

# Perspectiva histórica del principio del máximo de Pontryagin

## Historical perspective of the Pontryagin Maximum Principle

Felipe Monroy-Pérez

Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México

**RESUMEN.** Se presenta una perspectiva histórica de las ideas matemáticas en torno al Principio del Máximo de Pontryagin de la teoría de control óptimo. Este resultado establece condiciones necesarias para trayectorias que a la vez de satisfacer un sistema de control, minimizan un funcional dado. Se hace una presentación sucinta del cálculo de variaciones, en particular de los resultados que conforman lo que llamamos un preludio al Principio del Máximo. Se sostiene la tesis de que este principio representa una ruptura conceptual con el cálculo de variaciones y el nacimiento de una nueva disciplina matemática.

**Palabras clave:** Teoría de control óptimo, cálculo de variaciones, Principio del Máximo de Pontryagin.

**ABSTRACT.** A historical perspective of the mathematical ideas around the Pontryagin Maximum Principle of optimal control theory is presented. This result establishes necessary conditions for trajectories that simultaneously satisfy a control system and minimize a given functional. A succinct presentation of the calculus of variations is carried out, in particular of those results that embody what we call the prelude to the Maximum Principle. The paper argues for the thesis that the Maximum Principle brings about a conceptual rupture with the classical calculus of variations and gives birth to a new mathematical discipline.

**Key words:** Optimal control theory, calculus of variations, Pontryagin Maximum Principle.

*2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 49-03; Secondary 01A05.*

## 1. Introducción

El Principio del Máximo de Pontryagin de la teoría de control óptimo fue una respuesta matemática al desafío planteado por las ciencias e ingenierías aeroespaciales en las décadas de los cincuenta y los sesenta del siglo pasado. Convalidado desde su publicación por ingenieros como una solución adecuada al problema del desplazamiento óptimo bajo restricciones diferenciales, contó con el escepticismo de comunidades matemáticas trabajando en campos afines [1].

L. MARKUS describe en [2] algunas reminiscencias personales del Congreso Internacional de Matemáticos de Edimburgo en 1958, en donde L.S. PONTRYAGIN, en conferencia magistral, presentó el Principio del Máximo:

“... para la audiencia, en su mayoría topólogos, parecía estar hablando sobre cierto tipo de ingeniería, ... , después de pocos días de reflexión y cotilleo, el *establishment* matemático decidió que, después de todo, el Principio del Máximo no versaba sobre ingeniería, sino era un resultado del cálculo de variaciones clásico (similar al obtenido por M. HESTENES). . . Así, el consenso del congreso llegó a la conclusión de que la teoría de control, aunque sosa y aburrida, podría ser matemáticamente respetable, posición aun compartida por algunos matemáticos *avant-garde* . . .”

Como ha sido extensivamente documentado, e.g. [3], esta actitud de escepticismo no fue ajena a la injusta estigmatización de la teoría de control óptimo como una ciencia al servicio del militarismo, en el marco de la carrera espacial y en el contexto de la guerra fría entre las superpotencias en el siglo pasado.

El Principio del Máximo es un resultado fundamental en la teoría matemática de control óptimo. Es comúnmente aceptado que esta disciplina matemática nació en los años cuarenta en la ex-Unión Soviética, y que encuentra sus orígenes en la tradición clásica del cálculo de variaciones. Hay autores e.g. [4] que van más allá y sostienen que, *stricto sensu*, el primer problema de control óptimo es el *problema de la braquistócrona* formulado por JOHANN BERNOULLI<sup>1</sup> en 1696. Esta controversia es un tanto artificial si se parte del hecho de que el pensamiento matemático deviene como un continuo en el que en ciertos momentos aparecen trabajos seminales que proveen de especificidad a nuevas disciplinas matemáticas (ver por ejemplo [5]).

A nuestro entender, si bien algunas de las ideas matemáticas estaban ya presentes, por mencionar tres momentos, en el cálculo de variaciones clásico, en el llamado principio “*bang-bang*” para los sistemas lineales de BELLMAN [6], y en los trabajos de HESTENES, la especificidad de la teoría matemática de control óptimo fue delineada por los trabajos de PONTRYAGIN y sus colaboradores: el problema de la braquistócrona como fue originalmente formulado en 1696 no es un problema de control óptimo, ni HESTENES en el

<sup>1</sup>Aunque la familia Bernoulli produjo una media docena de matemáticos de gran talento del siglo XVII y principios del siglo XVIII, los hermanos JACOB BERNOULLI (1655-1705) y JOHANN BERNOULLI (1667-1748) son los más conocidos.

reporte de la corporación RAND ni BELLMAN en la formulación del principio bang-bang establecieron el Principio del Máximo.

El Principio del Máximo es una herramienta poderosa para el estudio de problemas matemáticos, no solamente de la teoría de control óptimo sino también de nuevas estructuras geométricas, por ejemplo, para el estudio de curvas rígidas y para lo que hoy se conoce como geometría de *Carnot-Caratheodory* (ver por ejemplo [7]).

Aparte de esta introducción este trabajo contiene tres secciones. En la sección 2 se presenta una introducción sucinta del cálculo de variaciones, que incluye la descripción del problema de la braquistócrona y del problema isoperimétrico, así como las condiciones necesarias de curvas extremales dadas por la ecuación de Euler-Lagrange, la condición de Legendre y de Weierstrass y la ecuación de Hamilton-Jacobi. En esta sección seguimos la presentación de los libros de G. BLISS [8], de I. GELFAND, S. FOMIN [9], y de J.L. TROUTMAN [10].

En la sección 3 se presenta, en el marco conceptual del cálculo de variaciones, una descripción de los trabajos que anteceden al Principio del Máximo y que por incluir algunas ideas de éste, constituyen un preludio a él. Se incluye en esta sección la descripción de los trabajos de BOLZA y del llamado *camino real* del cálculo de variaciones de CARATHÉODORY. Se presentan también resultados que son más cercanos al Principio del Máximo, a saber, la *programación dinámica* de BELLMAN y los resultados de HESTENES publicados por primera vez en un reporte de investigación de circulación limitada [11], que contiene la solución al problema de Bolza y en el cual están presentes algunas ideas matemáticas contenidas en el Principio del Máximo.

La sección 4 se aboca a la presentación del Principio del Máximo, se incluye la versión original del libro de PONTRYAGIN et al. [12] y una formulación moderna con la nomenclatura de la geometría diferencial. Se desglosan además dos ejemplos ilustrativos. Finalmente en la sección 5 se presentan las conclusiones de este trabajo.

## 2. El cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones es una rama venerable del análisis matemático cuyas raíces se remontan al pensamiento matemático de la antigua Grecia. En la historia de esta disciplina están presentes los nombres de los más destacados matemáticos de varios siglos y es aceptado que los métodos variacionales han sido motor del desarrollo de diversas ramas de la matemática y de la física-matemática [13].

### 2.1. Dos problemas variacionales fundamentales

Aunque el problema isoperimétrico era conocido desde la antigua Grecia, el nacimiento del cálculo de variaciones como disciplina matemática se ubica a mediados del siglo XVII. El primer problema genuinamente variacional fue el de encontrar el perfil de un cuerpo que ofrece la resistencia mínima (aerodinámica o hidrodinámica) y fue estudiado por NEWTON<sup>2</sup> en *Principia Mathematica* en 1687: dado un sólido que se mueve en un fluido con una

<sup>2</sup>Sir ISAAC NEWTON, matemático inglés, 1643-1727.

velocidad constante dada y cubre, en su extremo posterior, una sección transversal prescrita que es ortogonal al vector velocidad, encontrar el perfil del cuerpo que proporciona la mínima resistencia [14]. Es generalmente aceptado que es en el desafío de encontrar la curva de más rápido descenso formulado por JOHANN BERNOULLI en 1696 donde se encuentra la génesis del cálculo de variaciones.

### 2.11. El problema de la braquistócrona

El problema de la curva de más rápido descenso, conocido también como *el problema de la braquistócrona*<sup>3</sup>, fue formulado a manera de desafío a los matemáticos de su tiempo, en la edición de junio de 1696 de la revista *Acta Eruditorum*. El problema se enuncia como sigue:



**Figura 1.** Retrato de JOHANN BERNOULLI por JOHANN RUDOLF HUBER, circa 1740<sup>4</sup>.

PROBLEMA NOVUM, ad cuius Solutione Mathematici invitantur. “Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.” (“Si dos puntos A y B son dados en un plano vertical, asignar a una partícula móvil M la trayectoria AMB a lo largo de la cual, descendiendo bajo su propio peso, pasa del punto A al Punto B en el tiempo más corto.”) [15]

El problema fue resuelto por seis de las mentes matemáticas más brillantes de la época: los hermanos BERNOULLI, TSCHIRNHAUS<sup>5</sup>, LEIBNIZ<sup>6</sup>, L’HÔPITAL<sup>7</sup> y NEWTON. La

<sup>3</sup>Del griego *brachistos*: *el más corto*, *chronos*: *tiempo*

<sup>4</sup>Ilustración tomada del sitio [http://wikipedia.org/wiki/Johann\\_Bernoulli](http://wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli)

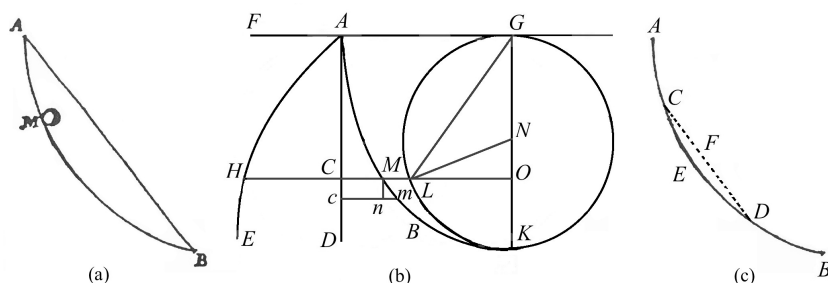
<sup>5</sup>EHRENFRIED WALTER VON TSCHIRNHAUS, matemático alemán, 1651-1708.

