Factores Gamma de Tate asociados a caracteres cuadráticos

Tate gamma-factors attached to quadratic characters

Oscar F. Casas-Sánchez[1,a], **Jeanneth Galeano-Peñaloza**[2,b], **Jhon J. Rodríguez-Vega**[2,c]

Resumen. El objetivo de este artículo es presentar los cálculos explícitos para los factores gamma de Tate en el caso de los caracteres cuadráticos asociados al símbolo de Hilbert.

Palabras claves: Factores gamma de Tate, caracteres cuadráticos, símbolo de Hilbert, números p-ádicos.

Abstract. The goal of this paper is to show the explicit calculations for the Tate gamma factors, in the case of the quadratic characters attached to the Hilbert symbol.

Keywords: Tate gamma-factors, quadratic characters, Hilbert symbol, p-adic numbers.

Mathematics Subject Classification: 11S80, 11S40.

Recibido: julio de 2015 Aceptado: octubre de 2015

1. Introducción

Es un hecho conocido que la función zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ codifica mucha información sobre los números primos. Desde Riemann, al estudiar esta función se añade un factor gamma $\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}$ para obtener una función "zeta completa" $\Xi(s) = \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ que satisface la ecuación funcional $\Xi(s) = \Xi(1-s)$.

El enfoque moderno para estudiar la ecuación funcional de la función zeta global es desarrollado por Tate en su tesis doctoral, la cual se encuentra en [3]. Artin le propone a Tate generalizar el concepto de función zeta de Dedekind y $L-$serie, y simplificar la prueba de la continuación analítica y la ecuación funcional usando análisis armónico en el espacio de adeles e ideles.

[1]Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
[2]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]oscasas@uniandes.edu.co
[b]jgaleanop@unal.edu.co
[c]jjrodriguezv@unal.edu.co

Para esto Tate introduce funciones zeta locales

$$\int_{\mathbb{Q}p^{\times}} \varphi(t)\pi(t)|t|_p^{s-1}\, dt,$$

donde $\varphi(t)$ es una función localmente constante y con soporte compacto en $\mathbb{Q}_p$, $\pi(t)$ es un carácter de $\mathbb{Q}_p^{\times}$ y $s \in \mathbb{C}$ de manera que la integral exista. En su tesis, Tate muestra que existen factores gamma locales $\rho(\pi, s)$ de manera que se cumple la siguiente ecuación funcional local

$$\int_{\mathbb{Q}_p^{\times}} \hat{\varphi}(t)\pi(t)|t|_p^{s-1} dt = \rho(\pi, s) \int_{\mathbb{Q}_p^{\times}} \varphi(t)\overline{\pi}(t)|t|_p^{-s} dt,$$

donde $\hat{\varphi}(t)$ es la transformada de Fourier de $\varphi(t)$ ver (3) y $\overline{\pi}(t)$ es el conjugado complejo de $\pi(t)$. El lector interesado puede consultar [4].

Los factores $\rho(\pi, s)$ son conocidos como factores Gamma de Tate. Aunque se conoce su existencia para cualquier carácter $\pi(t)$ no es fácil encontrar cálculos explícitos de estos factores para un carácter fijo $\pi(t)$.

El objetivo de este artículo es presentar los cálculos explícitos para estos factores en el caso de los caracteres cuadráticos $\pi_\beta(t) = (\beta, t)_p$ asociados al símbolo de Hilbert. Estos factores gamma aparecen en los trabajos de S. Rallis and G. Schiffmann [7], Y. Jang [5], F. Sato [9] y O. F. Casas-Sánchez, J. Galeano-Peñaloza and J. J. Rodríguez-Vega [2]. Sin embargo en ninguna de estas referencias se encuentra la lista completa ni los cálculos explícitos.

2. Preliminares

2.1. Números $p-$ádicos

A continuación damos un breve resumen acerca de los hechos más importantes sobre análisis p-ádico. Para un estudio más detallado el lector puede consultar por ejemplo [1, 6, 10] y [11].

Sea p un número primo. Cualquier número racional no-nulo puede escribirse de manera única como $x = p^{\gamma}\dfrac{a}{b}$, con $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ y a, b enteros coprimos con p. La *norma p-ádica* de $x \neq 0$, se define como

$$|x|_p = p^{-\gamma},$$

y $|0|_p = 0$. Esta norma satisface

$$|x + y|_p \leq \text{máx}(|x|_p,\ |y|_p),$$

lo cual implica la desigualdad del triángulo. Una norma que satisface esta propiedad es llamada una norma *no-Arquimediana*.

El siguiente teorema caracteriza todas las normas definidas sobre $\mathbb{Q}$. La demostración puede encontrarse en [6].

