Buen planteamiento local de una extensión bidimensional del tipo Kadomstev-Petviashvili para la ecuación Benjamin-Ono

On the local well-posedness of a bidimensional version Kadomstev-Petviashvili type of the Benjamin-Ono equation

Germán Preciado López[1,a]

Resumen. El propósito de este artículo es estudiar la buena colocación del problema de Cauchy asociado a una extensión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono en el espacio $X^s(\mathbb{R}^2)$.

Palabras claves: Problema de Cauchy, Transformada de Hilbert, Ecuación de Benjamin Ono, Buena colocación local.

Abstract. The purpose of this work is to study the well-posedeness of the Cauchy problem associated to a bidimentional extension of the Benjamin-Ono equation in the space $X^s(\mathbb{R}^2)$.

Keywords: Cauchy problem, Hilbert transform, Ono-Benjamin equation, local well-posedness.

Mathematics Subject Classification: 35J99.

Recibido: octubre de 2014 Aceptado: abril de 2015

1. Introducción

En este artículo nos proponemos examinar el buen planteamiento del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} (u_t + u^p u_x + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u)_x - \gamma u_{yy} = 0 \quad p \in \mathbb{N} \\ u(0;x,y) = \phi(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

en el contexto de los espacios Sobolev. Se puede probar que

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\left((D_x^{\frac{1}{2}} u)^2 + \alpha(D_x^{-\frac{1}{2}}\partial_y u)^2 + \gamma(\partial_x^{-1}\partial_y u)^2\right) - \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} dx \tag{2}$$

y

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx, \tag{3}$$

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad de Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]gpreciadol@unal.edu.co

son conservadas por el flujo de (1).

Este problema es una extensión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono (BO)

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u\partial_x u = 0. \tag{4}$$

La ecuación de BO fue introducida por Benjamin y Ono como un modelo de propagación de ondas largas en fluidos estratificados de gran profundidad. Algunas propiedades interesantes asociadas al flujo de la BO son: es un sistema completamente integrable, puede escribirse en forma Hamiltoniana, tiene soluciones de tipo solitones y posee infinitas cantidades conservadas.

En este sentido, resulta interesante examinar las extensiones de la ecuación Benjamin-Ono (4) a $\mathbb{R}^2$.

Usando el método de regularización parabólica probaremos que (1) es localmente bien puesto en el espacio $X^s(\mathbb{R}^2)$.

Notación

En este artículo hacemos uso sistemático de las siguientes notaciones.

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de Schwartz. Si $n = 2$, escribiremos simplemente $\mathcal{S}$.
2. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las distribuciones temperadas. Si $n = 2$, escribiremos simplemente $\mathcal{S}'$.
3. Para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de f y $\check{f}$ es la transformada inversa de Fourier de f. Recordamos que
$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\langle x,\xi\rangle}dx,$$
para toda $\xi \in \mathbb{R}^n$, cuando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
4. $\mathcal{H}$ es la transformada de Hilbert. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{H}f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-x} f(y)\,dy\right).$$
5. Para $s \in \mathbb{R}$, $H^s = H^s(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de Sobolev de orden s.
6. El producto interno en H^s es $\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^2}(1 + \xi^2 + \eta^2)^s \widehat{f}\widehat{\overline{g}}d\xi d\eta$.
7. $X^s = \{f \in H^s(\mathbb{R}^2) \,\big|\, f = \partial_x g, \text{ para alguna } g \in H^s(\mathbb{R}^2)\}$.
8. $\Lambda^s = (1 - \Delta)^{s/2}$.
9. $L_p^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \,\big|\, \Lambda^s f \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$.
10. Para $f \in L_p^s(\mathbb{R}^2)$, $|f|_{p,s} = \|\Lambda^s f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}$.
11. $[A, B]$ notará el conmutador de A y B.

2. Preliminares

Presentamos a continuación algunos resultados que serán utilizados a lo largo de este artículo.

2.1. Propiedades básicas de X^s

En esta sección exponemos algunos resultados acerca de los espacios X^s, muchos de ellos pueden ser encontrados en la literatura, especialmente aquella que se ha dedicado al estudio de los problemas de Cauchy de ecuaciones relacionadas con la ecuación KP (Kadomtsev-Petviashvili).

Definición 2.1. Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios X^s son definidos por

$$X^s = \Big\{ f \in H^s | \sqrt{1+\frac{1}{\xi^2}}(1+\xi^2+\eta^2)^{s/2}\widehat{f} \in L^2 \Big\}.$$

Observación 2.1 X^s es un espacio de Hilbert cuando es dotado del producto interno

$$\langle f, g\rangle_{X^s} = \int_{\mathbb{R}^2} \left(1+\frac{1}{\xi^2}\right)(1+\xi^2+\eta^2)^s \widehat{f}\,\overline{\widehat{g}}\,d\xi d\eta \quad f,\ g \in X^s.$$

Proposición 2.2. *Para todo s número real y n entero positivo, $\partial_x^n \mathcal{S}$ es denso en X^s.*

Demostración. Sean s número real y n un entero positivo. Es evidente que $\partial_x^n \mathcal{S}$ está contenido en X^s.

Supongamos que $f \in X^s$, y sea $g_t = ((i\xi)^{-n} e^{-t(\xi^2+\eta^2+1/\xi^2)}\widehat{f})^{\vee}$. Es claro que $g_t \in H^{s+n}$ y $\partial_x^n g_t \to f$ en X^s, cuando $t \to 0+$. Ahora bien, para todo $\epsilon > 0$, existe $\psi_t \in \mathcal{S}$ tal que $\|\psi_t - g_t\|_{H^{s+n}} < \epsilon/2$. En particular, $\|\partial_x^n \psi_t - f\|_{X^s} < \epsilon$, para t positivo suficientemente pequeño. Esto era lo que queríamos probar. $\square$

Observación 2.2

(i) Sea s un número real y $f \in \mathcal{S}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  (a) $f \in X^s$, para algún s.

  (b) $f \in \partial_x \mathcal{S}$.

  (c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

(ii) En este trabajo

$$\partial_x^{-1} f = \left(\frac{1}{i\xi}\widehat{f}\right)^{\vee}.$$

Un cálculo directo nos permite mostrar que

$$\partial_x^{-1} f = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} - \int_{x}^{\infty} f(x', y)\,dx',$$

para toda $f \in \mathcal{S}$. Esta expresión está de acuerdo con la definición dada en Ablowitz y Villarroel en [1], ver también [4].

(iii) El produto interno de X^s lo podemos escribir como

$$\langle f, g\rangle_{X^s} = \langle f, g\rangle_s + \langle \partial_x^{-1} f, \partial_x^{-1} g\rangle_s,$$

donde $\langle\ ,\ \rangle_s$ es el producto interno en H^s.

El siguiente resultado es un hecho bien curioso y bastante útil.