<sup>6</sup>GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ, matemático alemán, 1646-1716.

<sup>7</sup>GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE MARQUIS DE L’HÔPITAL, matemático francés, 1661-1704.

solución de Newton fue publicada en forma anónima y sin prueba en enero de 1697 en *Philosophical Transactions of the Royal Society*, en tanto que las otras fueron publicadas en la edición de mayo de 1697 de *Acta Eruditorum*. La solución propuesta por JOHANN BERNOULLI se basa en una analogía con la óptica (usando los principios desarrollados por SNELL<sup>8</sup>, HUYGENS<sup>9</sup> y FERMAT<sup>10</sup>), y en una discretización de la trayectoria. En su solución la braquistócrona se identifica con la curva que un rayo de luz sigue al propagarse en un medio cuya densidad es inversamente proporcional a la velocidad que la partícula adquiere al deslizarse por la fuerza de la gravedad; esa curva obedece el *principio de tiempo mínimo* de FERMAT<sup>11</sup> en cada punto. En forma elegante, formulando matemáticamente los principios de la óptica, JOHANN BERNOULLI describe la ecuación diferencial de la curva de más rápido descenso, la cual reconoció como la *cicloide*: la curva que describe un punto fijo de un círculo cuando éste rueda sin resbalar sobre una recta.

Aunque la solución de JOHANN BERNOULLI es elaborada e ingeniosa, es una solución *ad hoc* para el problema de la curva de más rápido descenso. La solución más profunda, en la cual se presenta por primera vez la idea matemática de *variación* de una curva fue la propuesta por JACOB BERNOULLI. En ella se encuentra la idea fundacional del cálculo de variaciones (ver STILLWELL [16]). La solución de JACOB BERNOULLI descansa en el concepto de infinitesimales, la generalización del concepto de punto estacionario y en un ingenioso argumento geométrico. La idea fundamental es que las propiedades extremales de la braquistócrona deben conservarse en cada porción de la curva. Igualando las longitudes infinitesimales de la curva y de una variación de ella, JACOB BERNOULLI deduce también la ecuación diferencial que satisface la cicloide.



**Figura 2.** (a) El problema de la braquistócrona, (b) La solución de JOHANN BERNOULLI, (c) La solución de JACOB BERNOULLI.

En la figura 2(a) se describe el problema de la braquistócrona, en tanto que en 2(b) y en 2(c) se presentan parte de las soluciones de los BERNOULLI. Estos bosquejos se realizaron en base a los que aparecen, de acuerdo con NSF-National Curve Bank<sup>12</sup>, en la Tabla IV del artículo de BERNOULLI en *Acta Eruditorum* de 1697.

<sup>8</sup>WILLEBRORD SNELLIUS, astrónomo y matemático holandés, 1580-1626.

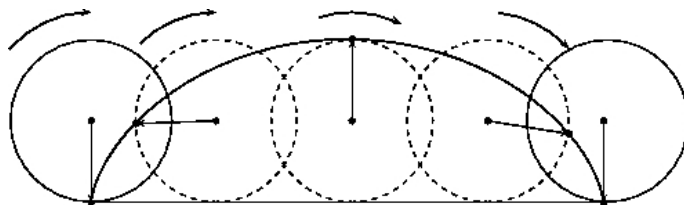
<sup>9</sup>CHRISTIAAN HUYGENS, matemático y científico holandés, 1629-1695.

<sup>10</sup>PIERRE DE FERMAT, matemático francés, 1602-1665.

<sup>11</sup>La trayectoria que sigue un rayo de luz es la trayectoria que puede ser recorrida en tiempo mínimo. Este principio es considerado también como la definición de rayo de luz.

<sup>12</sup><http://curvebank.calstatela.edu/>

La cicloide es una de las curvas más famosas en las matemáticas, se define como la trayectoria que sigue un punto sobre la circunferencia de un círculo cuando éste rueda sin resbalar sobre una recta (ver figura 3). Fue descubierta por GALILEO<sup>13</sup> y ha sido estudiada por siglos por algunas de las mentes más brillantes del pensamiento científico. Por ejemplo, en la obra *Le Traité de la roulette* escrita por PASCAL<sup>14</sup> en 1659, se calcula, usando el llamado método de los indivisibles que antecede al cálculo de LEIBNIZ y NEWTON, el área de la región formada por la cicloide, su eje de simetría y un segmento de recta paralela a la recta sobre la cual resbala el círculo, así como volúmenes de revolución asociados a esta región. En la misma época, con la idea de construir un reloj de péndulo de gran exactitud, HUYGENS descubrió que si la oscilación de la masa de un péndulo se confina a una región bordeada por una cicloide en lugar de un círculo, el periodo es independiente del punto de inicio, debido a la propiedades de isocronía de la cicloide.



**Figura 3.** Cicloide: lugar geométrico de un punto fijo en un círculo que rueda sin resbalar sobre una recta.

El problema de la braquistócrona puede formularse de la siguiente manera:

En la familia de curvas que representan gráficas de funciones  $y : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^-$ ,  $x \mapsto y(x)$  continuamente diferenciables, y que satisfacen las condiciones  $y(0) = 0, y(\ell) = -\ell$ , encontrar la que minimiza el *tiempo de descenso* dado por:

$$T = \frac{1}{2g} \int_0^\ell \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x)}} dx, \quad (1)$$

## 2.12. El problema isoperimétrico

El volumen V de la obra *Mathematicæ Collectiones* de PAPPUS DE ALEJANDRÍA (290-350 D.C.) da cuenta de la solución al *problema isoperimétrico* por el geómetra griego ZENODORUS (200-140 A.C.), la cual estipula que el círculo encierra el área más grande entre todos los polígonos del mismo perímetro [17]. Este resultado es, de alguna manera, cubierto con un velo poético en el libro I de *La Eneida* de VIRGILIO (70-19 A.C.), donde se lee<sup>15</sup>:

<sup>13</sup>GALILEO GALILEI, físico, matemático, astrónomo y filósofo italiano, 1564-1642.

<sup>14</sup>BLAISE PASCAL, filósofo y matemático francés, 1623-1662.

<sup>15</sup>*La Eneida*, VIRGILIO, Libros I-VI, UNAM, 1972. Edición preparada por R. BONIFAZ NUÑO.

... Agitada con esto, Dido preparaba su fuga y reunía a los que habían de acompañarla, señalando entre los que más detestaban o temían al tirano; apodéranse de unas naves que por su dicha estaban aparejadas, y las cargan de oro; las riquezas del avaro Pigmalión van por el mar, y una mujer capitanea la empresa. Llegaron los fugitivos a estos sitios, donde ahora ves las altas murallas y el alcázar, ya comenzado a levantar, de la nueva Cartago, y compraron una porción de terreno, tal que pudiera toda ella cercarse con la piel de un toro, de donde le vino el nombre de Byrsa<sup>16</sup>.



**Figura 4.** Fundación de Cartago por la Reina Dido<sup>17</sup>.

En este verso se relata la fundación de la ciudad de Cartago por la Reina Dido<sup>18</sup> obligada a huir de la ciudad Tiro después de que Pigmalión asesinara a su padre. Al desembarcar en el norte de África, cerca de la actual Túnez, le es cedido un terreno bordeado por el mar tan grande como pudiera ser rodeado por la piel de un toro. Dido corta tiras de piel extremadamente delgadas para construir un semicírculo, fundando así la ciudad de Cartago. Esta es la razón por la que esta versión del problema isoperimétrico se conoce también como *el problema de Dido*.

El problema isoperimétrico consiste en encontrar entre todas las curvas planas de un mismo perímetro, la que encierra el área más grande.

El problema de Dido puede formularse tomando coordenadas  $(x, y)$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  y una curva suave en el semi-plano superior, (el eje  $x$  representa el límite del mar), que representa la gráfica de una función  $y : [-\rho, \rho] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $x \mapsto y(x)$ , el problema consiste entonces en

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximizar} \quad \int_{-\rho}^{\rho} y(x) dx, \\ \text{sujeto a} \quad \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \rho x, \quad y(-\rho) = y(\rho) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

<sup>16</sup>Del griego *búrsa*: la piel de un toro. Ver pág. 1006 del *Dictionary of Greek and Roman biography and mythology*, editado por WILLIAM SMITH, 1813-1893, de la colección: Making of America Books.

<sup>17</sup>Ilustración tomada del sitio <http://math.arizona.edu/hermi/dido.html>

<sup>18</sup>*Dido*, también llamada Elisa. Idem.

## 2.2. Problemas Variacionales

Los problemas isoperimétrico y de la braquistócrona son problemas típicos del cálculo de variaciones, rama del análisis matemático que tiene como objeto de estudio la optimización de funcionales, es decir, la optimización de funciones que tienen como dominio a una familia de funciones con alguna propiedad específica, y como contradominio a los números reales. Estos funcionales frecuentemente representan alguna ley o propiedad física o geométrica, y se expresan como integrales definidas que envuelven funciones y sus derivadas, como la integral (1) y las integrales en (2).