Teorema 2.1 (Ostrowski)**.** *Cualquier norma no-trivial definida sobre $\mathbb{Q}$ es equivalente al valor absoluto real o a la norma $p-$ádica $|\cdot|_p$ para algún primo p.*

El campo de los números p-ádicos se define como la completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a la norma p-ádica y se denota por $\mathbb{Q}_p$.

El conjunto $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ es llamado el conjunto de los *enteros p-ádicos* y es un anillo de $\mathbb{Q}_p$. El conjunto $U = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}$ es el grupo de unidades de $\mathbb{Q}_p$. El conjunto $p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p < 1\}$ forma un ideal principal maximal de $\mathbb{Z}_p$ y el cociente $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ es un campo finito de p elementos.

Cualquier número p-ádico $x \neq 0$ puede representarse de manera única como

$$x = p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots) = p^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j, \tag{1}$$

donde $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ y los x_j son enteros que satisfacen $0 \leq x_j \leq p-1$, $j = 0, 1, \ldots,$ $x_0 \neq 0$, y la serie converge en norma p-ádica.

La parte fraccionaria $\{x\}_p$ de un número $x \in \mathbb{Q}_p$ se define como

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma(x) \geq 0 \text{ o } x = 0, \\ p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + \cdots + x_{|\gamma|-1} p^{|\gamma|-1}) & \text{si } \gamma(x) < 0. \end{cases}$$

La aplicación $\rho(x, y) = |x - y|_p,\ x, y \in \mathbb{Q}_p$ define una distancia sobre $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$. Además, $(\mathbb{Q}_p, \rho)$ es un espacio métrico completo. Las bolas y las esferas se definen de manera usual:

$$B_k(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^k\},$$

$$S_k(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = p^k\}.$$

Estas bolas forman una base para la topología de $\mathbb{Q}_p$.

Todas las definiciones dadas anteriormente pueden extenderse a $\mathbb{Q}_p^n$ tomando $||x||_p = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p$ para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}_p^n$.

2.2. Medida de Haar

Ya que $(\mathbb{Q}_p, +)$ es un grupo topológico localmente compacto, existe una medida invariante por translación dx, (i.e., $d(x + a) = dx,\ a \in \mathbb{Q}_p$), que es única, salvo multiplicación por una constante positiva. Esta medida es llamada la *medida de Haar* de $(\mathbb{Q}_p, +)$. Normalizamos esta medida con la condición $\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$, y así dx es única.

El conjunto $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ es la unión de un número contable de conjuntos mutuamente disjuntos $S_\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Q}_p \setminus \{0\} = \cup_{\gamma=-\infty}^{\infty} S_\gamma = \cup_{\gamma=-\infty}^{\infty} \{x : |x|_p = p^{\gamma}\}.$$

Por lo tanto, para cualquier función continua $\varphi(x),\ x \in \mathbb{Q}_p$, con soporte compacto,

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)dx := \lim_{N\to\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{N} \int_{S_\gamma} \varphi(x)dx.$$

Una función f es llamada *localmente integrable*, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p)$, si para cualquier entero positivo N,

$$\int_{B_N} |f(x)|dx < \infty.$$

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p)$, la *integral impropia*, $\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx$ se define como

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx = \sum_{-\infty<\gamma<\infty} \int_{S_\gamma} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{-\infty<\gamma\leq N} \int_{S_\gamma} f(x)dx,$$

si el límite existe.

Las anteriores nociones pueden extenderse fácilmente a $\mathbb{Q}_p^n$, reemplazando dx por una medida producto adecuada.

Existe una conexión importante entre las estructuras aditiva y multiplicativa de $\mathbb{Q}_p$, a saber, para $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ tenemos $d(xa) = |a|_p dx$, ver [11].

2.3. Funciones de prueba y distribuciones

Una función $f : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ es llamada *localmente constante* si para cada punto $x \in \mathbb{Q}_p$ existe un entero $l(x)$ tal que

$$f(x + x') = f(x), \qquad |x'|_p \leq p^{l(x)}.$$

Como ejemplo, tenemos $\Delta_k(x) := \Omega(p^{-k}|x|_p),\ k \in \mathbb{Z}$, donde $\Omega(t)$ es la función característica del intervalo $[0, 1]$, i.e.,

$$\Omega(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

El espacio de las funciones localmente constantes, con soporte compacto es llamado espacio de *Bruhat-Schwartz*, $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbb{Q}_p)$ (o espacio de las *funciones de prueba*).

Un funcional lineal f definido sobre $\mathbf{S}$

$$\begin{aligned} f :& \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \phi \mapsto \langle f, \phi\rangle \end{aligned}$$

es conocido también como una *función generalizada* o una *distribución*. Denotamos por $\mathbf{S}' = \mathbf{S}'(\mathbb{Q}_p)$ el conjunto de todas las distribuciones sobre $\mathbb{Q}_p$. Observemos que todas las distribuciones sobre $\mathbb{Q}_p$ son continuas.