Proposición 2.3. *Sean r y s números reales tales que $s \geq r$. Supongamos que A es un operador antisimétrico en H^r y que u y $v \in C([0,T], X^s) \cap C^1((0,T], H^r)$. Supongamos, además, que $X^s \subseteq D(A)$, que el operador ∂_x conmuta con A, y que*

$$\frac{du}{dt} = Au + v.$$

Entonces, $\|\partial_x^{-1} u\|_r^2$ es diferenciable en $(0,T)$ y

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^{-1} u\|_r^2 = \langle \partial_x^{-1} v, \partial_x^{-1} u\rangle_r.$$

Demostración. Es bien claro que para todo $\tau > 0$, $\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u \in C([0,T], X^s) \cap C^1((0,T], H^r)$, $\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0,T)$ y

$$\frac{d}{dt}\left(\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u\right) = A\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u + \partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} v.$$

Claramente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\left(\partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u\right)\right\|_r^2 = \left\langle \partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} v, \partial_x^{-1}(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}} u\right\rangle_r.$$

Ya que $(1-\tau\partial_x^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ converge fuertemente a I en H^r, del teorema fundamental del cálculo y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se sigue la proposición. $\square$

2.2. Otros resultados importantes

Los siguientes resultados sobre conmutadores de operadores hacen parte del importante acervo de herramientas de las que se hace uso en el análisis.

El primero de ellos es dado por la siguiente proposición debida a Kato y Ponce.

Proposición 2.4 (Desigualdad de Kato-Ponce)**.** *Sean $s > 0$, $1 < p < \infty$, $\Lambda = (1-\Delta^2)^{1/2}$ y M_f el operador de multiplicación por f. Entonces,*

$$|[\Lambda^s, M_f]g|_p \leq c\left(|\nabla f|_\infty |\Lambda^{s-1} g|_p + |\Lambda^s f|_p |g|_\infty\right), \tag{5}$$

para toda f y $g \in \mathcal{S}$.

Corolario 2.5. *Para f y $g \in \mathcal{S}$,*

$$|f,g|_{s,p} \leq c\left(|f|_\infty|\Lambda^s g|_p + |\Lambda^s f|_p|g|_\infty\right).$$

Teorema 2.6 (Teorema del conmutador de Calderón)**.** *Sea $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de Lipschitz. Entonces, para cualquier $f \in S(\mathbb{R})$,*

$$\|[\mathcal{H},A]f'\|_0 \leq C|A'|_\infty\|f\|_0.$$

Lema 2.7. *Sean $g,h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $s \geq 0$. Entonces existe una constante $C = C(s)$ tal que*

$$\|gh\|_{[s]} \leq C\left[\|g\|_A\|h\|_{[s]} + \|g\|_{[s]}\|g\|_A\right]$$

donde $\|\phi\|_{[s]} = \|(-\Delta^2)^{\frac{s}{2}}\phi\|_0$ y $\|\phi\|_A = \|\widehat{\phi}\|_{L^1}$.

Corolario 2.8. *Sean g y h como en el Lema 2.7 y $\frac{n}{2} < s_0$. Entonces existe una constante $C = C(s)$ tal que*

$$\|g\partial_x h\|_s \leq C\left(\|g\|_s\|h\|_s + \|g\|_{s_0}\|h\|_{s+1}\right).$$

Proposición 2.9. *Sean $r \geq 1$ y $s > \frac{n}{2}$ fijos y $f,v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una constante $C = C(r,s)$ tal que*

$$|(v,f\partial_x v)_r| \leq C\left(\|\partial_x f\|_{s-1}\|v\|_r^2 + \|\partial_x f\|_{r-1}\|v\|_s\|v\|_r\right)$$

En particular, $|(v,f\partial_x v)| \leq C_s\|\partial_x f\|_{s-1}\|v\|_s$ para toda $f,v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La siguiente proposición es un hecho bastante conocido y muy útil en la prueba del buen planteamiento global de muchos problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales que aparecen en el contexto de la física.

Proposición 2.10. *Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función continua acotada tal que $\partial_x f$ existe, es continua y acotada. Entonces, si $A = f\partial_x$,*

$$\langle A(u),u\rangle_0 \geq -\frac{1}{2}|\partial_x f|_\infty\|u\|_0^2, \tag{6}$$

para cada $u \in D(A)$, y $A+\lambda$ es sobre, para todo $\lambda > \frac{1}{2}|f|_\infty$.

En particular, $A \in G(L^2(\mathbb{R}^2),1,\frac{1}{2}|f|_\infty)$, vea la sección anterior.

Demostración. La desigualdad (6) se obtiene inmediatamente después de hacer integración por partes. Veamos que $A+\lambda$ es sobre, si $\lambda > \frac{1}{2}|f|_\infty$. Supongamos que ψ es tal que $\langle (A+\lambda)(u),\psi\rangle_0 = 0$, para toda $u \in D(A)$. Por lo tanto, $\psi \in D(A^*) \subseteq D(A)$. De (6), se sigue que

$$0 \geq \langle (A+\lambda)(\psi),\psi\rangle_0 \geq (\lambda - \frac{1}{2}|f|_\infty)\|\psi\|_0^2.$$

Luego, $\psi = 0$ y, por lo tanto, $A+\lambda$ es sobre. $\square$

3. Buen planteamiento local

Buen planteamiento en X^s

En esta sección examinamos el buen planteamiento de (1) en X^s. Obsérvese que en este espacio el problema (1) es equivalente a la ecuación

$$\begin{cases} u_t + u^p u_x + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha \mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0, \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{7}$$

Para ver esto apelaremos al método de regularización parabólica. Así pues, consideremos primero el problema

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha \mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma \partial_x^{-1} \partial_y^2 u + u^p u_x = \mu \Delta u, \\ u(0) = \phi, \end{cases} \tag{8}$$

en X^s, para $\mu > 0$.

Como es usual en este método, se estudia el comportamiento de las soluciones del problema lineal asociado al problema (8)

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha \mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma \partial_x^{-1} \partial_y^2 u = \mu \Delta u, \\ u(0) = \phi, \end{cases} \tag{9}$$

en X^s. Haciendo uso de la transformada de Fourier llegamos a que la solución de (9) es

$$u(t) = E_\mu(t)\phi = \left(e^{(i(\operatorname{sgn}(\xi)(\xi^2+\alpha\eta^2) - \gamma\frac{\eta^2}{\xi}) - \mu(\xi^2+\eta^2))t} \widehat{\phi} \right)^{\vee}.$$

Luego, llegamos al siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces*

(i) Para $\mu \geq 0$, E_μ en (10) define un C_0-semigrupo de contracciones en X^s y H^{s-2}. Más aún, haciendo $u(t) = E_\mu(t)\phi$, tenemos que

(a) u satisface (9) en la topología fuerte de H^s al tomar el dato inicial $\phi \in \{\psi \in H^s \mid (i(\operatorname{sgn}(\xi)(\xi^2 + \alpha\eta^2) - \gamma\frac{\eta^2}{\xi}) - \mu(\xi^2+\eta^2))\widehat{\psi} \in L^s\}$.

(b) u satisface (9) en la topología fuerte de H^{s-2} al tomar el dato inicial $\phi \in X^s$.

Para el caso $\mu = 0$, E_μ puede ser extendido a un grupo unitario fuertemente continuo.

(ii) Si $\lambda \geq 0$ y $\mu > 0$ entonces, para todo $t > 0$, $E_\mu(t) \in B(X^s, X^{s+\lambda})$ y

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{X^{s+\lambda}} \leq K_\lambda \left(1 + (2\mu t)^{-\lambda}\right)^{1/2} \|\phi\|_{X^s} \tag{10}$$

para toda $\phi \in X^s$, donde K_λ es una constante que depende únicamente de λ.