En el resto de esta sección nos referiremos dos tipos de problemas variacionales que generalizan los problemas arriba expuestos.

**El problema variacional más simple.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$  una función diferenciable con primeras y segundas derivadas parciales continuas con respecto a todas las variables. Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado y sean  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  dos valores fijos dados. El problema variacional más simple consiste en la minimización de

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \quad (3)$$

entre todas las funciones diferenciables  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y(x)$  que tienen derivada continua y que satisfacen las condiciones  $y(a) = y_1$ ,  $y(b) = y_2$ .

**El problema variacional con una restricción.** En este problema se considera otra función  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$  diferenciable con primeras y segundas derivadas parciales continuas con respecto a todas las variables, y tres valores fijos dados  $y_1, y_2, I \in \mathbb{R}$ . El problema variacional con una restricción consiste entonces en la minimización de (3) entre todas las funciones diferenciables  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y(x)$  que tienen derivada continua, que satisfacen las condiciones  $y(a) = y_1$ ,  $y(b) = y_2$  y que hacen que

$$K[y] = \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) dx \quad (4)$$

tome el valor fijo  $I$ .

## 2.3. La ecuación de Euler-Lagrange

De acuerdo con C. FRASER [18], la formalización de los métodos del cálculo de variaciones como se conocen hoy en día tienen su origen en los trabajos de LAGRANGE,<sup>19</sup> basados a su vez en los trabajos de EULER<sup>20</sup> y en el intenso intercambio científico que mantuvieron ambos.

En junio de 1754 el joven LAGRANGE escribió a EULER una primera carta explicando la ampliación de algunos resultados expuestos en la obra clásica de EULER *Methodus*

<sup>19</sup>JOSEPH-LOUIS LAGRANGE, matemático francés de origen italiano, 1736-1813.

<sup>20</sup>LEONHARD EULER, matemático suizo, 1707-1783.



*Inveniendi*.<sup>21</sup> En agosto de 1755, LAGRANGE escribió a EULER una segunda carta en donde presenta una nueva manera de resolver estos problemas sin recurrir a ningún análisis geométrico; en tres páginas LAGRANGE presenta un algoritmo que resolvía los tres ejemplos centrales de los *Methodus Inveniendi*, resultados que impresionaron profundamente a EULER. En esta segunda carta se introduce por primera vez el símbolo  $\delta$  al cálculo infinitesimal:

... si  $Fy$  denota una función de  $y$  y  $y$  es función de  $x$ <sup>22</sup>, se supone que  $x$  es constante con respecto a  $\delta$ , es decir,  $\delta x = 0$ , en tanto que  $\delta y$  denota la variación de  $y$  usada para distinguirla de la diferencial usual  $dy$ . La cantidad  $\delta Fy$  denota el incremento en  $Fy$  cuando  $y$  es incrementada y se asume que  $d\delta Fy = \delta dFy$ ...

En 1760 LAGRANGE publicó dos artículos seminales: en el primero presenta el desarrollo paramétrico del método de variaciones y en el segundo desglosa una explicación exhaustiva de las técnicas variacionales y del *principio de mínima acción* de la dinámica. El pensamiento matemático de LAGRANGE en relación a los procesos variacionales culminó en 1788 con la aparición de su obra clásica *Mechanique Analytique*, la cual marca el cierre del ciclo del nacimiento de los fundamentos del cálculo de variaciones.

Lo que hoy se conoce como la *ecuación de Euler-Lagrange*, está presente ya en los trabajos de LAGRANGE y EULER mencionados antes. Esta ecuación proporciona una condición necesaria de optimalidad, en el sentido de que una solución de un problema variacional es necesariamente solución de esta ecuación.

Vamos a presentar la *ecuación de Euler-Lagrange* en un lenguaje moderno. Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial normado<sup>23</sup> y sea  $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$  un subconjunto, no necesariamente un subespacio de  $\mathcal{V}$ . Un *funcional* es una función  $J : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto J[y]$ . Se dice que  $\hat{y} \in \mathcal{D}$  es un valor extremo de  $J$  si para todo  $y \in \mathcal{D}$  se satisface:

$$J[y] \geq J[\hat{y}].$$

El concepto de *variación* es fundamental en el estudio de valores extremos; este concepto generaliza el de la derivada direccional para funciones reales.

**Definición 1.** Para  $y, v \in \mathcal{D}$  la variación de  $J$  en  $y$  en la dirección de  $v$  se define como

$$\delta J[y; v] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (J[y + \varepsilon v] - J[y]), \quad (5)$$

dondequiera que este límite exista.

<sup>21</sup>*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes (Métodos para encontrar líneas curvas que tienen alguna propiedad de máximo o mínimo)*. Obra publicada en 1744. Consiste de una colección de problemas de física y matemáticas incluyendo el problema isoperimétrico. Las soluciones son presentadas en base a cálculos laboriosos y a una fuerte argumentación geométrica.

<sup>22</sup>En notación moderna se trata de una función  $F(y(x), x)$ .

<sup>23</sup>Espacio vectorial  $\mathcal{V}$  que tiene definida una función  $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface:  $\|v\| \geq 0$  y  $\|v\| = 0$  si y solo si  $v = 0$  (*positividad*),  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (*desigualdad del triángulo*), y  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$  (*homogeneidad absoluta*), para todo  $u, v \in \mathcal{V}$  y todo escalar  $\alpha$ .

Obsérvese que ambas  $y$  y  $v$  están fijas cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La existencia de límite implica además que ambas  $J[y]$  y  $J[y + \varepsilon v]$  existen para valores de  $\varepsilon$  suficientemente pequeños. En la práctica es conveniente utilizar el hecho de que

$$\delta J[y; v] = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J[y + \varepsilon v] \right|_{\varepsilon=0}. \quad (6)$$

La variación de  $J$  depende de su comportamiento local en una vecindad de  $y$ . Por supuesto, la variación no necesariamente existe en cualquier dirección; además puede existir en unas direcciones y no existir en otras. Las direcciones en las cuales la variación de un funcional existe se denominan *direcciones admisibles*. Cuando éstas son conocidas o se sobreentienden se escribe simplemente  $\delta J[y]$ .

**Teorema 1.** *Una condición necesaria para que  $J$  tenga un valor extremo en  $y$  es que  $\delta J[y; v] = 0$  para toda dirección admisible  $v$ .*

**Observación 1.** Los problemas variacionales más simple y con una restricción, están formulados en el espacio lineal  $\mathcal{V} = \mathcal{C}^1[a, b]$ . Obsérvese, sin embargo, que los dominios de los funcionales  $J$  y  $K$  son las familias

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \{y \in \mathcal{V} \mid y(a) = y_1, y(b) = y_2\} \quad y \\ \mathcal{D}_2 &= \{y \in \mathcal{V} \mid y(a) = y_1, y(b) = y_2, K[y] = I\}, \end{aligned}$$

respectivamente. Ninguno de los dos casos forma un subespacio de  $\mathcal{V}$ .

El establecimiento de la condición necesaria de optimalidad expresada por la *ecuación de Euler-Lagrange* se basa en el siguiente resultado.

**Proposition 1.** *Sean  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}[a, b]$  dos funciones continuas arbitrarias. Si*

$$\int_a^b \alpha(x)v'(x) dx = 0,$$

para toda  $v \in \mathcal{D}$  tal que  $v(a) = v(b) = 0$ , entonces  $\alpha$  es una función constante. Además, si

$$\int_a^b (\alpha(x)v(x) + \beta(x)v'(x)) dx = 0 \quad (7)$$

para toda  $v \in \mathcal{D}$ , entonces  $\beta$  es diferenciable y satisface  $\beta'(x) = \alpha(x)$ .

*Demostración.* La prueba de la primera implicación es elemental y puede consultarse por ejemplo en [9]. La segunda implicación sigue de la primera y de una integración por partes. En efecto, si se define la función

$$\gamma(x) = \int_a^x \alpha(\eta) d\eta,$$

se tiene que para toda  $v \in \mathcal{D}$

$$\int_a^b \alpha(x)v(x) dx = - \int_a^b \gamma(x)v'(x) dx.$$

Por lo tanto (7) se escribe:

$$\int_a^b (\beta(x) - \gamma(x))v'(x) dx = 0,$$

de donde se sigue que  $\beta(x) - \gamma(x)$  es constante y por lo tanto  $\beta'(x) = \alpha(x)$ .

□

Para el problema variacional más simple se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2. (Euler-Lagrange)** Una condición necesaria para que  $y \in \mathcal{D}$  sea un valor extremo de (3) es que satisfaga la ecuación de Euler-Lagrange

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0. \quad (8)$$

*Demostración.* Supongamos que  $y \in \mathcal{D}$  es un valor extremo de (3). Por el teorema 1 se tiene que  $\delta J(y; v) = 0$  para toda dirección admisible  $v \in \mathcal{D}$ . Usando la expresión (6) para calcular la variación de  $J$  se tiene que

$$\begin{aligned} \delta J(y; v) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x, y(x) + \varepsilon v(x), y'(x) + \varepsilon v'(x)) \right|_{\varepsilon=0} dx \\ &= \int_a^b (f_y(x, y(x), y'(x))v(x) + f_z(x, y(x), y'(x))v'(x)) dx. \end{aligned}$$

Igualando esta última expresión a cero y usando el resultado anterior, se sigue la ecuación de Euler-Lagrange. □

En el caso particular de que el integrando sea independiente de la variable  $x$ , la ecuación (8) es equivalente a la ecuación

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = k, \quad (9)$$

con  $k$  constante. En efecto, la ecuación de Euler-Lagrange implica

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) = 0.$$

La ecuación (9) es conocida en la literatura como la *identidad de Beltrami*.<sup>24</sup>

Para el problema variacional con una restricción se tiene el siguiente resultado que generaliza el *método de multiplicadores de Lagrange* para la optimización de funciones de variable real.