Sea $f \in \mathbf{S}'(\mathbb{Q}_p^n)$ y $g \in \mathbf{S}'(\mathbb{Q}_p^m)$. Su *producto directo* está dado por la fórmula

$$\langle f(x) \times g(y), \varphi \rangle := \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathbf{S}(\mathbb{Q}_p^{n+m}).$$

La *convolución* de $f,\ g \in \mathbf{S}'(\mathbb{Q}_p^n)$ es el funcional

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle f(x) \times g(y), \Delta_k(x)\varphi(x+y) \rangle,$$

si el límite existe para todo $\varphi \in \mathbf{S}(\mathbb{Q}_p^n)$.

2.4. Transformada de Fourier

Sea $\chi_p : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ el carácter aditivo definido por

$$\chi_p(\xi \cdot x) = exp(2\pi i \{\xi \cdot x\}_p), \tag{2}$$

donde $\xi \cdot x = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$.

Para $\phi \in \mathbf{S}(\mathbb{Q}_p^n)$, definimos su transformada de Fourier $\mathcal{F}\phi$ por

$$(\mathcal{F}\phi)(\xi) = \hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(\xi \cdot x)\phi(x)d^n x, \qquad \xi \in \mathbb{Q}_p^n, \tag{3}$$

donde $d^n x$ denota la medida de Haar $\mathbb{Q}_p^n$ normalizada de tal forma que $\mathbb{Z}_p^n$ tiene medida 1. La transformada de Fourier induce un isomorfismo lineal de $\mathbf{S}(\mathbb{Q}_p^n)$ sobre $\mathbf{S}(\mathbb{Q}_p^n)$ y la transformada inversa está dada por

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(-x \cdot \xi)\varphi(\xi)d^n \xi,$$

para $\varphi \in \mathbf{S}(\mathbb{Q}_p^n)$, ver [10].

La transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ de una distribución $f \in \mathbf{S}'(\mathbb{Q}_p^n)$ está definida por la relación

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathbf{S}(\mathbb{Q}_p^n)$, entonces $\mathcal{F}[f] \in \mathbf{S}'(\mathbb{Q}_p^n)$. Además, se tiene la fórmula de inversión

$$f = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f](-\xi)], \qquad f \in \mathbf{S}'(\mathbb{Q}_p^n).$$

2.5. Símbolo de Hilbert

El símbolo de Hilbert $(a,b)_p$, $a, b \in \mathbb{Q}_p^\times$, se define como

$$(a,b)_p = \begin{cases} 1 & \text{si}\, ax^2 + by^2 - z^2 = 0 \,\text{tiene una solución}\, (x,y,z) \neq (0,0,0) \,\text{en}\, \mathbb{Q}_p^3 \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El símbolo de Hilbert posee las siguientes propiedades ver [12, Theorem 3.3.1]:

$$(a,b)_p = (b,a)_p \text{ y } (a,c^2)_p = 1, \text{ para } a,b,c \in \mathbb{Q}_p^\times, \tag{4}$$

$$(ab,c)_p = (a,c)_p(b,c)_p, \text{ para } a,b,c \in \mathbb{Q}_p^{\times}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} (a,b)_p = 1 & \text{para } a,b \in \mathbb{Z}_p^{\times}, \\ (a,p)_p = \left(\dfrac{a_0}{p}\right) & \text{para } a \in \mathbb{Z}_p^{\times}, \end{cases} \tag{6}$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$, con $a \equiv a_0 \operatorname{mod} \mathbb{Z}_p$, y $\left(\dfrac{a_0}{p}\right)$ es el símbolo de Legendre.

Lema 2.2. *[12, Section 3.3] Para $a, b \in \mathbb{Z}_2^{\times}$ se tiene*

$$\begin{cases} (a,b)_2 = (-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}, \\ (a,2)_2 = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}. \end{cases}$$

El siguiente resultado será usado en lo que sigue.

Lema 2.3. *[8, Section 6.6] Un número 2-ádico $a \in \mathbb{Z}_2^{\times}$ es un cuadrado si y sólo si $a \in 1 + 2^3\mathbb{Z}_2$.*

3. Cálculos explícitos para $p \neq 2$

En esta sección trabajamos con $\mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$, y deseamos encontrar las funciones $\rho(\pi_\beta, s)$ que satisfacen

$$\int_{\mathbb{Q}_p^{\times}} \hat{\varphi}(t)\pi_\beta(t)|t|^{s-1}dt = \rho(\pi_\beta, s) \int_{\mathbb{Q}_p^{\times}} \varphi(t)\pi_\beta(t)|t|^{-s}dt, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

donde $\varphi \in \mathbf{S}(\mathbb{Q}_p)$ y $\pi_\beta(t) = (\beta, t)_p$ es el carácter cuadrático asociado al símbolo de Hilbert.