Demostración. (a) es inmediato de la definición de E_μ. Bosquejamos la demostración de (b). Es claro que

$$\begin{aligned}\|E_\mu(t)\phi\|_{s+\lambda}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^2+\eta^2)^{s+\lambda}|\widehat{\phi}(\xi,\eta)|^2 e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t}d\xi d\eta\\ &\leq \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2}[(1+\xi^2+\eta^2)^{\lambda}e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t}]\|\phi\|_s^2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{-1}(E_\mu(t)\phi)\|_{s+\lambda}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\xi^2}(1+\xi^2+\eta^2)^{s+\lambda}|\widehat{\phi}(\xi,\eta)|^2 e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t}d\xi d\eta\\ &\leq \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2}[(1+\xi^2+\eta^2)^{\lambda}e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t}]\|\partial_x^{-1}\phi\|_s^2.\end{aligned}$$

De aquí se sigue (b), ya que

$$\sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2}[(1+\xi^2+\eta^2)^{\lambda}e^{-2\mu(\xi^2+\eta^2)t}] \leq K_\lambda\left(1+\left(\frac{1}{2\mu t}\right)^{\lambda}\right)^{1/2}.$$

□

Admitiendo como válido el principio de Duhamel, tendríamos que la ecuación (8) es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'. \tag{11}$$

Veamos que esto es efectivamente así en X^s.

Lema 3.2. *Para $s > 2$ y $\mu > 0$, el problema* (8) *es equivalente a la ecuación integral* (11) *en X^s. Más precisamente, para $u \in C([0,T],X^s)$, $u \in C^1([0,T],H^{s-2})$ y es una solución de* (8)*, si y sólo si, u satisface* (11).

Demostración. Sea $u \in C([0,T],X^s)$. Supongamos primero que $u \in C^1([0,T], H^{s-2})$ y es una solución de (8). Del Lema 3.1, se sigue que

$$\begin{aligned}\partial_{t'}\left(E_\mu(t-t')u(t')\right) &= E_\mu(t-t')(A_\mu u(t') + u_{t'}(t'))\\ &= E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t'),\end{aligned}$$

para $t > t'$, donde $A_\mu = -\mathcal{H}\partial_x^2 - \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 + \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 + \mu\Delta$. Luego, del teorema fundamental del cálculo, se sigue que u satisface la ecuación integral (11).

Ahora supongamos que u satisface la ecuación integral (11). Veamos primero que la integral en (11) tiene derivada continua en H^{s-2}. Para tal efecto, del

Lema 3.1, tenemos

$$\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'\right] =$$
$$= \frac{E_\mu(h)-I}{h}\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' +$$
$$+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt', \quad (12)$$

para $h>0$. Como $u \in C([0,T],X^s)$ y satisface la ecuación integral (11),

$$\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' \in C([0,T],X^s). \quad (13)$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{E_\mu(h)-I}{h}\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' =$$
$$= A_\mu \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt', \quad (14)$$

en H^{s-2}. Por otro lado, tenemos

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - u^p u_x(t)\right\|_{s-2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\|E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t') - u^p u_x(t)\right\|_{s-2} dt'. \quad (15)$$

Del Teorema 3.1, la función dentro de la integral de la parte derecha de (15) es continua para $t' \in [t,t+h]$. Por consiguiente, del teorema del valor medio para integrales, se sigue que

$$\lim_{h\to 0+}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t') - u^p u_x(t)dt'\right\|_{s-2} = 0. \quad (16)$$

En particular, tenemos que

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' = u^p u_x(t) \quad (17)$$

en H^{s-2}. Si $h<0$, como antes, tenemos que

$$\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'\right] =$$
$$= \frac{E_\mu(-h)-I}{-h}\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' +$$
$$+ \frac{1}{-h}\int_{t+h}^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'. \quad (18)$$

Como
$$\left\|\frac{E_\mu(-h)-I}{-h}\phi\right\|_{s-2} \leq \|\phi\|_{X^s},$$
para toda $\phi \in X^s$, de (13),

$$\lim_{h\to 0-} \frac{E(-h)-I}{-h}\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' =$$
$$= \lim_{h\to 0-} \frac{E_\mu(-h)-I}{-h}\int_0^{t} E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt', \quad (19)$$

en H^{s-2}. También tenemos que

$$\lim_{h\to 0-} \frac{1}{-h}\int_{t+h}^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' = u^p u_x(t) \quad (20)$$

en H^{s-2}. Por lo tanto, la integral en (11) tiene derivada con respecto a t en H^{s-2} y

$$\frac{d}{dt}\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' = A_\mu \int_0^t E_\eta(t-t')(u^p u_x)(t')dt' + u^p u_x t.$$

De aquí se sigue que u es derivable en H^{s-2} y satisface la ecuación (8). $\square$

Para $u \in C([0,T], X^s)$, sea

$$A(u)(t) = V_\eta(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'. \quad (21)$$

Veamos que $A(u) \in C([0,T], X^s)$, para $s \geq 1$. Basta ver que

$$\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'$$

es continua en t. Gracias al Teorema 3.1 y a que H^r es un álgebra de Banach, si $r>1$, tenemos que

$$\|E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')\|_{X^s} \leq C_s\left(1+\frac{1}{2\mu(t-t')}\right)^{\frac{1}{2}}\|u(t')\|_s^{p+1}, \quad (22)$$

donde para $t > 0$. Como $(1 + (2\mu t)^{-1})^{\frac{1}{2}}$ es localmente integrable, se tiene que

$$\int_0^t E_\mu(t - t')(u^p u_x)(t')dt' \in X^s.$$

Para $h > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' =\\ = (E_\mu(h) - I)\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' +\\ + \int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt'.\end{aligned}$$

Ya que, de la desigualdad (22),

$$\left\|\int_t^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt'\right\|_{X^s} \leq \sup_{[0,T]} \|u\|_{X^s}^{p+1} \int_0^h \left(1 + \frac{1}{2\mu\tau}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

tenemos la continuidad a derecha de

$$\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'.$$

Si $h < 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t+t')(u^p u_x)(t')dt' =\\ = \int_{t+\tilde{h}}^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' +\\ + (E_\mu(-\tilde{h}+h) - E_\mu(-\tilde{h}))\int_0^{t+\tilde{h}} E_\mu(t+\tilde{h}-t')(u^p u_x)(t')dt' -\\ - \int_{t+\tilde{h}}^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'\end{aligned}$$

para $-t < \tilde{h} < h$. Escogiendo $\tilde{h}$ tal que

$$\int_0^{\tilde{h}} \left(1 + \frac{1}{2\mu\tau}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau < \epsilon/3,$$

y haciendo uso de la desigualdad (22), tenemos que la norma en X^s del primer y tercer términos del lado derecho de la última ecuación son menores que $\epsilon/3$. Por un momento, fijando este $\tilde{h}$, podemos tomar h suficientemente pequeño tal que la norma en X^s del segundo término la podemos hacer menor que $\epsilon/3$. Por lo tanto, para $h < 0$ suficientemente pequeño,

$$\left\| \int_0^{t+h} E_\mu(t+h-t')(u^p u_x)(t')dt' - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt' \right\|_{X^s} < \epsilon.$$

Esto demuestra la continuidad a izquierda de

$$\int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x)(t')dt'.$$

Así pues, para $u \in C([0,T], X^s)$, $A(u) \in C([0,T], X^s)$. Veamos que A es una contracción en algún subespacio cerrado de $C([0,T], X^s)$ con la norma de la convergencia uniforme. La elección conveniente es el conjunto

$$\Upsilon_s(T) = \{u \in C([0,T], X^s) \mid \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - E_\mu(t)\phi\|_{X^s} \le M\},$$

donde $M > 0$ es fijo. Veamos que podemos ecoger $T > 0$ suficientemente pequeño tal que A es una contracción en $\Upsilon_s(T)$ con la métrica inducida

$$d_s(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{X^s}.$$

Veamos primero que podemos elegir $T > 0$ tal que $A(\Upsilon_s(T)) \subseteq \Upsilon_s(T)$. Sea $u \in \Upsilon_s(T)$. Entonces, de (22)

$$\begin{aligned} \|(Au)(t) - E_\mu(t)\phi\|_{X^s} &\le C \int_0^t \left(1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{1/2} \|u(\tau)\|_{X^s}^{p+1} d\tau \\ &\le C(M + \|\phi\|_{X^s})^{p+1} \left(T + \left(\frac{T}{\sqrt{\mu}}\right)^{1/2}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Luego, para T suficientemente pequeño el lado derecho de (23) se puede hacer menor que M, o en otras palabras, para este mismo T, $A(\Upsilon_s(T)) \subseteq \Upsilon_s(T)$.