**Teorema 3.** Si  $y \in \mathcal{D}_2$  es un valor extremo de  $J$  que no es un valor extremo de  $K$ , entonces existe una constante  $\lambda$  tal que  $y$  es un valor extremo de

$$\int_a^b (f + \lambda g) dx,$$

es decir, satisface la ecuación diferencial

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \lambda \left( g_y - \frac{d}{dx} g_{y'} \right) = 0. \quad (10)$$

Las curvas integrales de la ecuación de Euler-Lagrange se denominan *curvas extremales*. La ecuación de Euler-Lagrange es una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución dependerá en general de constantes arbitrarias determinadas por los valores a la frontera.

**Observación 2.** Para cierto tipo de problemas variacionales (e.g. los problemas isoperimétricos), es conveniente considerar una formulación en forma paramétrica. Es decir, considerar una curva parametrizada

$$t \mapsto (x(t), y(t)),$$

de tal forma que el funcional (3) se escribe como

$$\int_a^b f(x, y, y') dx = \int_{t_1}^{t_2} f \left( x(t), y(t), \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} \right) \dot{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} \Psi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt.$$

Se puede probar que si la función  $\Psi$  no incluye explícitamente al parámetro  $t$  y es homogénea de grado 1 con respecto a  $\dot{x}(t)$  y  $\dot{y}(t)$ , entonces el funcional  $\int \Psi$  es independiente de

<sup>24</sup>EUGENIO BELTRAMI, matemático italiano, 1835-1900.

la parametrización (ver [9]). En este caso la optimización del funcional  $\int f$  es equivalente a la del funcional  $\int \Psi$  y la condición necesaria se expresa por medio del siguiente par de ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\Psi_x - \frac{d}{dt}\Psi_{\dot{x}} = 0 \quad (11)$$

$$\Psi_y - \frac{d}{dt}\Psi_{\dot{y}} = 0. \quad (12)$$

### Ejemplo 1. La braquistócrona

Como se explicó en el párrafo 2.1, el problema consiste en la minimización del funcional (1) en  $\mathcal{D}_1$ , es decir, se tiene

$$f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}.$$

Dado que no hay una dependencia explícita de  $x$ , se puede utilizar la condición de Beltrami (9) como condición necesaria para un extremal, es decir, si  $y \in \mathcal{D}_1$  es un extremal, entonces debe satisfacer la ecuación:

$$-\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}\sqrt{y}} = \kappa_1,$$

o equivalentemente

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{\kappa_2 - y}{y}}, \text{ con } \kappa_2 = \frac{1}{\kappa_1^2}.$$

La integración de esta ecuación diferencial es conocida desde los trabajos de los BERNOLLI y se basa en la introducción de un ángulo auxiliar  $\varphi$  definido como

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{y}{\kappa_2 - y}},$$

de donde se obtiene

$$y = \kappa_2 \sin^2 \varphi. \quad (13)$$

La regla de la cadena implica

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2\kappa_2 \sin^2 \varphi},$$

y una integración directa y la condición inicial  $y(0) = 0$ ,  $(\varphi(0) = 0)$  implican

$$x = \rho(\vartheta - \overline{\sin \vartheta}), \quad (14)$$

con  $2\rho = \kappa_2$  y  $\vartheta = 2\varphi$ . Además la ecuación (13) se escribe como

$$y = \rho(1 - \cos \vartheta). \quad (15)$$

Las ecuaciones (14) y (15) corresponden a las ecuaciones paramétricas de la cicloide.

**Ejemplo 2. El problema isoperimétrico**

Consideramos la formulación paramétrica del problema de acuerdo a lo explicado en la observación 2. Sea  $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  una curva cerrada. El área encerrada por  $\gamma$  está dada por

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt, \quad (16)$$

en tanto que su perímetro está dado por

$$K = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (17)$$

El problema consiste entonces en la optimización del funcional  $J$  sujeto a que el funcional  $K$  tome un valor constante dado. Por el teorema 3, si  $\gamma(t)$  es un extremal de  $J$  que no es un extremal de  $K$ , entonces también es un extremal de

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \lambda K(x, y, \dot{x}, \dot{y})) dt$$

y satisface las ecuaciones (11) y (12), que en este caso se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{y} - \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2}y + \lambda \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) &= 0 \\ -\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}x + \lambda \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) &= 0, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}y - \lambda \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= \kappa_1 \\x + \lambda \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= \kappa_2,\end{aligned}$$

con  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  constantes, lo cual implica que

$$(x - \kappa_1)^2 + (y - \kappa_2)^2 = \lambda^2, \quad (18)$$

que es la ecuación de un círculo.

## 2.4. La ecuación de Hamilton-Jacobi

El desarrollo del cálculo de variaciones ha ido de la mano del desarrollo del marco teórico de la mecánica clásica; la mayoría de las leyes físicas se establecen a partir de principios variacionales. Un ejemplo arquetípico es el llamado *principio de mínima acción*, que establece que el movimiento de un sistema es descrito por una trayectoria que minimiza el funcional de acción definido como la integral del *lagrangiano* (energía cinética menos energía potencial). Otros ejemplos de esta interacción íntima entre el cálculo de variaciones y la mecánica se tienen con la introducción de las coordenada canónicas, el formalismo hamiltoniano, la forma canónica de las ecuaciones de Euler-Lagrange, la integrabilidad y la llamada ecuación de Hamilton-Jacobi.

Esta última ecuación es la piedra angular de la mecánica y persiste, de alguna manera, en la formulación del Principio del Máximo. De acuerdo con [19] corresponde a HAMILTON<sup>25</sup> establecer por primera vez esta ecuación y a JACOBI<sup>26</sup> la presentación de la ecuación como se conoce hoy en día.

Una manera de establecer la ecuación de Hamilton-Jacobi es a partir de una forma general de la variación del funcional, considerando como admisibles aquellas trayectorias con derivada continua y con puntos iniciales y terminales variando arbitrariamente.

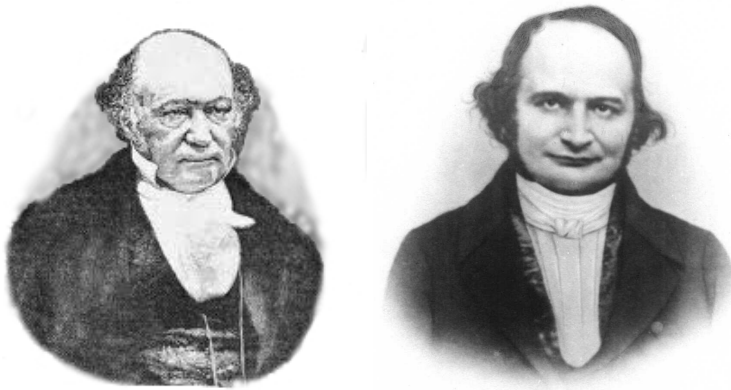
En este caso es necesario tener una noción de cercanía entre trayectorias, es decir, una topología en el espacio de trayectorias. Aunque esto puede definirse en forma rigurosa, en esta exposición mantenemos un nivel intuitivo al considerar cercanas dos trayectorias si ellas y sus derivadas lo son punto a punto, como se ilustra en la figura 6.

Consideramos el funcional (3) y dos trayectorias admisibles  $y, \hat{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y(x), \hat{y}(x)$  cercanas en el sentido explicado arriba, si  $h(x) = \hat{y}(x) - y(x)$ , y se escribe

<sup>25</sup>WILLIAM ROWAN HAMILTON, matemático irlandés, 1805-1865.

<sup>26</sup>CARL GUSTAV JACOB JACOBI, matemático alemán, 1804-1851.

<sup>27</sup>Ilustración tomada del sitio <https://www.wikipedia.org>



**Figura 5.** W.R. HAMILTON y C.G.J. JACOBI<sup>27</sup>.

$$\delta J[y] = J[y + h] - J[y].$$

Usando el desarrollo de Taylor, una integración por partes y escribiendo

$$h(a) \simeq (\delta y - y'\delta)|_a, \quad h(b) \simeq (\delta y - y'\delta)|_b,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \delta J[y] &= \int_a^b \left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) h(x) dx + f \Big|_{x=b}^{\delta b + f_{y'} h} - f \Big|_{x=a}^{\delta a - f_{y'} h} \Big|_{x=a} \\ &= \int_a^b \left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) h(x) dx + f_{y'} \delta y \Big|_{x=a}^{x=b} + (f - f_{y'} y') \delta x \Big|_{x=a}^{x=b} \end{aligned} \quad (19)$$

Para más detalles referimos al lector a [9]. La expresión (19) es la fórmula para la variación general del funcional  $J[y]$ .