Lema 3.1.

$$\int_{(\mathbb{Z}_p^{\times})^2} \chi(\eta_0 p^m z)dz = \begin{cases} \dfrac{1-p^{-1}}{2} & \text{si } m \geq 0, \\ \dfrac{\sigma_p}{2\sqrt{p}}\left(\dfrac{\eta_0}{p}\right) - \frac{1}{2p} & \text{si } m = -1, \\ 0 & \text{si } m \leq -2, \end{cases}$$

donde $\eta_0 = \dfrac{\eta}{p^{ord(\eta)}}$.

Demostración. Si $m \geq 0$, entonces

$$\int_{(\mathbb{Z}_p^{\times})^2} \chi(\eta_0 p^m z)dz = \int_{(\mathbb{Z}_p^{\times})^2} dz = \frac{1-p^{-1}}{2}.$$

Ahora sea $m = -k$, con $k > 0$, entonces

$$\int\limits_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} \chi(\eta_0 p^m z)dz = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p-1}\int_{l^2+p\mathbb{Z}_p}\chi\left(\frac{\eta_0 z}{p^k}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2p}\sum_{l=1}^{p-1}\chi\left(\frac{\eta_0 l^2}{p^k}\right)\int_{\mathbb{Z}_p}\chi\left(\frac{\eta_0 u}{p^{k-1}}\right)du, \quad z = l^2 + pu.$$

Para $k > 1$ la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p}\chi\left(\frac{\eta_0 u}{p^{k-1}}\right)du = 0$ y

$$\int\limits_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} \chi(\eta_0 p^m z)dz = 0, \quad \text{para } m \leq -2.$$

Para $k = 1$, tenemos que $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p}\chi\left(\frac{\eta_0 u}{p^{k-1}}\right)du = 1$, por lo tanto

$$\int\limits_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} \chi(\eta_0 p^m z)dz = \frac{1}{2p}\sum_{l=1}^{p-1}\chi\left(\frac{\eta_0 l^2}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{2p}\left[\sum_{l=0}^{p-1}\chi\left(\frac{\eta_0 l^2}{p}\right) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2p}\left[\sigma_p\sqrt{p}\left(\frac{\eta_0}{p}\right) - 1\right].$$

Para la última igualdad se utilizó que

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i\frac{mk^2}{p}} = \begin{cases} \left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{p} & \textbf{si } p \equiv 1 \mod 4, \\ i\left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{p} & \textbf{si } p \equiv -1 \mod 4, \end{cases}$$

ver [11, p. 55] □

Sea $\varphi(x)$ la función característica del conjunto $1 + p\mathbb{Z}_p$ vamos a calcular la transformada de Fourier de esta función

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(t) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(t\xi)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \int_{1+p\mathbb{Z}_p} \chi(t\xi)d\xi, \qquad \xi = 1+pu \\
&= p^{-1}\int_{\mathbb{Z}_p} \chi(t+ptu)du \\
&= p^{-1}\chi(t)\int_{\mathbb{Z}_p} \chi(ptu)du \\
&= p^{-1}\chi(t)\begin{cases} 1 & \text{si } |pt|_p \leq 1 \\ 0 & \text{si } |pt|_p > 1 \end{cases} \\
&= p^{-1}\chi(t)\Psi(t),
\end{aligned}$$

donde $\Psi(t)$ es la función característica de $p^{-1}\mathbb{Z}_p$.

Calculemos ahora la parte derecha de la ecuación (7)

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(t)\pi_\beta(t)|t|_p^{-s}dt = \int_{1+p\mathbb{Z}_p} dt = p^{-1}.$$

Para la parte izquierda de (7) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Q}_p} \hat{\varphi}(t)|t|_p^{s-1}\pi_\beta(t)dt &= \int_{p^{-1}\mathbb{Z}_p} p^{-1}\chi(t)\pi_\beta(t)|t|^{s-1}dt \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2}} \int_{p^{-1}\mathbb{Z}_p\cap\eta\mathbb{Q}_p^{\times 2}} p^{-1}\chi(t)\pi_\beta(t)|t|^{s-1}dt \\
&= p^{-1}\sum_{\eta\in\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2}} \pi_\beta(\eta)\int_{p^{-1}\mathbb{Z}_p\cap\eta\mathbb{Q}_p^{\times 2}} \chi(t)|t|^{s-1}dt.
\end{aligned}$$

Comparando estas integrales con (7), se debe tener que

$$\rho(\pi_\beta, s) = \sum_{\eta\in\mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^2} \pi_\beta(\eta) \int_{\eta\mathbb{Q}_p^{\times 2}\cap p^{-1}\mathbb{Z}_p} \chi(t)|t|^{s-1}dt. \tag{8}$$

Note que la suma de la derecha se hace sobre η módulo un cuadrado, así que los únicos valores que toma η son $1, \epsilon, p, p\epsilon$, donde ϵ es una unidad que no es un cuadrado, ver [11, p. 11].