Finalmente, veamos que este T también puede ser elegido de tal manera que A sea una contracción sobre $\Upsilon_s(T)$. Del Lema 3.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \|(Au)(t) - (Av)(t)\|_{X^s} &\le C \int_0^t \left(1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} ||(u^{p+1} - v^{p+1})_x(\tau)||_{X^{s-1}} d\tau \\ &\le C_s \sup_{t\in[0,\tilde{T}]} ||u^{p+1} - v^{p+1}||_s \int_0^t \left(1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\le C_s (M + \|\phi\|_{X^s})^p \left(T + \left(\frac{T}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{X^s}, \end{aligned}$$

gracias a que

$$||u^{p+1} - v^{p+1}||_s \le C(||u||_s^p + ||v||_s^p)||u - v||_s, \tag{24}$$

para todo u y $v \in H^s$. Luego, asimismo, podemos elegir T tal que $C_s(M + |\phi|_s)(T + (\frac{T}{\mu})^{\frac{1}{2}}) < 1$. Para dichos T, A es una contracción sobre $\Upsilon_s(T)$.

Luego, en resumen, hemos demostrado parcialmente el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sean $\mu > 0$, $s > 2$ y $\phi \in X^s$ entonces, existe $T = T(s, \|\phi\|_{X^s}, \mu) > 0$ y una única función $u \in C([0,T], X^s) \cap C([0,T], H^{s-2})$ solución de (8). La transformación $\phi \mapsto u$ de X^s en $C([0,T], X^s)$ es continua.*

Demostración. Falta probar la unicidad de la solución y la dependencia continua del dato inicial. Para ello necesitamos el siguiente lema. □

Lema 3.4. *Supongamos que $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\beta + \gamma > 1$, $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Sea f una función definida en $[0,T]$, no negativa y tal que $t^{\gamma-1} f(t)$ sea localmente integrable allí. Si*

$$f(t) \leq a + b \int_0^t (t - t')^{\beta-1} (t')^{\gamma-1} f(t') dt' \tag{25}$$

para casi todo $(0,T)$, entonces

$$f(t) \leq a F_{\beta,\gamma}((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\nu}} t), \tag{26}$$

donde $\nu = \beta + \gamma - 1 > 0$ y

$$F_{\beta,\gamma}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m y^{m\nu} \tag{27}$$

con $c_0 = 1$ y c_m definido por la relación de recurrencia $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(m\nu+\gamma)}{\Gamma(m\nu+\gamma+\beta)}$, para m entero no negativo.

Además,

$$F_{\beta,\gamma}(y) = O\left(y^{1/2(\frac{\nu}{\beta} - \gamma)} \, e^{\frac{\beta}{\nu} y^{\frac{\nu}{\beta}}} \right), \tag{28}$$

cuando $s \to \infty$.

Demostración. Ver el Lema 7.1.2 en [3]. □

Ahora probaremos la siguiente proposición, que da una forma más precisa de lo que deseamos demostrar en el teorema.

Proposición 3.5. *Sean ϕ y $\psi \in X^s$, y u y $v \in C([0,T]; X^s)$ las correspondientes soluciones de la ecuación en derivadas parciales en (8), con $u(0) = \phi$ y $v(0) = \psi$. Sea $M = \sup_{t\in[0,T]}(\|u(t)\|_{X^s}^p + \|v(t)\|_{X^s}^p)$. Entonces, para $t \in [0,T]$,*

$$\|u(t) - v(t)\|_{X^s} \leq F_{1/2,1}\left(b\Gamma(1/2)t\right) \|\phi - \psi\|_{X^s}, \tag{29}$$

donde $b = MC_s\mu^{-\frac{1}{2}}((\mu T)^{\frac{1}{2}} + 1)$.

Demostración. Sean u y v como en el enunciado de la proposición y sea $w(t) = u(t) - v(t)$. Luego, de la ecuación integral (11), se sigue que

$$w(t) = E_\mu(t)(\phi - \psi) - \int_0^t E_\mu(t-t')(u^p u_x(t') - v^p v_x(t'))dt'. \qquad (30)$$

Tomando la norma en X^s y ya que $E_\mu(t)$ es un semigrupo de contracciones, de la desigualdad triangular, tenemos

$$\|w(t)\|_{X^s} \leq \|\phi - \psi\|_{X^s} + \frac{1}{2}\int_0^t \|E_\mu(t-t')(u^p u_x(t') - v^p v_x(t'))\|_{X^s}\, dt'. \qquad (31)$$

Ahora veamos cómo está acotada la integral que aparece en esta última desigualdad. Del Lema 3.1 y de (24), tenemos

$$\begin{aligned} &\int_0^t \|E_\mu(t-t')(u^p u_x(t') - v^p v_x(t'))\|_{X^s}\, dt' \\ &\leq C_s \int_0^t \left(1 + \frac{1}{2\mu(t-t')}\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\partial_x(u^{p+1}(t') - v^{p+1}(t'))\right\|_{X^{s-1}} dt' \\ &\leq C_s \int_0^t \left(1 + (2\mu(t-t'))^{-\frac{1}{2}}\right) \left\|u^{p+1}(t') - v^{p+1}(t')\right\|_s dt' \\ &\leq C_s M \int_0^t \mu^{-\frac{1}{2}} \left((2\mu T)^{\frac{1}{2}} + 1\right)(t-t')^{-\frac{1}{2}} \|w(t')\|_{X^s}\, dt'. \end{aligned} \qquad (32)$$

De aquí y gracias al Lema 3.4 se sigue la proposición. □

Esto completa la demostración del Teorema 3.3.

Teorema 3.6. *Si* $u \in C([0,T], X^s)$ *es solución de* (8), *entonces* $u \in ((0,T], X^\infty)$, *donde* $X^\infty = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} X^s$ *dotado con la topología de Frechet.*

Demostración. De (10) y (11), se sigue que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{X^{s+\lambda}} \leq C &\left(1 + \left(\frac{1}{2\mu t}\right)^{\lambda}\right)^{1/2} \|\phi\|_{X^s} \\ &+ C\int_0^t \left(1 + \left(\frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{\lambda+1}\right)^{1/2} \|u(\tau)\|_{X^s}^{p+1} d\tau. \end{aligned} \qquad (33)$$

Luego, si $\lambda < 1$, $u(t) \in X^{s+\lambda}$, para $0 < t \leq T$. Un argumento análogo a la discusión precedente de Teorema 3.3 nos garantiza que $u \in C((0,T], X^{s+\lambda})$, si $\lambda < 1$. Un sencillo argumento de inducción demuestra el teorema. □

Lema 3.7. *El tiempo de existencia* T*, en el Teorema 3.3, puede ser escogido independiente de* μ.