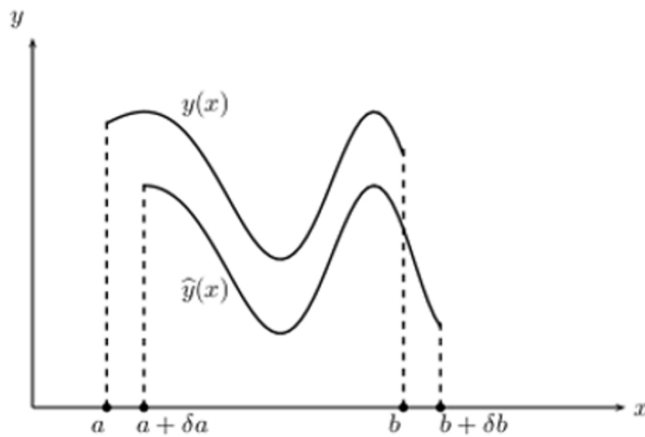
Obsérvese que si los puntos iniciales y terminales de las curvas admisibles se restringen a las líneas verticales  $x = a$  y  $x = b$  entonces  $\delta a = \delta b = 0$ , en tanto que si se mantienen fijos se tiene  $\delta a = \delta b = 0$  y también  $\delta y|_a = \delta y|_b = 0$ .

Al definir la *variable dual* como

$$x \mapsto p(x) = f_{y'}(x, y, y') \quad (20)$$

y la *función hamiltoniana* como





**Figura 6.** Dos curvas cercanas.

$$\mathcal{H}(x, y, z, p) = zp - f(x, y, z), \quad (21)$$

se tiene que

$$\delta J = \int_a^b \left( f_y - \frac{dp}{dx} \right) h(x) dx + \left( p \delta y - \mathcal{H} \delta x \right) \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Si  $y(x)$  es un valor extremo de  $J$  entonces satisface la ecuación de Euler-Lagrange, por lo tanto la integral en (19) se anula y se tiene que

$$\delta J = \left( f_{y'} \delta y + (f - y' f_{y'}) \delta x \right) \Big|_{x=a}^{x=b} \quad (22)$$

o bien

$$\delta J = \left( p \delta y - \mathcal{H} \delta x \right) \Big|_{x=a}^{x=b}. \quad (23)$$

En conclusión, independientemente de las condiciones de frontera, un valor extremal de  $J[y]$  debe anular las condiciones (22) y (23). La introducción de la variable (20) y la función hamiltoniana (21) permite escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange en la llamada *forma canónica*: tomando  $y'$  como variable independiente de  $y$ , la ecuación (8) puede escribirse como el sistema

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \quad (24)$$

y además la definición de la variable dual implica

$$d\mathcal{H} = -\frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy + y'dp.$$

Escribiendo los coeficientes apropiados para las diferenciales se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = y',$$

por lo tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange (24) se escriben como

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \tag{25}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}. \tag{26}$$

**Observación 3.** La variable dual (20) se conoce en mecánica como la variable de momento, en tanto que las ecuaciones (25) y (26) se denominan ecuaciones de Euler-Lagrange en forma canónica o ecuaciones de Hamilton.

Sean  $P = (a, y(a))$  y  $Q = (b, y(b))$  dos puntos arbitrarios, y supongamos que un y solamente un valor extremal de  $J[y]$  los une. La función

$$S = \int_a^b f(x, y, y')dx$$

depende de las coordenadas de los puntos  $P$  y  $Q$ , de tal forma que si se toma  $P$  fijo y se deja  $Q$  variable entonces

$$S = S(x, y(b)).$$

Se tiene entonces que  $dS = \delta J$  (aquí  $y$  es un valor extremal de  $P$  a  $Q$  y  $\hat{y}$  es una trayectoria de  $P$  a  $(x + dx, a + da)$ ) y usando (23) (evaluando en  $Q$ ) se tiene que

$$dS(x, a) = py - \mathcal{H}dx,$$

por lo tanto

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\mathcal{H}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p,$$

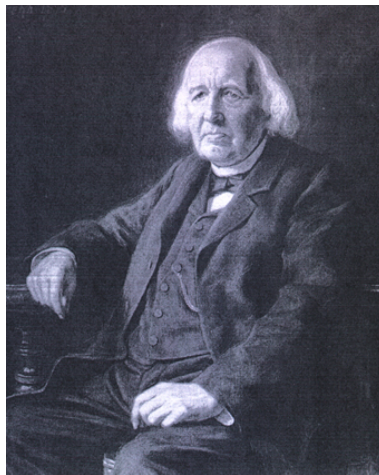
de ahí que

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \mathcal{H}\left(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}\right) = 0. \quad (27)$$

Esta ecuación diferencial, en general no lineal, se denomina *la ecuación de Hamilton-Jacobi*. Hay una relación íntima entre la ecuación de Hamilton-Jacobi y las ecuaciones canónicas de Euler-Lagrange. En efecto, las ecuaciones canónicas representan el así llamado *sistema característico* asociado a (27).

## 2.5. La condición necesaria de Weierstrass

WEIERSTRASS<sup>28</sup> es uno de los genios matemáticos imprescindibles del siglo XIX. Considerado como el padre del análisis matemático, realizó contribuciones importantes en diversas ramas de las matemáticas. Sus aportaciones al cálculo de variaciones son producto de su actividad científica en sus años de madurez, sus ideas fueron diseminadas por sus estudiantes en notas (publicadas póstumamente) de sus disertaciones en la Universidad de Berlín en los años 80 del siglo antepasado. De acuerdo con C. FRASER en su recuento histórico del cálculo de variaciones en [14], es a WEIERSTRASS más que ningún otro matemático a quien debemos el basamento lógico y conceptual que estableció al cálculo de variaciones como una disciplina matemática moderna.



**Figura 7.** Retrato de WEIERSTRASS por CONRAD FEHR, circa 1895<sup>29</sup>.

De nuevo nos concentramos en el problema variacional más simple de optimización del funcional (3) en la familia  $\mathcal{D}_1$ . Para la función  $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ , la *función exceso*<sup>30</sup> introducida por WEIERSTRASS en 1879 se define como sigue:

<sup>28</sup>KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS, matemático alemán, 1815-1897.

<sup>29</sup>Ilustración tomada del sitio <https://www.wias-berlin.de/about/weierstrass/>

<sup>30</sup>Hemos traducido la palabra *excess* como *exceso*, pues aunque se puede pensar que *excedente* es una mejor opción su equivalente en inglés es *surplus*, que es conceptualmente más ajena.

$$\mathcal{E}(x, y, z, w) = f(x, y, w) - f(x, y, z) - (w - z)f_z(x, y, z). \quad (28)$$

Obsérvese que  $f(x, y, z) + (w - z)f_z(x, y, z)$  es la primera aproximación de Taylor de  $f(x, y, z)$  tomada como función de  $w$  alrededor de  $w = z$ , por lo que la función  $\mathcal{E}$  proporciona la distancia entre  $f(x, y, z)$  y su aproximación lineal alrededor de  $w = z$ , como se ilustra en la figura 8.

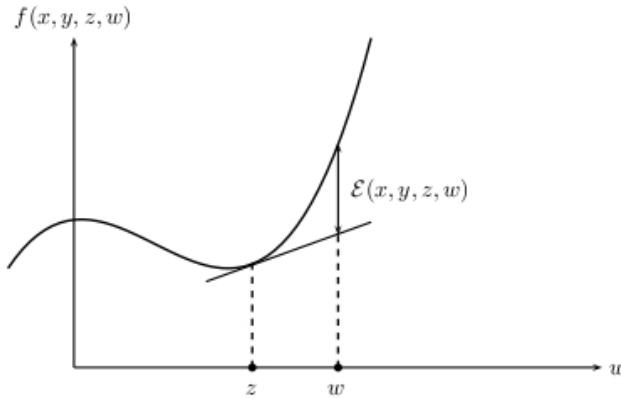


Figura 8. Interpretación geométrica de la función exceso de Weierstrass.

**Teorema 4.** Si  $y \in \mathcal{D}_1$  es un valor extremo de (3) entonces

$$\mathcal{E}(x, y, y', w) \geq 0 \quad (29)$$

para toda  $t \in [a, b]$  y toda  $w \in \mathbb{R}$ .

La prueba de este teorema es laboriosa y contiene detalles técnicos delicados, sin embargo es constructiva y está basada en un sencillo argumento geométrico. Supongamos que  $y \in \mathcal{D}_1$  es un valor extremo de  $J$  y sean  $x_0 \in [a, b]$  y  $\delta \in (x_0, b]$  arbitrarios. Se considera una variación  $\varepsilon \mapsto y(\cdot, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in [0, \delta - x_0]$  de  $y$  tal que:

- $x \mapsto y(x, \varepsilon)$  es lineal en el intervalo  $[x_0, x_0 + \varepsilon]$  con derivada igual a  $w$ ,
- $x \mapsto [y(x, \varepsilon) - y(x)]$  es lineal en el intervalo  $[x_0 + \varepsilon, \delta]$ ,
- $y(x, \varepsilon) = y(x)$  para toda  $x \in [a, x_0] \cup [\delta, b]$ .

Claramente  $y(\cdot, 0) = y$  y  $y(\cdot, \varepsilon) \rightarrow y$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , por lo tanto la función  $\varepsilon \mapsto J[y(\cdot, \varepsilon)]$  debe tener un mínimo en  $\varepsilon = 0$ . El resto de la prueba consiste en demostrar que esta función es derivable en  $\varepsilon = 0$  y que su derivada es igual a la función exceso. La prueba se sigue dado que esta derivada debe ser no-negativa.

