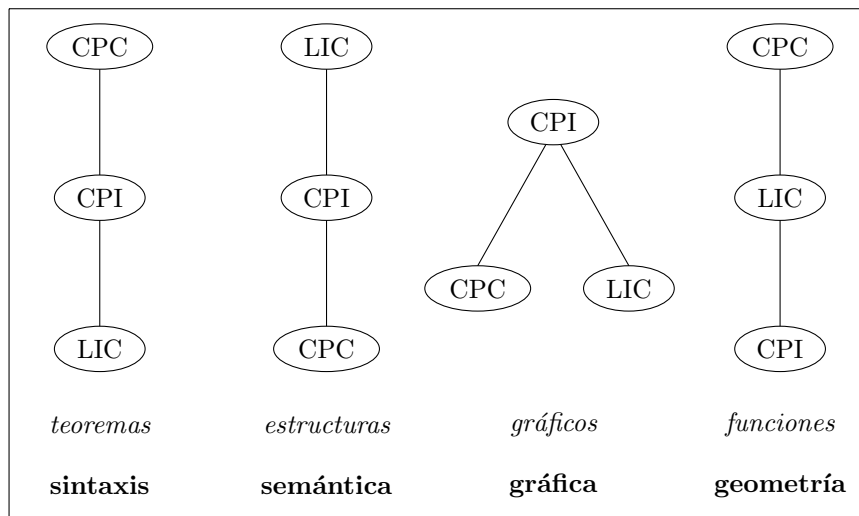
Se esperaría poder describir un bucle mediante una función $E \rightarrow \mathbb{C}$ inyectiva, continua y E -total. Sin embargo, no es difícil definir una aplicación compleja inyectiva y continua en E cuyo recorrido es el siguiente.



Esto no es un diagrama admisible en el sistema de gráficos Alfa intuicionistas, aunque tiene índice ± 3 . La función que la dibuja no solo es E -total sino también respeta el signo de la curvatura en todos los puntos.

Este contraejemplo muestra que para los gráficos Alfa intuicionistas se requiere una noción más estricta, y el problema consiste en establecerla.

Para terminar, vale la pena resaltar cierta jerarquía entre las funciones consideradas: para los puntos es una función inyectiva; para los cortes se requiere que sea inyectiva y continua [9]; para los rizos, considerados en este artículo, las funciones deben ser inyectivas, continuas y totales; por fin, para los bucles se requiere alguna cláusula adicional. Nótese que en cada paso estudiado la condición añadida se cumple de manera trivial en el paso anterior. El gráfico siguiente compara esta jerarquía, vista como contención, con los órdenes mencionados en la primera parte de este artículo.



De esta manera los gráficos existenciales se siguen consolidando como un puente entre la lógica y la geometría.

Referencias

- [1] G. Brady and T. H. Trimble, *A categorical interpretation of C. S. Peirce's propositional logic Alpha*, Journal of Pure and Applied Algebra **149** (2000), no. 3, 213 – 239.
- [2] X. Caicedo, *Elementos de lógica y calculabilidad*, Una empresa docente, Bogotá, 1990.
- [3] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1976.
- [4] M. Castillo and A. Oostra, *Álgebras para la lógica implicativa con conjunción*, Matemáticas: Enseñanza Universitaria **18** (2010), no. 2, 31 – 50.
- [5] J. Charris, R. De Castro, and J. Varela, *Fundamentos del Análisis Complejo de una variable*, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá, 2000.
- [6] J. A. Flórez, *Topología suma y aplicación a la topología fractal*, Tesis de Maestría (Matemáticas), Universidad del Tolima, Ibagué, 2017.
- [7] A. Y. Gómez, *Gráficos Alfa para la lógica implicativa con conjunción*, Trabajo de grado (Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística), Universidad del Tolima, Ibagué, 2013.

- [8] M. Kranjk, *Degrees of closed curves in the plane*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **23** (1993), no. 3, 951 – 978.
- [9] Y. Martínez, *Un modelo real para los gráficos Alfa*, Trabajo de grado (Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística), Universidad del Tolima, Ibagué, 2014.
- [10] J. W. Milnor, *On the total curvature of knots*, The Annals of Mathematics **52** (1950), 248 – 257.
- [11] A. Oostra, *Álgebras de Heyting*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997, XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.
- [12] ———, *Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista*, Cuadernos de Sistemática Peirceana **2** (2010), 25 – 60.
- [13] ———, *Gráficos existenciales Beta intuicionistas*, Cuadernos de Sistemática Peirceana **3** (2011), 53 – 78.
- [14] J. E. Ortiz and J. A. Segura, *Gráficos Alfa intuicionistas*, Trabajo de grado (Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística), Universidad del Tolima, Ibagué, 2018.
- [15] H. Rasiowa, *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*, North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [16] D. D. Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, Mouton, The Hague, 1973.
- [17] J. M. Sullivan, *Curves of Finite Total Curvature*, Discrete Differential Geometry (A.I. Bobenko, J.M. Sullivan, P. Schröder, and G.M. Ziegler, eds.), Oberwolfach Seminars, vol. 38, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 137 – 161.
- [18] J. E. Taboada and E. D. Rodríguez, *Una demostración de la equivalencia entre los gráficos Alfa y la lógica proposicional*, Trabajo de grado (Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística), Universidad del Tolima, Ibagué, 2010.
- [19] H. Whitney, *On regular closed curves in the plane*, Compositio Mathematica **4** (1937), 276 – 284.
- [20] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading (MA), 1970.
- [21] F. Zalamea, *Los gráficos existenciales peirceanos*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2010.
- [22] J. J. Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*, Ph.D. dissertation, University of Chicago, Chicago, 1964, Available online at: <http://users.clas.ufl.edu/jzeman/graphicallogic/index.htm>.