Demostración. Supongamos que u es solución de (8). Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\partial_t||u(t)||_s^2 &= 2\langle u, \mu\Delta u\rangle_s - 2\langle u, uu_x\rangle_s\\ &= 2\langle u, \mu\Delta u\rangle_s - 2\langle u, \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 u\rangle_s - 2\langle u, uu_x\rangle_s\\ &\le -2\langle u, u^p u_x\rangle_s\\ &\le C_s\|u(t)\|_s^{p+2},\end{aligned}$$

y de la Proposición 2.3,

$$\begin{aligned}\partial_t||\partial_x^{-1}u(t)||_s^2 &= 2\langle\partial_x^{-1}u, \mu\Delta\partial_x^{-1}(u)\rangle_s - \frac{2}{p+1}\langle\partial_x^{-1}u, u^{p+1}\rangle_s\\ &\le \frac{2}{p+1}|\langle\partial_x^{-1}u, u^{p+1}\rangle_s| \le C||\partial_x^{-1}u||_s||u||_s^{p+1}\\ &\le C\|u(t)\|_{X^s}^{p+2},\end{aligned}$$

para $0 < t \le T$. En otras palabras,

$$\partial_t\|u(t)\|_{X^s}^2 \le C_{s,p}\|u(t)\|_{X^s}^{p+2},$$

para $0 < t \le T$. Luego, del teorema fundamental del cálculo, se sigue que

$$\|\phi\|_{X^s}^{-p} - \|u(t)\|_{X^s}^{-p} = \frac{p}{2}\int_{\|\phi\|_{X^s}^2}^{\|u(t)\|_{X^s}^2} \frac{dx}{x^{\frac{p}{2}+1}} \le C_{s,p}t,$$

para $0 \le t \le T$. Por lo tanto, para todo $\mu > 0$,

$$\|u(t)\|_{X^s} \le \frac{\|\phi\|_{X^s}}{(1 - C_{s,p}\|\phi\|_{X^s}^p t)^{1/p}} \le \frac{\|\phi\|_{X^s}}{(1 - C_{s,p}\|\phi\|_{X^s}^p T)^{1/p}},$$

si $T < (C_{s,p}\|\phi\|_{X^s})^{-1}$. Esta última desigualdad y el Teorema 3.3 nos garantizan que, para toda $\mu > 0$, la solución u de (8) puede ser extendida al intervalo $[0, T]$, si $T < (C_{s,p}\|\phi\|_{X^s})^{-1}$. □

A partir de ahora y hasta el final de esta sección ρ es la función

$$\rho(t) = \frac{\|\phi\|_{X^s}}{(1 - C_{s,p}\|\phi\|_{X^s}^p t)^{1/p}}. \tag{34}$$

Veamos el buen plateamiento de (7). Para eso exploraremos lo que ocurre con la red de soluciones de (8), $\{u_\mu\}_{\mu>0}$, cuando μ tiende a 0. Realmente, mostraremos que ésta converge débilmente a una solución de (7). Por el momento, veamos el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Sea $s > 2$. Entonces, para cada $\phi \in X^s$, existen $T = T(\|\phi\|_{X^s})$ y $u_0 \in C_w([0,T], X^s) \cap C_w^1([0,T], H^{s-2})$ tales que $u_0(0) = \phi$ y u_0 es solución de la ecuación (7), en el sentido débil, es decir,*

$$\frac{d}{dt}\langle u_0(t), \psi\rangle_{s-2} = -\langle u_0^p u_{0x} + \mathcal{H}\partial_x^2 u_0 + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u_0 - \gamma\partial_x^{-1}u_{0yy}, \psi\rangle_{s-2}, \tag{35}$$

para todo $\psi \in H^{s-2}(\mathbb{R})$. *Además,* $\|u_0\|_{X^s} \leq \rho(t)$, *para todo* $t \in [0,T]$, *donde* $\rho(t)$ *es como en* (34).

Demostración. Para cada μ, notaremos por u_μ la solución de (8) en el intervalo $[0,T]$, donde, gracias al Lema 3.7, T es tomado independientemente de μ. Ahora sean $u = u_\mu$, $v = u_\nu$, para μ y $\nu > 0$. Es fácil ver que

$$\partial_t \|u - v\|_0^2 \leq 4M^2|\mu - \nu| + C_s M^p \|u - v\|_0^2$$

donde C_s depende únicamente de s y $M = \sup_{t\in[0,T]} \rho(t)$. De la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\|u - v\|_0 \leq C|\mu - \nu|,$$

para todo $t \in [0,T]$. Ya que $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ es completo con la norma de la convergencia uniforme, existe $u_0 \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ tal que

$$\lim_{\mu\to 0+} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\mu(t) - u_0(t)\|_0 = 0.$$

Ahora veamos que $u_0 \in X_s$. Sea $t \in [0,T]$, puesto que $\lim_{\mu\to 0+} u_\mu = u_0$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$, existe una subsucesión $\left\{\mu_n^{(j)}\right\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \widehat{u}_{\mu_n^{(j)}}(t,\xi,\eta) = \widehat{u}_0(t,\xi,\eta) \qquad \xi, \eta\text{–c.t.p.}$$

Del Lema de Fatou, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_{X^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2 + \eta^2)^s (1 + \eta^{-2}) |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2 + \eta^2)^s (1 + \eta^{-2}) \left|\widehat{u}_{\mu_n^{(j)}}\right| \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \|u_{\mu_n^{(j)}}\|_{X^s}^2 \\
&\leq \rho(t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_\mu \rightharpoonup u_0$ en X^s. En efecto, sea $\varphi \in X^s$ y $\epsilon > 0$. Tomando $\varphi_\epsilon \in \partial_x^2 \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|\varphi - \varphi_\epsilon\|_{X^s} \leq \frac{\epsilon}{4M}$, tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle u_\mu - u_0, \varphi\rangle_{X^s}| &\leq |\langle u_\mu - u_0, \varphi - \varphi_\epsilon\rangle_{X^s}| + |\langle u_\mu - u_0, \varphi_\epsilon\rangle_{X^s}| \\
&\leq \|u_\mu - u_0\|_{X^s} \|\varphi - \varphi_\epsilon\|_{X^s} + \\
&\quad + \|u_\mu - u_0\|_0 \|(1 - \Delta)^s (1 + \partial_x^{-2}) \varphi_\epsilon)\|_0 \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$ y $\mu > 0$ suficientemente pequeño. Luego,

$$\lim_{\mu\to 0^+} \sup_{t\in[0,T]} \langle u_\mu - u_0, \varphi\rangle_{X^s} = 0,$$

para toda $\varphi \in X_s$. Como la convergencia es uniforme para toda $\varphi \in X^s$, $u_0 \in C_w([0,T];\ X^s)$.