**Ejemplo 3.** Para el problema variacional

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y'^3) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

de acuerdo con las ecuaciones de Euler-Lagrange, un valor extremo satisface  $y(x) = 0$ , es decir,  $y(x)$  y  $y'(x)$  son idénticamente nulas. Por otro lado la función exceso de Weierstrass se escribe como

$$\mathcal{E}(x, y, z, w) = (w - z)(w^2 + (z + 1)w - (2z^2 + z)),$$

por lo que

$$\mathcal{E}(x, y, y', w) = \mathcal{E}(x, 0, 0, w) = w^2(1 + w).$$

Es decir,  $\mathcal{E}$  puede hacerse positiva o negativa según se elija  $w$ , de ahí que  $y = 0$  no puede ser un valor extremo para  $J[y]$ .

De la condición necesaria de WEIERSTRASS se puede deducir una condición necesaria semejante a la del Principio del Máximo. En efecto, tomando en consideración la variable de momento (20) y la función hamiltoniana (21) se tiene que

$$\mathcal{E}(x, y, y', w) = \mathcal{H}(x, y, y', p) - \mathcal{H}(x, y, w, p).$$

Por lo tanto, la condición necesaria de WEIERSTRASS es equivalente a afirmar que si  $y$  es un valor extremo de  $J[y]$  entonces

$$\mathcal{H}(x, y, y', p) = \min_{u \in \mathbb{R}} \mathcal{H}(x, y, u, p),$$

condición similar a la establecida por el Principio del Máximo. Sin embargo, sería injusto hablar de una oportunidad perdida o decir que WEIERSTRASS no fue capaz de enunciar esta *versión* del Principio del Máximo, pues además de que esta formulación descansa en la interpretación de  $z$  y  $p$  como variables independientes y en la introducción del hamiltoniano, la teoría de control, entendida como la teoría de ecuaciones diferenciales sobredeterminadas, no estaba completamente desarrollada.

**Observación 4.** Para facilitar la exposición, en esta sección se ha tratado el caso de una variable, es decir, la minimización del funcional (3) con trayectorias admisibles definidas como  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y(x)$ . Para el caso multivariable, se toma el integrando como una función continua  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , en tanto que las trayectorias admisibles se definen como  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ ; además  $y'(x) = (y'_1(x), \dots, y'_n(x))$ . La condición necesaria (8) está dada por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$f_{y_i} - \frac{d}{dx} f_{y'_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Las variables de momentos y el hamiltoniano están definidas por  $p = (p_1, \dots, p_n)$  con  $p_i = f_{y'_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  y  $\mathcal{H} = -f + \langle y', p \rangle$  respectivamente. La transición de las variables  $(x, y, y')$  a las variables canónicas  $(x, y, p)$  requiere que el jacobiano  $\det(f_{y'_i y'_j})$  no se anule idénticamente. Las ecuaciones de Hamilton se escriben como

$$\dot{y}_i = \mathcal{H}_{p_i}, \quad \dot{p}_i = -\mathcal{H}_{y_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

en tanto que la ecuación de Hamilton-Jacobi se escribe como

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \mathcal{H}\left(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial y_n}\right) = 0.$$

### 3. Preludio al Principio del Máximo

El Principio del Máximo encuentra sus raíces en la tradición clásica del cálculo de variaciones y surge dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y de la teoría de control. La idea central del Principio del Máximo aparece en germen en las condiciones necesarias de optimalidad estudiadas inicialmente por WEIERSTRASS, y desarrolladas posteriormente por BOLZA y CARATHÉODORY a finales del siglo XIX y principios del siglo XX y más recientemente en la segunda mitad del siglo pasado por BELLMAN y HESTENES. En esta sección elaboramos una presentación cronológica de algunas de estas ideas. Para facilitar la exposición nos concentramos, como antes, en el caso de una variable y no incluiremos el caso, muy importante, de las llamadas condiciones de esquina y de las curvas extremales que son continuas a trozos; para esto referimos al lector a [9].

#### 3.1. El problema de Bolza

BOLZA<sup>31</sup> realizó contribuciones importantes en diversas ramas del análisis matemático, especialmente en la teoría de funciones elípticas e hiperelípticas y en el cálculo de variaciones. Participó de las lecturas de WEIERSTRASS y del seminario de KLEIN<sup>32</sup> en Berlín a principios de los ochenta del siglo antepasado. Emigró a los Estados Unidos en 1888 en donde permaneció hasta 1908, principalmente en la Universidad de Chicago. Su actividad científica impactó significativamente a la comunidad matemática norteamericana: fue miembro fundador de la AMS<sup>33</sup> y de la, aun hoy, reputada publicación *Transactions of the AMS*. En 1901, en el tercer coloquio de la AMS, disertó de manera brillante sobre el estado del arte de cálculo de variaciones, [20].

<sup>31</sup>OSKAR BOLZA, matemático alemán, 1857-1942.

<sup>32</sup>CHRISTIAN FELIX KLEIN, matemático alemán, 1849-1925.

<sup>33</sup>American Mathematical Society

<sup>34</sup>Ilustración tomada del sitio <https://www.wikipedia.org>



**Figura 9.** Retrato de OSKAR BOLZA<sup>34</sup>.

El llamado *problema de Bolza* es uno de los problemas más generales del cálculo de variaciones, y fue formulado por BOLZA mismo en los trabajos [21] y [22]. Aquí seguimos la presentación dada por BLISS<sup>35</sup> en [23].

Dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , se trata de encontrar en la clase de trayectorias

$$x \mapsto y = (y_1(x), \dots, y_n(x)), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (30)$$

que satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\varphi_\alpha(x, y, y') = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m < n, \quad (31)$$

y condiciones de frontera

$$\psi_\mu(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0 \quad \mu = 1, \dots, p \leq 2n + 2, \quad (32)$$

aquella que minimiza el funcional

<sup>35</sup>GILBERT AMES BLISS, matemático norteamericano, 1876-1951.

$$J[y] = g(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \quad (33)$$

con  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuamente diferenciables.

El caso  $g \equiv 0$  se denomina *el problema de Lagrange*, mientras que el caso  $f \equiv 0$  y  $p < 2n + 2$  es llamado *el problema de Mayer*<sup>36</sup>. Siguiendo la notación de BLISS, para establecer las condiciones necesarias para un valor extremo de  $J[y]$  se considera una región  $\mathcal{R}$  de puntos  $(x, y, y')$ , en la cual las funciones  $f$  y  $\varphi_\alpha$  tienen derivadas parciales continuas hasta de tercer orden, a la vez que las funciones  $g, \psi_\mu$  tienen las mismas propiedades en el dominio de los puntos  $(x_1, y_{i_1}, x_2, y_{i_2})$  para los cuales  $(x_1, y_{i_1}) = (x_1, y_i(x_1))$  y  $(x_2, y_{i_2}) = (x_2, y_i(x_2))$  pertenecen a conjuntos  $(x, y, y')$  en  $\mathcal{R}$ . La independencia de las condiciones (31) y (32) está garantizada al asumir que las matrices  $(\varphi_{\alpha y'_i})$  y  $(\psi_{\mu x_1} \psi_{\mu y_{i_1}} \psi_{\mu x_2} \psi_{\mu y_{i_2}})$  tienen rangos  $m$  y  $p$  respectivamente.

Un *conjunto admisible* es aquel que está en el interior de  $\mathcal{R}$  y donde se satisface la ecuación  $\varphi_\alpha = 0$ . Una *trayectoria admisible* (30) es una curva continua que consiste de un número finito de sub-trayectorias con giro de tangentes continuo y cuyos elementos  $(x, y, y')$  son todos admisibles.

De acuerdo con BLISS, el problema de Bolza, más precisamente establecido, consiste en encontrar, en la clase de trayectorias admisibles que satisfacen las condiciones de frontera  $\psi_\mu = 0$ , aquella que minimiza el funcional  $J[y]$ . Se tiene entonces el siguiente resultado.

**Teorema 5. (Bolza)** *Para un valor extremo  $E_{12}$  del problema de Bolza, existen constantes  $c_i$  y una función*

$$F = \lambda_0 f + \lambda_\alpha(x) \varphi_\alpha$$

tal que las ecuaciones

$$F_{y'_i} = \int_{x_1}^x F_{y_i} dx + c_i \quad \text{y} \quad \varphi_\alpha = 0 \quad (34)$$

se satisfacen en cada punto de  $E_{12}$ . En los puntos inicial y terminal de  $E_{12}$  se satisface, además de la ecuación  $\psi_\mu = 0$ , la condición

$$(F - y'_i F_{y'_i}) dx + F_{y'_i} dy_i \Big|_1^2 + \lambda_0 dg = 0, \quad (35)$$

para cada conjunto de diferenciales  $dx_1, dy_{i_1}, dx_2$  y  $dy_{i_2}$ , las cuales satisfacen la ecuaciones  $d\psi_u = 0$ . El primer multiplicador  $\lambda_0$  es constante, y los multiplicadores  $\lambda_\alpha(x)$  son continuos excepto posiblemente en los valores de  $x$  que definen esquinas de  $E_{12}$ . Los multiplicadores  $\lambda_0, \lambda_\alpha(x)$  no se anulan simultáneamente en ningún punto de  $E_{12}$ .

<sup>36</sup>CHRISTIAN GUSTAV ADOLPH MAYER, matemático alemán, 1839-1908.