Ahora calculamos las integrales de la derecha.

Lema 3.2.

$$\int_{\eta\mathbb{Q}_p^{\times 2}\cap p^{-1}\mathbb{Z}_p} \chi(t)|t|^{s-1}dt = \begin{cases} \frac{1-p^{-1}}{2(1-p^{-2s})} & \text{si } ord(\eta) \equiv 0 \mod 2, \\ \frac{p^{-s}-p^{s-1}}{2(1-p^{-2s})} + \frac{p^{s-1/2}}{2}\sigma_p\left(\frac{\eta_0}{p}\right) & \text{si } ord(\eta) \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$$

Demostración.

$$\int_{\eta\mathbb{Q}_p^{\times 2}\cap p^{-1}\mathbb{Z}_p} \chi(t)|t|^{s-1}dt = \sum_{\substack{m\geq -1\\ m\equiv ord(\eta)(2)}} \int_{\eta_0 p^m\mathbb{Z}_p^{\times 2}} \chi(t)|t|^{s-1}dt$$

$$= \sum_{\substack{m\geq -1\\ m\equiv ord(\eta)(2)}} p^{-ms}\int_{\mathbb{Z}_p^{\times 2}} \chi(\eta_0 p^m z)dz.$$

Utilizando el Lema 3.1, tenemos:

Caso 1. $ord(\eta)=2k$,

$$\sum_{\substack{m\geq -1\\ m\equiv ord(\eta)(2)}} p^{-ms}\int_{\mathbb{Z}_2^{\times 2}} \chi(\eta_0 p^m z)dz = \frac{1-p^{-1}}{2}\sum_{m=0}^{\infty} p^{-2ms}$$

$$= \frac{1-p^{-1}}{2(1-p^{-2s})}.$$

Caso 2. $ord(\eta)=2k+1$,

$$\sum_{\substack{m\geq -1\\ m\equiv ord(\eta)(2)}} p^{-ms}\int_{\mathbb{Z}_p^{\times 2}} \chi(\eta_0 p^m z)dz = \frac{1-p^{-1}}{2}\sum_{m=0}^{\infty} p^{-(2m+1)s} + p^s\left(\frac{\sigma_p}{2}\sqrt{p}\left(\frac{\eta_0}{p}\right)-\frac{1}{2p}\right)$$

$$= \frac{1-p^{-1}}{2}p^{-s}\sum_{m=0}^{\infty} p^{-2ms} + p^s\frac{\sigma_p}{2}\sqrt{p}\left(\frac{\eta_0}{p}\right) - p^{s-1}\frac{1}{2p}$$

$$= \frac{p^{-s}-p^{s-1}}{2(1-p^{-2s})} + \frac{p^{s-1/2}}{2}\sigma_p\left(\frac{\eta_0}{p}\right).$$

□

Reemplazando en la ecuación (10) se obtiene:

$$\rho(\pi_\beta,s) = \pi_\beta(1)I_1 + \pi_\beta(\epsilon)I_\epsilon + \pi_\beta(p)I_p + \pi_\beta(p\epsilon)I_{p\epsilon},$$

donde $I_\eta := \int_{\eta\mathbb{Q}_p^{\times 2}\cap p^{-1}\mathbb{Z}_p} \chi(t)|t|^{s-1}dt$, para $\eta = 1,\epsilon,p,p\epsilon$. Como 1 y ϵ son de orden cero y p y $p\epsilon$ son de orden 1, entonces, de acuerdo con el Lema 3.2

tenemos

$$\begin{aligned}\rho(\pi_\beta, s) &= \pi_\beta(1)\frac{1-p^{-1}}{2(1-p^{-2s})} + \pi_\beta(\epsilon)\frac{1-p^{-1}}{2(1-p^{-2s})} \\ &\quad + \pi_\beta(p)\left(\frac{p^{-s}-p^{s-1}}{2(1-p^{-2s})} + \frac{p^{s-1/2}}{2}\sigma_p\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\ &\quad + \pi_\beta(p\epsilon)\left(\frac{p^{-s}-p^{s-1}}{2(1-p^{-2s})} + \frac{p^{s-1/2}}{2}\sigma_p\left(\frac{\epsilon_0}{p}\right)\right) \\ &= \pi_\beta(1)\frac{1-p^{-1}}{2(1-p^{-2s})} + \pi_\beta(\epsilon)\frac{1-p^{-1}}{2(1-p^{-2s})} + \pi_\beta(p)\left(\frac{p^{-s}-p^{s-1}}{2(1-p^{-2s})} + \frac{p^{s-1/2}}{2}\sigma_p\right) \\ &\quad + \pi_\beta(p\epsilon)\left(\frac{p^{-s}-p^{s-1}}{2(1-p^{-2s})} - \frac{p^{s-1/2}}{2}\sigma_p\right),\end{aligned}$$

donde hemos usado que para $\eta = p$ se tiene $\eta_0 = \frac{p}{p^{ord(p)}} = 1$ y para $\eta = p\epsilon$ tenemos que $\eta_0 = \frac{p\epsilon}{p} = \epsilon_0$, finalmente, como ϵ es una unidad que no es un cuadrado $\left(\frac{\eta_0}{p}\right) = \left(\frac{\epsilon_0}{p}\right) = -1$.