Finalmente probemos que $u_0 \in C_w^1([0,T]; H^{s-2}(\mathbb{R}))$ y satisface la ecuación (11) para toda $\psi \in H^{s-2}\mathbb{R}$. En efecto,

$$\langle u_\mu, \psi\rangle_{s-2} = \langle \phi, \psi\rangle_{s-2} - \int_0^t \langle A_\mu(u_\mu) + u_\mu^p u_{\mu x}, \psi\rangle_{s-2} d\tau \tag{36}$$

para todo $t \in [0,T]$ y toda $\psi \in H^{s-2}\mathbb{R}^2$, donde $A_\mu = \mathcal{H}\partial_x^2 + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 - \mu\Delta$. Dado que $u_\mu \to u_0$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$ y $u_\mu \rightharpoonup u_0$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} A_\mu(u_\mu) &\rightharpoonup A_0(u_0) && \text{en } H^{s-2}(\mathbb{R}^2),\\ u_\mu^p u_{\mu x} &\rightharpoonup u_0^p u_{0_x} && \text{en } H^{s-1}(\mathbb{R}^2),\end{aligned}$$

uniformemente en $[0,T]$ cuando $\mu \to 0+$. Luego, si hacemos $\mu \to 0+$ en (36) obtenemos (35). Esto termina la prueba. □

Corolario 3.9. *Si* u_0 *como en el teorema anterior, entonces* $u_0 \in AC([0,T]; H^{s-2})$.

Demostración. Puesto que $t \in [0,T] \mapsto \mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u^p u_x$ es débilmente continua en $H^{s-2}\mathbb{R}^2$, del Teorema de Bochner Pettis, esta función es fuertemente integrable en $H^{s-2}\mathbb{R}^2$. Luego, de la ecuación (35),

$$u_0(t) = \phi - \int_0^t \left[\mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u^p u_x\right] d\tau. \tag{37}$$

De aquí se sigue el corolario. □

Proposición 3.10. *Sean* $T > 0$ *fijo,* $\phi_j \in H^s\mathbb{R}^2$*,* $j = 1, 2$ *y* $v_j \in C\left([0,T];\ L^2(\mathbb{R})\right) \cap C_w\left([0,T]; H^s\mathbb{R}^2\right) \cap AC\left([0,T];\ H^{s-2}(\mathbb{R}^2)\right)$ *soluciones de la ecuación* (7) *en el sentido débil y tales que* $v_j(0) = \phi_j$*. Entonces,*

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|_0 \le \|\phi_1 - \phi_2\|_0\ e^{tL_0(K)}$$

donde L_0 *es una función continua y creciente en los números reales positivos y* $K = \text{máx}\left\{\sup_{[0,T]}\|v_1(t)\|_s, \sup_{[0,T]}\|v_2(t)\|_s\right\}$.

Demostración. Sea $w(t) = v_1(t) - v_2(t)$. Como $s > 2$, v_1 y v_2 son fuertemente derivables con respecto a t en $L^2(\mathbb{R}^2)$ y

$$\partial_t v_i = \mathcal{H}\partial_x^2 v_i + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 v_i - \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 v_i + v_i^p v_{i_x}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_0 &= \langle v_1^p\partial_x v_1 - v_2^p\partial_x v_2, w(t)\rangle_0\\ &= \left\langle q(u,v)\partial_x v_2, w^2(t)\right\rangle_0 + \langle v_1^p\partial_x w(t), w(t)\rangle_0 .\end{aligned}$$

donde $q(u,v) = \sum_{i=0}^{p-1} u^i v^{p-1-i}$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\|v_1(t) - v_2(t)\|_0 \leq L_0(K)\|v_1(t) - v_2(t)\|_0$$

donde $L_0(x) = Cx^p$ y $K = \text{máx}\left\{\sup_{[0,T]} \|v_1(t)\|_s,\ \sup_{[0,T]} \|v_2(t)\|_s\right\}$. De la desigualdad de Gronwall se sigue la proposición. □

Teorema 3.11. *Sea u_0 como en el Teorema 3.8, entonces $u_0 \in C([0,T], X^s) \cap C^1([0,T], H^{s-2}(\mathbb{R}^2))$ y es la única solución de* (7).

Demostración. De la proposición inmediatamente anterior se sigue u_0 es la única solución débil de (7). Primero veamos que u_0 es continua en 0. Tenemos que

$$|(u_0(t), \varphi)_s| \leq \|u_0(t)\|_s \leq [\rho(t)]^{\frac{1}{2}},$$

para toda $\varphi \in X^s$, con $\|\phi\| = 1$, y todo $t \in [0,T]$. Luego,

$$|(\phi, \varphi)_s| = \liminf_{t\to 0+} \|u_0(t)\|_s \leq \limsup_{t\to 0+} \|u_0(t)\|_s \leq \lim_{t\to 0+} [\rho(t)]^{\frac{1}{2}} = \|\phi\|_s$$

para toda $\varphi \in X^s$. Luego, el límite de $\|u_0(t)\|_{X^s}$, cuando $t \to 0+$, existe y $\lim_{t\to 0^+} \|u_0(t)\|_s = \|\phi\|_s$.

Ya que $u(t) \to \phi$ débilmente en X^s cuando $t \to 0+$, se sigue que $\lim_{t\to 0+} u_0(t) = \phi$ en la norma de X^s.

Sea $t^* \in [0,T)$ fijo, entonces existe $\widetilde{T} > 0$ y una única $v \in C_w([0,\widetilde{T}]; H^s) \cap C_w^1([0,\widetilde{T}]; H^{s-2})$ que satisface (7) con $u(t^*)$ en lugar de ϕ. La unicidad implica que $v(t) = u(t+t^*)$, para $t \in [0,\widetilde{T}]$. Como v es continua a derecha de $t = 0$, u es continua a la derecha de $t = t^*$.

Ahora, obsérvese que $u(t^* - t, -x, -y)$ es solución del problema (7) con $u(t^*)$ en lugar de ϕ. Luego, $u(t^* - t, -x, -y)$ es continua a derecha en $t = 0$, y por ende, u es continua a izquierda en t^*.

En resumen, se tiene que $u \in C([0,T], X^s(\mathbb{R}))$. En particular, $\mathcal{H}\partial_x^2 u + \alpha\mathcal{H}\partial_y^2 u + \gamma\partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u^p u_x \in C([0,T], H^{s-2}(\mathbb{R}))$. Así, de la ecuación (37) y la proposición anterior, se sigue que $u \in C^1([0,T], H^{s-2}(\mathbb{R}))$ y es la única solución fuerte de (7). □

Veamos ahora la dependencia continua del dato inicial. Para este fin seguiremos las ideas usadas por Bona y Smith, en [2], para probar la dependencia continua del dato inicial en el caso del problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV. Así pues, sea $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ una sucesión de funciones en X^s tales que $\phi_n \to \phi_\infty$ en X^s, cuando $n \to \infty$. Del Teorema 3.3 y el Lema 3.7, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ fijo y $\mu \geq 0$, existen $T_{s,n} = T_{s,n}(\phi_n) > 0$ independiente de μ y una única $u_{\mu,n} \in C([0, T_{s,n}], X^s)$ que satisface la ecuación (8) con $u_{\mu,n}(0) = \phi_n$.