El caso en el que el multiplicador  $\lambda_0 = 0$  es denominado el caso *anormal* y fue estudiado por BLISS en [24]; este caso de extremales anormales es de suma importancia en la formulación del Principio del Máximo.

**Observación 5.** La ecuación (34) es la presentación integral de la ecuación de Euler-Lagrange. La ecuación (35) se denomina condiciones de transversalidad en los valores inicial y terminal de la curva extremal y también están presentes en la formulación del Principio del Máximo.

### 3.2. El camino real de Carathéodory

CARATHÉODORY<sup>37</sup> se inició en el estudio del cálculo de variaciones influido por HILBERT<sup>38</sup> y KLEIN trabajo tuvo fuerte impacto en la comunidad científica europea, sobresaliendo su labor editorial en las afamadas publicaciones *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* y *Mathematische Annalen*.

El periodo de la Segunda Guerra Mundial le fue especialmente difícil; si bien no formó parte del movimiento nacional socialista, se mantuvo ligado con miembros del partido nazi. Como muchos miembros de la burguesía ilustrada alemana, guardó silencio ante los crímenes perpetrados por el régimen hitleriano y nunca mencionó el Holocausto. Al término de la guerra dedicó esfuerzos significativos para reestablecer la matemática como una disciplina académica en Alemania, como una manera de reintegrar al país a la comunidad de naciones civilizadas [25].

CARATHÉODORY realizó contribuciones importantes al análisis matemático, en especial al cálculo de variaciones y su relación con la teoría de ecuaciones en derivadas parciales; su obra [26] publicada en 1935 continúa siendo una referencia ineludible en ese campo. Sus métodos elegantes en el estudio de condiciones necesarias y suficientes para valores extremales, en particular su enfoque de la llamada teoría de campos, fueron bautizados por BOERNER<sup>39</sup> como el *camino real de Carathéodory* en el cálculo de variaciones (ver [27]). De acuerdo con H.J. PESH [28], CARATHÉODORY estableció varias salidas y perdió al menos una oportunidad para transitar del cálculo de variaciones a la teoría de control óptimo, salidas que se refieren a los resultados más prominentes de esta última: la distinción entre variables de estado y variables de control, el principio de optimalidad conocido como la *ecuación de Bellman* y el Principio del Máximo.

CARATHÉODORY consideró el siguiente problema variacional: dados  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  fijos y  $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}_1$ , minimizar el funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (36)$$

<sup>37</sup>CONSTANTIN CARATHÉODORY, matemático alemán de origen griego, 1873-1950.

<sup>38</sup>DAVID HILBERT, matemático alemán, 1862-1943.

<sup>39</sup>HERMANN BOERNER, matemático alemán, 1906-1982.

<sup>40</sup>Ilustración tomada del sitio <http://www.wikipedia.org>



**Figura 10.** CONSTANTIN CARATHÉODORY<sup>40</sup>.

entre las curvas  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto y(x)$  de clase  $C_1$  que satisfacen las condiciones  $y(a) = x_1, y(b) = x_2$  y que están sujetas a la ecuación diferencial implícita

$$G(x, y, y') = 0, \quad (37)$$

con  $G : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $p < n$  de clase  $C_2$  tal que:

$$\text{rango} \left( \frac{\partial G_k}{\partial y'_j} \right) = p. \quad (38)$$

CARATHÉODORY muestra que una condición necesaria para un valor extremal es la llamada *condición de Legendre-Clebsch*: para  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$  fijos, el mapeo  $v \mapsto f(x, y, v)$  tiene hessiano  $f_{vv}(x, y, v)$  positivo definido.

La condición para un valor extremal formulada por CARATHÉODORY descansa sobre el hecho de que (38) garantiza la existencia de una familia de curvas definida por una ecuación diferencial  $\dot{y} = \psi(x, y)$  con  $\psi$  de clase  $C_1$  tal que se cumple la restricción diferencial (37).

**Teorema 6. (CARATHÉODORY)** *Suponga que existen funciones  $\psi(x, y)$  de clase  $C_1$  y  $S(x, y)$  de clase  $C_2$  tales que*

$$\begin{aligned} f(x, y, \psi) - S_y(x, y)\psi(x, y) &\equiv S_x(x, y) \\ f(x, y, z) - S_y(x, y)z &> S_x(x, y) \end{aligned}$$

para toda  $z$  que satisface  $z(a) = x_1$ ,  $z(b) = x_2$  y la restricción diferencial  $G(x, y, z) = 0$ , donde  $0 < |z - \psi(x, y)| < \varepsilon$  con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Entonces las soluciones al problema de valores a la frontera  $\dot{y} = \psi(x, y)$ ,  $y(a) = x_1$ ,  $y(b) = x_2$  son valores extremales del problema variacional dado por (36) y (37).

**Observación 6.** Para el caso del problema variacional sin la restricción diferencial (37), CARATHÉODORY establece que se deben encontrar funciones  $\psi(x, y)$  y  $S(x, y)$  tales que la función

$$y' \mapsto f(x, y, y') - S_x(x, y) - S_y(x, y)y'$$

posee un mínimo igual a cero para  $y' = \psi(x, y)$ , es decir,

$$S_x(x, y) = \min_{y'} \{f(x, y, y') - S_y(x, y)y'\}.$$

Esta ecuación se conoció más tarde como la *ecuación de Bellman* y es el fundamento del llamado *principio de la programación dinámica*.

Introduciendo la función  $M(x, y, y', \mu) = f(x, y, y') + \mu^T G(x, y, y', \mu)$ , donde  $\mu$  es un multiplicador  $p$ -dimensional, CARATHÉODORY formuló lo que llamó las *ecuaciones fundamentales del cálculo de variaciones*: un valor extremal del problema variacional (36) y (37) es una solución del sistema

$$\begin{aligned} S_x &= M_{y'}(x, y, \psi, \mu) \\ S_t &= M(x, y, \psi, \mu) - M_{y'}(x, y, \psi, \mu)\psi \\ G(x, y, \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Además como la función exceso puede escribirse como

$$\mathcal{E}(x, y, z, w, \mu) = M(x, y, w, \mu) - M(x, y, z, \mu) - M_z(x, y, z, \mu)(w - z),$$

CARATHÉODORY muestra que la condición de Legendre-Clebsch implica la condición necesaria de Weierstrass y garantiza la positividad definida de la matriz

$$\begin{pmatrix} M_{y'y'} & G_{y'}^T \\ G_{y'} & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Quizás el acercamiento más próximo de CARATHÉODORY al formalismo de lo que hoy se conoce como la *teoría de control óptimo* se encuentra con la introducción de las variables

$$\begin{aligned} z &= M_{y'}^T(x, y, y', \mu), \\ w &= G(x, y, y') = M_\mu^T(x, y, y', \mu). \end{aligned} \quad (40)$$

La condición (39) permite resolver para  $y'$  y para  $\mu$

$$\begin{aligned} y' &= \Phi(x, y, z, w), \\ \mu &= X(x, y, z, w), \end{aligned}$$

por lo que el hamiltoniano del sistema puede definirse en términos de las coordenadas canónicas  $(x, y, z, w)$  como

$$H(x, y, z, w) = -M(x, y, \Phi, X) + z^T \Phi + w^T X.$$

Evidentemente  $H$  es de clase  $C_2$  y satisface las ecuaciones

$$H_x = -M_x, \quad H_y = -M_y, \quad H_z = \Phi^T, \quad H_w = X^T. \quad (41)$$

De esta forma que se toma  $\mathcal{H} = H(x, y, z, 0)$ , la definición (40) de la variable  $z$  y la condición (39) permiten escribir  $\dot{x} = \phi(x, y, z)$  y  $\mu = \xi(x, y, z)$  y también

$$\mathcal{H}(x, y, z) = -f(x, y, \phi(x, y, z)) + z^T \phi(x, y, z), \quad (42)$$

por lo que las ecuaciones (41) implican

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x(x, y, z) &= -f_x(y, z, \phi) \\ \mathcal{H}_y(x, y, z) &= -f_y(y, z, \phi) \\ \mathcal{H}_z(x, y, z) &= \phi(x, y, z)^T. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones caracterizan completamente el problema variacional.

CARATHÉODORY va más allá al tomar una partición adecuada de las variables y escribir  $y = (y^{(1)}, y^{(2)})$  con  $y^{(1)} = (y_1, \dots, y_p)$  y  $y^{(2)} = (y_{p+1}, \dots, y_n)$ , de tal forma que

$$G(x, y, \dot{y}) = \dot{y}^{(1)} - \Psi(x, y, \dot{y}^{(2)})$$

y (42) se escribe como

$$\mathcal{H}(x, y, z) = -f(x, y, \phi^{(2)}) + z^{(1)T} \phi^{(1)} + z^{(2)T} \phi^{(2)},$$

con

$$\begin{aligned} \dot{y}^{(1)} &= \Psi(x, y, \psi^{(1)}) = \phi^{(1)}(x, y, z) \\ \dot{y}^{(2)} &= \Psi(x, y, \psi^{(2)}) = \phi^{(2)}(x, y, z). \end{aligned}$$

Este es el tipo de sistema hamiltoniano que aparece en la teoría de control óptimo: la variable canónica  $z$  representa lo que hoy se conoce como variables de coestado en tanto que  $\dot{y}^{(2)}$  proporciona lo que serían las variables libres del problema de *control óptimo* definido por (36) y (37).