Para $\beta = 1$ tenemos

$$\rho(\pi_1, s) = \frac{1-p^{-1}}{(1-p^{-2s})} + \frac{p^{-s}-p^{s-1}}{2(1-p^{-2s})} = \frac{1-p^{s-1}}{1-p^{-s}}.$$

Para $\beta = \epsilon$, recordando que $\pi_\epsilon(p) = -1$ y $\pi_\epsilon(p\epsilon) = -1$, tenemos

$$\rho(\pi_\epsilon, s) = \frac{1-p^{-1}}{(1-p^{-2s})} - \frac{p^{-s}-p^{s-1}}{2(1-p^{-2s})} = \frac{1+p^{s-1}}{1+p^{-s}}.$$

Para $\beta = p, p\epsilon$, recordamos que $\pi_p(1) = 1$, $\pi_p(\epsilon) = -1$, $\pi_p(p) = \sigma_p^2$ y $\pi_p(p\epsilon) = -\sigma_p^2$ y $\pi_{p\epsilon}(1) = 1$, $\pi_{p\epsilon}(\epsilon) = -1$, $\pi_{p\epsilon}(p) = -\sigma_p^2$ y $\pi_{p\epsilon}(p\epsilon) = \sigma_p^2$, entonces

$$\rho(\pi_\eta, s) = \pm\sigma_p^2\left(\frac{p^{s-1/2}}{2}\sigma_p\right) \mp \sigma_p^2\left(\frac{p^{s-1/2}}{2}\sigma_p(-1)\right) = \pm\sigma_p^3 p^{s-1/2}, \quad \eta = p, p\epsilon.$$

4. Cálculos explícitos $p = 2$

En esta sección trabajamos con $\mathbb{Q}_2$, así que la ecuación (7) toma la forma

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_2^\times} \hat{\varphi}(t)\pi_\beta(t)|t|^{s-1}dt = \rho(\pi_\beta, s)\int\limits_{\mathbb{Q}_2^\times} \varphi(t)\pi_\beta(t)|t|^{-s}dt, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

igual que en la sección anterior $\varphi \in \mathbf{S}(\mathbb{Q}_p)$ y $\pi_\beta(t) = (\beta, t)_2$ es el carácter cuadrático asociado al símbolo de Hilbert.

En este caso la integral que usaremos es la siguiente.

Lema 4.1.

$$\int\limits_{(\mathbb{Z}_2^\times)^2} \chi(\eta_0 2^m z)dz = \begin{cases} \frac{1}{8} & si\ m \geq 0, \\ \frac{1}{8}\chi(2^m\eta_0) & si\ -3 \leq m \leq -1, \\ 0 & si\ m \leq -4, \end{cases}$$

donde $\eta_0 = \frac{\eta}{2^{ord(\eta)}}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \int\limits_{(\mathbb{Z}_2^\times)^2} \chi(\eta_0 2^m z)dz &= \int\limits_{1+2^3\mathbb{Z}_2} \chi(\eta_0 2^m z)dz \\ &= \int\limits_{1+2^3\mathbb{Z}_2} \chi\left(\frac{\eta_0 z}{2^k}\right)dz, \quad m = -k \\ &= \frac{1}{8}\chi\left(\frac{\eta_0}{2^k}\right)\int\limits_{\mathbb{Z}_2} \chi\left(\frac{\eta_0 u}{2^{k-3}}\right)du \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 4, \\ \frac{1}{8}\chi\left(\frac{\eta_0}{2^k}\right) & \text{si } 1 \leq k \leq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Consideremos $\varphi(t)$ la función característica del conjunto $1 + 2^3\mathbb{Z}_2$, y calculemos su transformada de Fourier.