Proposición 3.12. *Sea $T \in (0, T_{s,\infty})$ fijo. Entonces, existen N_s entero positivo y una constante $M > 0$ tal que $T_{s,n} \geq T$, para todo $n \geq N_s$, y $\|u_{\mu,n}(t)\|_{X^s} \leq M$, para todo $t \in [0,T]$.*

Demostración. Basta realizar un refinamiento de la demostración del Lema 3.7. □

Lema 3.13. *Sea* $\phi \in H^s$, $s > 0$. *Defina*

$$\phi^\tau = \exp\left(-\tau(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}\right)\phi = \left(\widehat{\phi}(\cdot)\exp\left(-\tau(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\right)\right)^{\vee} . \tag{38}$$

Entonces

$$\lim_{\tau\to 0+} \|\phi^\tau - \phi\|_s = 0$$

y existe una constante $C = C(s)$ *tal que*

$$\|\phi^\tau\|_{s+1} \leq C\left(\frac{1}{\tau s}\right)^{\frac{1}{s}} \|\phi\|_s \tag{39}$$

y

$$\|\phi^\tau - \phi^\theta\|_0 \leq C|\tau-\theta|\|\phi\|_s. \tag{40}$$

Ahora, para la sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ antes introducida, sean ϕ_n^τ las aproximaciones definidas en (38) y $u_{\mu,n}^\tau$ las soluciones de (8) correspondientes. Puesto que $\|\phi_n^\tau\|_{X^s} \leq \|\phi_n\|_{X^s}$, para todo τ y todo $n = 1, 2, \ldots, \infty$, la Proposición 3.12 puede ser reformulada con los mismos T, $N_0 > 0$ y M mencionados allí, en el sentido de que todas las soluciones $u_{\mu,n}^\tau$ están definidas en $[0, T]$, para todo $n \geq N_0$ y toda $\mu \geq 0$, y son tales que $\|u_{\mu,n}^\tau(t)\|_{X^s} \leq M$, para todo $t \in [0, T]$.

Antes de abordar el siguiente resultado, vale la pena mencionar que las soluciones $u_{0,n}^\tau$ están en $C([0, T], X^\infty)$. En efecto, si $\mu > 0$, de la Proposición 2.9 con $r = s + 1$ y la Proposición 2.3, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\mu,n}^\tau\|_{s+1} &\leq |\langle u_{\mu,n}^\tau, {u_{\mu,n}^\tau}^p \partial_x u_{\mu,n}^\tau\rangle_{s+1}| \\ &\leq C\|u_{\mu,n}^\tau\|_s^p \, \|u_{\mu,n}^\tau\|_{s+1},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_x^{-1}u_{\mu,n}^\tau\right\|_{s+1} \leq & \frac{1}{p+1}|\langle \partial_x^{-1}u_{\mu,n}^\tau, {u_{\mu,n}^\tau}^{p+1}\rangle_{s+1}| \\ &\leq C\left(\|u_{\mu,n}^\tau\|_s^p\|\partial_x^{-1}u_{\mu,n}^\tau\|_{s+1} + \|u_{\mu,n}^\tau\|_s^p\|u_{\mu,n}^\tau\|_{s+1}\|\partial_x^{-1}u_{\mu,n}^\tau\|_{s+1}\right).\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\mu,n}^\tau\|_{X^{s+1}} \leq C\|u_{\mu,n}^\tau\|_s^p\|u_{\mu,n}^\tau\|_{X^{s+1}},$$

luego, la desigualdad de Gronwall implica que

$$\|u_{\mu,n}^\tau\|_{X^{s+1}} \leq CM^p\|\phi_n^\tau\|_{X^{s+1}}, \tag{41}$$

para todo $\mu > 0$ y todo $t \in [0, T]$. Una fácil modificación de los razonamientos expuestos hasta aquí, muestran que, en X^{s+1}, $u_{0,n}^\tau$ se puede extender a todo el intervalo $[0, T]$ y satisface la desigualdad anterior. Un simple argumento de inducción demuestra que esta misma afirmación es válida con X^∞ en lugar X^{s+1}.

Proposición 3.14. *Sean $\phi_n \in X^s, s > 2, \phi_n^\tau$ y $u_{\mu,n}^\tau$ como antes. Supongamos que $0 \leq \theta < \tau$, entonces existen $N_0 \in \mathbb{N}$, $C = C(s, \phi_\infty, T) > 0$ y $\eta = \eta(s) \in (0,1)$ tal que, para todo $n \geq N_0$,*

$$\|u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\|_{X^s} \leq C\left(\|\phi_n^\tau - \phi_n^\theta\|_{X^s} + \tau^{2(1-\eta)}\right),$$

para todo $\mu > 0$.

Demostración. Sean N_0 tal que $u_{\mu,n}^\tau(t)$ este definido sobre $[0,T]$, para todo $n \geq N_0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\|_s = &- \mu\|\nabla(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta)\|_s - \\ &- \langle u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta, (u_{\mu,n}^\tau)^p\partial_x u_{\mu,n}^\tau - (u_{\mu,n}^\theta)^p\partial_x u_{\mu,n}^\theta\rangle_s\end{aligned} \tag{42}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^{-1}(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta)_s = &- \mu\|\partial_x^{-1}\nabla(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta)\|_s - \\ &- \frac{1}{p+1}\langle\partial_x^{-1}(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta), (u_{\mu,n}^\tau)^{p+1} - (u_{\mu,n}^\theta)^{p+1}\rangle_s.\end{aligned} \tag{43}$$

Veamos que

$$\begin{aligned}&|\langle u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta, (u_{\mu,n}^\tau)^p\partial_x u_{\mu,n}^\tau - (u_{\mu,n}^\theta)^p\partial_x u_{\mu,n}^\theta\rangle_s| \\ &\qquad \leq C\left(\|u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\|_s + \frac{1}{2}\tau^{2\left(1-\frac{s_0+1}{s}\right)}\right),\end{aligned} \tag{44}$$

para $1 < s_0 < s-1$. Es claro que

$$\begin{aligned}&(u_{\mu,n}^\tau)^p\partial_x u_{\mu,n}^\tau - (u_{\mu,n}^\theta)^p\partial_x u_{\mu,n}^\theta \\ &\qquad = (u_{\mu,n}^\theta)^p\partial_x(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta) + ((u_{\mu,n}^\tau)^p - (u_{\mu,n}^\theta)^p)\partial_x u_{\mu,n}^\tau.\end{aligned} \tag{45}$$

Ahora bien, por un lado

$$\begin{aligned}|\langle u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta, (u_{\mu,n}^\theta)^p\partial_x(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta)\rangle_s| &\leq C_s\|(u_{\mu,n}^\theta)^p\|_s\|u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\|_s \\ &\leq C_s M^p\|u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\|_s.\end{aligned} \tag{46}$$

Por otro lado, de la Desigualdad de Cauchy-Schwartz y el Corolario 2.8, obtenemos

$$\begin{aligned}&|\langle u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta, ((u_{\mu,n}^\tau)^p - (u_{\mu,n}^\theta)^p)\partial_x u_{\mu,n}^\tau\rangle_s| \\ &\qquad \leq\|u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\|_s\|((u_{\mu,n}^\tau)^p - (u_{\mu,n}^\theta)^p)\partial_x u_{\mu,n}^\tau\|_s \\ &\qquad \leq C\|u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\|_s\Big(\|(u_{\mu,n}^\tau)^p - (u_{\mu,n}^\theta)^p\|_s\|u_{\mu,n}^\tau\|_s + \\ &\qquad\quad + \|(u_{\mu,n}^\tau)^p - (u_{\mu,n}^\theta)^p\|_{s_0}\|u_{\mu,n}^\tau\|_{s+1}\Big).\end{aligned} \tag{47}$$

Estimemos algunos términos que aparecen en esta última desigualdad. Uno de ellos satisface

$$\|(u_{\mu,n}^{\tau})^p - (u_{\mu,n}^{\theta})^p\|_s \leq CM^{p-1}\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_s. \tag{48}$$

Del Lema 3.13 y la desigualdad (41), obtenemos

$$\|u_{\mu,n}^{\tau}\|_{s+1} \leq CM^p\|\phi_n^{\tau}\|_{s+1} \leq C\|\phi_n\|_s\tau^{-\frac{1}{s}}.$$

El siguiente término que estimamos es

$$\begin{aligned}\|(u_{\mu,n}^{\tau})^p - (u_{\mu,n}^{\theta})^p\|_{s_0} &\leq CM^{p-1}\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_{s_0}\\ &\leq CM^{p-1}\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_s^{\lambda}\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_0^{1-\lambda}\\ &\leq CM^{p-1+\lambda}\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_0^{1-\lambda},\end{aligned}$$

con $\lambda = \frac{s_0}{s}$. Por último, estimamos $\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_0 =& -\mu\|\partial_x(u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta})\|_0+\\ &+\frac{1}{p+1}\langle\partial_x(u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}), (u_{\mu,n}^{\tau})^{p+1} - (u_{\mu,n}^{\theta})^{p+1}\rangle_0\\ \leq& CM^p\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_0.\end{aligned}$$

Gracias a la desigualdad de Gronwall y al Lema 3.13 se obtiene

$$\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_0 \leq CM^p\|\phi_n^{\tau} - \phi_n^{\theta}{}_{\text{-}}0 \leq CM^p|\tau-\theta|^2\|\phi_n\|_0. \tag{49}$$

De las desigualdades (46) a (49) obtenemos (44).

Ahora bien, de la Proposición 2.9, tenemos

$$\begin{aligned}&|\langle\partial_x^{-1}(u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}), (u_{\mu,n}^{\tau})^{p+1} - (u_{\mu,n}^{\theta})^{p+1}\rangle_s|\\ &\qquad=|\langle\partial_x^{-1}(u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}), q(u_{\mu,n}^{\tau}, u_{\mu,n}^{\theta})(u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta})\rangle|_s\\ &\qquad\leq CM^p\|\partial_x^{-1}(u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta})\|_s,\end{aligned} \tag{50}$$

donde $q(x,y) = \sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i}$.

De (42), (43), (44) y (50), se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_{X^s} \leq C\left(\tau^{2\left(1-\frac{s_0+1}{s}\right)} + \|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_{X^s}\right).$$

La desigualdad de Gronwall implica que

$$\|u_{\mu,n}^{\tau} - u_{\mu,n}^{\theta}\|_{X^s} \leq C\left(\|\phi_n^{\tau} - \phi_n^{\theta}\|_{X^s} + \tau^{2\left(1-\frac{s_0+1}{s}\right)}\right).$$

□

Corolario 3.15. *Sean ϕ_n, ϕ_n^τ y $u_{\mu,n}^\tau$ como en el resultado anterior. Entonces, para $n \geq N_0$ fijo, $\left\{u_{\mu,n}^\tau\right\}_{\tau>0}$ converge uniformemente en μ y t a $u_{\mu,n}$, cuando $\tau \to 0+$. En otras palabras,*

$$\lim_{\tau\to 0+} \sup_{t\in[0,T],\mu>0} \|u_{\mu,n}^\tau(t) - u_{\mu,n}(t)\|_s = 0.$$

Demostración. Tomando $\theta = 0$ en la Proposición 3.14. □

Teorema 3.16. *En X^s, la aplicación $\phi \mapsto u$, donde u es solución de (7), es continua. Más precisamente, si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ es una sucesión tal que $\phi_n \to \phi_\infty$ en X^s y si $u_{0,n} \in C([0, T_{s,n}], X^s)$ son las correspondientes soluciones de (7), entonces dado cualquier $T \in (0, T_{s,\infty})$ existe un $N_0 = N_0(s, \phi_\infty)$ tal que $T_{s,n} \geq T$ para todo $n \geq N_0$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_{0,n}(t) - u_{0,\infty}(t)\|_s = 0.$$

Demostración. Sea ϕ_n^τ como en la Proposición 3.14 y sean $u_{\mu,n}^\tau, \mu \geq 0$ las correspondientes soluciones con tiempos de existencia $T_{s,n}$. Dado $T \in (0, T_{s,\infty})$, $u_{\mu,n}^\tau \in C([0,T], X^s)$ para todo n suficientemente grande. Pues bien, de un lado tenemos

$$\begin{aligned}
\langle u_{0,n} - u_{0,\infty}, \varphi\rangle_{X^s} &= \lim_{\mu\to 0+} \langle u_{\mu,n} - u_{\mu,\infty}, \varphi\rangle_{X^s} \\
&= \lim_{\mu\to 0+} \big[\langle u_{\mu,n} - u_{\mu,n}^\tau, \varphi\rangle_{X^s} + \langle u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,\infty}^\tau, \varphi\rangle_{X^s} + \\
&\qquad + \langle u_{\mu,\infty}^\tau - u_{\mu,\infty}, \varphi\rangle_{X^s}\big] \\
&= \lim_{\mu\to 0+} \big[\langle u_{\mu,n} - u_{\mu,n}^\tau, \varphi\rangle_{X^s} + \langle u_{\mu,m}^\tau - u_{\mu,m}, \varphi\rangle_{X^s}\big] + \\
&\qquad + \langle u_{0,n}^\tau - u_{0,\infty}^\tau, \varphi\rangle_{X^s}.
\end{aligned}$$

De otro lado, el Corolario 3.15 implica que, dado $\epsilon > 0$

$$|\langle u_{\mu,n} - u_{\mu,n}^\tau, \varphi\rangle_{X^s} + \langle u_{\mu,m}^\tau - u_{\mu,m}, \varphi\rangle_{X^s}| \leq \epsilon\|\varphi\|_{X^s},$$

para todo $\mu > 0$. Luego,

$$|\langle u_{0,n} - u_{0,\infty}, \varphi\rangle_{X^s}| \leq \epsilon\|\varphi\|_{X^s} + \|u_{0,n}^\tau - u_{0,\infty}^\tau\|_{X^s}\|\varphi\|_{X^s},$$

para todo $\varphi \in X^s$. Por lo tanto,

$$\|u_{0,n} - u_{0,\infty}\|_{X^s} \leq \epsilon + \|u_{0,n}^\tau - u_{0,\infty}^\tau\|_{X^s}. \tag{51}$$

Argumentos similares a los empleados en la Proposición (3.14) nos permiten mostrar que, para τ suficientemente pequeño,

$$\|u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,\infty}^\tau\|_{X^s} \leq C\|\phi_n^\tau - \phi_\infty^\tau\|_{X^s}\tau^{-\frac{1}{s}}.$$

Ya que $u^\tau_{\mu,n} - u^\tau_{\mu,\infty}$ converge débilmente en X^s a $u^\tau_{0,n} - u^\tau_{0,\infty}$, se sigue que

$$\|u^\tau_{0,n} - u^\tau_{0,\infty}\|_{X^s} \leq C\|\phi^\tau_n - \phi^\tau_\infty\|_{X^s}\tau^{-\frac{1}{s}} \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_{X^s}\tau^{-\frac{1}{s}},$$

para τ suficientemente pequeño. Luego, fijando τ suficientemente pequeño, podemos concluir de (51) que

$$\|u_{0,n} - u_{0,\infty}\|_{X^s} \leq 2\epsilon,$$

para n suficientemente grande. □

Referencias

[1] M. J. Ablowitz and J. Villarroel, *On the Kadomtsev-Petviashvili equation and associated constraints*, Stud. Appl. Math. **85** (1991), no. 3, 195–213.

[2] J. L. Bona and R. Smith, *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **278** (1975), no. 1287, 555–601.

[3] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics **840** (1981), Springer-Verlag, Berlin.

[4] R. J. Iório Jr. and W. V. L. Nunes, *On equations of KP-type*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128** (1998), no. 4.