Lema 4.2. *Si* $\varphi(t)$ *la función característica del conjunto* $1 + 2^3\mathbb{Z}_2$*, entonces*

$$\hat{\varphi}(t) = 2^{-3}\chi(t)\psi(t)$$

donde $\psi(t)$ *es la función característica de* $2^{-3}\mathbb{Z}_2$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t) &= \int_{\mathbb{Q}_2} \chi(t\xi)\varphi(\xi)d\xi \\ &= \int_{1+2^3\mathbb{Z}_2} \chi(t\xi)d\xi \\ &= 2^{-3}\chi(t)\int_{\mathbb{Z}_2} \chi(2^3 ut)du \\ &= 2^{-3}\chi(t) \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 2^3, \\ 0 & \text{si } |t| > 2^3. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Primero calculemos la parte derecha de la ecuación (9)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_2^\times} \varphi(t)\pi_\beta(t)|t|^{-s}dt &= \int_{1+2^{-3}\mathbb{Z}_2} \pi_\beta(t)|t|^{s-1}dt\\ &= \int_{1+2^{-3}\mathbb{Z}_2} dt\\ &= 2^{-3}.\end{aligned}$$

Para la parte izquierda de la ecuación (9) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_2^\times} \hat{\varphi}(t)\pi_\beta(t)|t|^{s-1}dt &= 2^{-3}\int_{2^{-3}\mathbb{Z}_2} \chi(t)\pi_\beta(t)|t|^{s-1}dt\\ &= 2^{-3}\sum_{\eta\in\mathbb{Q}_2^\times/(\mathbb{Q}_2^\times)^2} \pi_\beta(\eta)\int_{\eta(\mathbb{Q}_2^\times)^2\cap 2^{-3}\mathbb{Z}_2} \chi(t)|t|^{s-1}dt.\end{aligned}$$

Comparando estas integrales con (9), se debe tener que

$$\rho(\pi_\beta, s) = \sum_{\eta\in\mathbb{Q}_2^\times/(\mathbb{Q}_2^\times)^2} \pi_\beta(\eta)\int_{\eta\mathbb{Q}_2^\times\cap 2^{-3}\mathbb{Z}_2} \chi(t)|t|^{s-1}dt. \tag{10}$$

De acuerdo con [11, p.12], para $p = 2$, el grupo cociente $\mathbb{Q}_2^\times/(\mathbb{Q}_2^\times)^2$ consiste de ocho elementos, a saber, $\{\pm1, \pm3, \pm2 \pm 6\} = \{1, 3, 5, 7, 2, 6, 10, 14\}$. Así que en la suma de la derecha η varía en este conjunto. Por simplicidad, tomaremos los valores positivos.

Lema 4.3. *La siguiente integral*

$$\int_{\eta(\mathbb{Q}_2^\times)^2\cap 2^{-3}\mathbb{Z}_2} \chi(t)|t|^{s-1}dt,$$

es igual a

$$\begin{cases} 2^{-3}\left(2^{2s}\chi(2^{-2}\eta_0) + \frac{1}{1-2^{-2s}}\right), & \text{si } ord(\eta) \equiv 0 \mod 2,\\ 2^{-3}\left(2^{3s}\chi(2^{-3}\eta_0) + 2^s\chi(2^{-1}\eta_0) + 2^s\frac{2^{-2s}}{1-2^{-2s}}\right), & \text{si } ord(\eta) \equiv 1 \mod 2.\end{cases}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\int_{\eta(\mathbb{Q}_2^\times)^2\cap 2^{-3}\mathbb{Z}_2}\chi(t)|t|^{s-1}dt &= \sum_{\substack{m\geq -3\\ m\equiv ord(\eta)(2)}}\int_{\eta_0 2^m\mathbb{Z}_2^\times}\chi(t)|t|^{s-1}dt\\ &= \sum_{\substack{m\geq -3\\ m\equiv ord(\eta)(2)}}|\eta_0 2^m|\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^m z)|\eta_0 2^m z|^{s-1}dz\\ &= \sum_{\substack{m\geq -3\\ m\equiv ord(\eta)(2)}}2^{-ms}\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^m z)dz.\end{aligned}$$

Ahora utilizando el Lema 3.1, tenemos:

Caso 1. $ord(\eta)=2k$,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m\geq -3\\ m\equiv ord(\eta)(2)}}2^{-ms}\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^m z)dz &= \sum_{k\geq -1}2^{-2ks}\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^{2k}z)dz\\ &= 2^{2s}\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^{-2}z)dz+\sum_{k\geq 0}2^{-2ks}\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^{2k}z)dz\\ &= 2^{-3}2^{2s}\chi(2^{-2}\eta_0)+2^{-3}\frac{1}{1-2^{-2s}}.\end{aligned}$$

Caso 2. $ord(\eta)=2k-1$,

$$\sum_{\substack{m\geq -3\\ m\equiv ord(\eta)(2)}}2^{-ms}\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^m z)dz = 2^s\sum_{k\geq -1}2^{-2ks}\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^{2k-1}z)dz$$

$$= 2^s\left(2^{2s}\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^{-3}z)dz+\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^{-1}z)dz+\sum_{k\geq 1}2^{-2ks}\int_{\mathbb{Z}_2^\times}\chi(\eta_0 2^{2k-1}z)dz\right)$$

$$= 2^s\left(2^{2s}2^{-3}\chi(2^{-3}\eta_0)+2^{-3}\chi(2^{-1}\eta_0)+2^{-3}\frac{2^{-2s}}{1-2^{-2s}}\right).$$

□

Reemplazando en la ecuación (10) se obtiene:

$$\begin{aligned}
8\rho(\pi_\beta, s) = \pi_\beta(1)&\left(2^{2s}e^{\frac{\pi i}{2}} + \frac{1}{1-2^{-2s}}\right)\\
+\pi_\beta(3)&\left(2^{2s}e^{\frac{3\pi i}{2}} + \frac{1}{1-2^{-2s}}\right)\\
+\pi_\beta(5)&\left(2^{2s}e^{\frac{\pi i}{2}} + \frac{1}{1-2^{-2s}}\right)\\
+\pi_\beta(7)&\left(2^{2s}e^{\frac{3\pi i}{2}} + \frac{1}{1-2^{-2s}}\right)\\
+\pi_\beta(2)&\left(2^{3s}e^{\frac{\pi i}{4}} - 2^s\frac{1-2^{-2s+1}}{1-2^{-2s}}\right)\\
+\pi_\beta(6)&\left(2^{3s}e^{\frac{3\pi i}{4}} - 2^s\frac{1-2^{-2s+1}}{1-2^{-2s}}\right)\\
+\pi_\beta(10)&\left(2^{3s}e^{\frac{5\pi i}{4}} - 2^s\frac{1-2^{-2s+1}}{1-2^{-2s}}\right)\\
+\pi_\beta(14)&\left(2^{3s}e^{\frac{7\pi i}{4}} - 2^s\frac{1-2^{-2s+1}}{1-2^{-2s}}\right).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Por último, reemplazamos en (2.2) cada valor de β y el correspondiente símbolo de Hilbert, dado en la siguiente tabla.

η	$\pi_1(\eta)$	$\pi_3(\eta)$	$\pi_5(\eta)$	$\pi_7(\eta)$	$\pi_2(\eta)$	$\pi_6(\eta)$	$\pi_{10}(\eta)$	$\pi_{14}(\eta)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
7	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
6	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
10	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
14	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1

De donde encontramos los siguientes valores para cada función *gamma*.

1. $\beta = 1$
$$\rho(\pi_1, s) = \frac{1-2^{s-1}}{1-2^{-s}}.$$
2. $\beta = 3, 7$
$$\rho(\pi_3, s) = i2^{2s-1} = \rho(\pi_7, s).$$
3. $\beta = 5$
$$\rho(\pi_5, s) = \frac{1+2^s-2^{-s+1}}{2(1-2^{-2s})} = \frac{1+2^s+2^{-2s}}{2(1+2^{-s})}.$$

4. $\beta = 2$
$$\rho(\pi_2, s) = 2^{3\left(s-\frac{1}{2}\right)}.$$

5. $\beta = 6$
$$\rho(\pi_6, s) = -i2^{3\left(s-\frac{1}{2}\right)}.$$

6. $\beta = 10$
$$\rho(\pi_{10}, s) = -2^{3\left(s-\frac{1}{2}\right)}.$$

7. $\beta = 14$
$$\rho(\pi_{14}, s) = i2^{3\left(s-\frac{1}{2}\right)}.$$

Referencias

[1] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, and V. M. Shelkovich, *Theory of p-adic distributions. linear and nonlinear models*, London Mathematical Society Lecture Note Series 370, Cambridge University Press, 2010.

[2] O. F. Casas-Sánchez, J. Galeano-Peñaloza, and J. J. Rodríguez-Vega, *Parabolic-type pseudodifferential equations with elliptic symbols in dimension 3 over p-adics*, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. **7(1)** (2015), 1–16.

[3] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, *Algebraic number theory*, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the Inter national Mathematical Union, Academic Press, London, 1967.

[4] D. Goldfeld and J. Hundley, *Automorphic representations and L-functions for the general linear group. Volume I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 129, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.

[5] Y. Jang, *An asymptotic expansion of the p-adic green function*, Tohoku Math. J. (2) **50(2)** (1998), 229–242.

[6] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta functions*, Second edition, Springer-Verlag, New York, 1984.

[7] S. Rallis and G. Schiffmann, *Distributions invariantes par le groupe orthogonal, in Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg, 1973–75)*, Lecture Notes in Math., vol. 497, Springer, Berlin. MR0404140 (53 #7944), pp. 494–642.

[8] A. M. Robert, *A Course in p-adic Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 198, Springer-Verlag New York, 2000.

[9] F. Sato, *p-adic Green functions and zeta functions*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **51(1)** (2002), 79–97.

[10] M. H. Taibleson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton University Press, 1975.

[11] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and E. I. Zelenov, *p-adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapur, 1994.

[12] Kitaoka Yoshiyuki, *Arithmetic of quadratic forms*, 1993.