### 3.3. La programación dinámica de Bellman

BELLMAN<sup>41</sup> realizó contribuciones importantes a la matemática básica y aplicada. En 1946 defendió su tesis sobre ecuaciones diferenciales en Princeton bajo la dirección de LEFSCHETZ.<sup>42</sup> En 1950 inicia su trabajo en la corporación RAND<sup>43</sup>; es en este periodo en el que elabora la llamada *teoría de la programación dinámica*, considerada como uno de sus aportes más significativos a la matemática aplicada. En su formulación inicial, la teoría no estuvo ligada a un paradigma computacional específico ni a un desarrollo tecnológico particular. De hecho la era moderna de la computación iniciaba: ENIAC había sido anunciada apenas en 1946. En su autobiografía [29], BELLMAN relata que eligió ese nombre para la teoría con el fin de convencer a un funcionario de alto rango de la Fuerza Aérea Norteamericana de apoyar su investigación al interior de la RAND. En la página 159 se lee:

“... Though, I thought dynamic programming was a good name. It was something not even a Congressman could object to. So I used it as an umbrella for my activities”<sup>44</sup>.

En su artículo expositivo [30] BELLMAN explica que la teoría fue creada para tratar problemas matemáticos que surgen en lo que él llamó *procesos de decisión multi-etapas* (*multi-stage decision processes*), o sea procesos que consisten de un sistema físico cuyo estado en un momento dado es determinado por un conjunto de cantidades, parámetros o variables de estado las cuales pueden ser prescritas de antemano y sobre las cuales se requiere tomar decisiones que afectan el estado del sistema.

Una sucesión de decisiones es llamada una *política* y uno está interesado en encontrar la política óptima para un criterio asignado.

La idea básica de la teoría es considerar una política óptima como aquella que determina la decisión requerida en cada momento en términos de estado actual del sistema. Esta idea fue formulada por BELLMAN en el llamado *principio de optimalidad* que se enuncia como sigue:

<sup>41</sup>RICHARD ERNEST BELLMAN, matemático norteamericano, 1920-1984.

<sup>42</sup>SOLOMON LEFSCHETZ, matemático americano de origen ruso, 1884-1972.

<sup>43</sup>Research AND Development, corporación sin fines de lucro abocada a la investigación de políticas públicas de desarrollo.

<sup>44</sup>Sin embargo, pensé que *programación dinámica* era un buen nombre. Era algo a lo que ni siquiera un congresista podría objetar. Así que lo usé como un paraguas para mis actividades. (NB. Traducción libre del autor.)

<sup>45</sup>Ilustración tomada del sitio <http://www.breves-de-maths.fr/>



**Figura 11.** RICHARD BELLMAN<sup>45</sup>.

Una política óptima tiene la propiedad de que cualesquiera sean el estado inicial y las decisiones iniciales, las decisiones posteriores deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de las primeras decisiones.

BELLMAN explica la formulación matemática de este principio en cuatro contextos diferentes, a saber: discreto determinista, discreto estocástico, infinito estocástico y continuo determinista.

Para el caso continuo determinista, el sistema es descrito por un vector  $p$  en una región  $D$  del espacio  $\mathbb{R}^n$ , se define la función

$f(p, T)$  = el resultado obtenido sobre el intervalo  $[0, T]$  usando una política óptima comenzando con un estado inicial  $p$ ,

y se formula la llamada *ecuación funcional para el principio de optimalidad*:

$$f(p; S + T) = \max_D f(T_S(p); T). \quad (43)$$

Con esta formulación en mano, BELLMAN desarrolla una colección de ejemplos, en particular considera el problema variacional que consiste en maximizar el funcional

$$\int_0^T F(x, y) dt$$

sobre  $y$ , donde  $x$  y  $y$  están conectadas por la relación

$$\frac{dx}{dt} = G(x, y), \quad x(0) = c.$$

Procede entonces a enfocar el problema como un proceso continuo de decisión multi-etapas, buscando determinar  $y$  para cualquier tiempo, como una función de los dos parámetros de estado  $c$  y  $T$ . En este caso la ecuación funcional se escribe

$$f(c, T) = \max_y \int_0^T F(x, y) dt,$$

y el principio de de optimalidad implica que  $f(c, T)$  satisface la ecuación

$$f(c, S + T) = \max_{y \in [0, S]} \left( \int_0^T F(x, y) dt + f(c(S), T) \right). \quad (44)$$

Suponiendo que  $y$  es continua y tomando el límite cuando  $S \rightarrow 0$ , BELLMAN deduce a partir de (44) la ecuación en derivadas parciales de primer orden cuya característica resulta ser la ecuación de Euler-Lagrange que se obtiene usando el método variacional convencional.

La metodología de la programación dinámica entra de manera natural en la teoría de control óptimo y en particular en el Principio del Máximo.

Consideremos el problema variacional

$$\begin{aligned} & \max_{u(\cdot), x_T} \left( \int_0^T f(s, x(s), u(s); \alpha) ds + \phi(x(T), T) \right), \\ & \text{tal que } \dot{x} = g(s, x(s), u(s); \alpha), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \end{aligned} \quad (45)$$

donde  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas;  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $s \mapsto x(s)$  es el vector de estados,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $s \mapsto u(s)$  es un vector de variables subsidiarias (parámetros de control) y  $\alpha \in \mathbb{R}^k$  es un vector exógeno de parámetros constantes.

En este caso la ecuación funcional, usualmente denominada *función de valor optimal*, se escribe como sigue:

$$V(\alpha, t, x_t, T) = \max_{u(\cdot), x_T} \left( \int_t^T f(s, x(s), u(s); \alpha) ds + \phi(x(T), T) \right), \quad (46)$$

tal que

$$\dot{x} = g(s, x(s), u(s); \alpha), \quad \text{con } x(t) = x_t, \quad \text{y } x(T) = x_T.$$

Se tiene entonces el siguiente resultado.

**Teorema 7. (Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman)** Si  $V$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interno estándar de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $V$  satisface la ecuación diferencial

$$-V_t(\alpha, t, x_t) = \max_u (f(t, x_t, u; \alpha) + \langle V_x(\alpha, t, x_t), g(t, x_t, u; \alpha) \rangle) \quad (47)$$

con condición de frontera  $V(\alpha, T, x(T)) = \phi(x(T), T)$ .

Dadas  $H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y uniformemente continua, una función  $u : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una *solución de viscosidad* de la ecuación

$$u_t + H(t, x, u_x) = 0 \quad \text{con } t \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$$

si  $u(T, x) = g(x)$  se satisface para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , y para cada  $\phi \in \mathcal{C}^1((0, T) \times \mathbb{R}^n)$  se tiene que si  $(u - \phi)$  alcanza un máximo local en  $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$  entonces

$$\phi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, \phi_x(t_0, x_0)) \geq 0,$$

y si  $(u - \phi)$  alcanza un mínimo local en  $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$  entonces

$$\phi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, \phi_x(t_0, x_0)) \leq 0.$$

Se puede demostrar (ver por ejemplo [31]) que bajo la hipótesis de que  $V$  sea de clase  $\mathcal{C}^2$  se puede derivar la condición necesaria del Principio del Máximo usando las soluciones de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

### 3.4. El reporte RM-100 de la RAND de Hestenes

HESTENES<sup>46</sup> defendió su tesis en la Universidad de Chicago en 1932 bajo la dirección de BLISS, quien a su vez se doctoró bajo la dirección de BOLZA. Estos tres matemáticos, junto con otros, formaron los cimientos de lo que en el siglo pasado se conoció como la *Escuela de Chicago del cálculo de variaciones*. HESTENES incursionó en diferentes ramas de la matemática; aparte de sus contribuciones al cálculo de variaciones es reconocido también por su trabajo sobre las formas cuadráticas en los espacios de Hilbert y por su aportación al llamado *método del gradiente conjugado*.

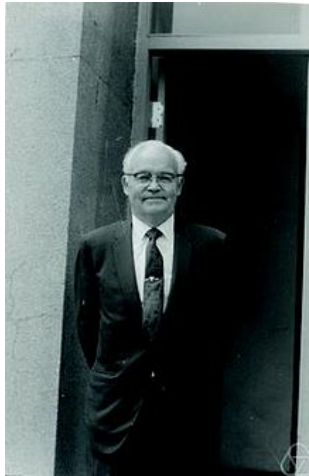
En el memorándum de investigación RM-100 de la corporación RAND de marzo de 1950 [11], se encuentran ya, en forma germinal, la formulación del *problema general de control óptimo* y una versión del Principio del Máximo. Sin embargo, las ataduras conceptuales del cálculo de variaciones impidieron a HESTENES elaborar la nueva teoría que desarrollarían en plenitud seis años más tarde PONTRYAGIN<sup>48</sup> y colaboradores en la ex Unión Soviética.

<sup>46</sup>MAGNUS RUDOLPH HESTENES, matemático norteamericano, 1906-1991.

<sup>47</sup>Ilustración tomada del sitio <http://www.wikipedia.org>

<sup>48</sup>LEV SEMYONOVICH PONTRYAGIN, matemático ruso, 1908-1988.





**Figura 12.** MAGNUS RUDOLPH HESTENES<sup>47</sup>.

A partir de un problema concreto de aeronáutica, el de trayectorias de tiempo mínimo, HESTENES explicó de una manera clara un problema de control óptimo, y estableciendo la separación entre variables de estado y variables de control elaboró, dentro del marco conceptual del cálculo de variaciones, la idea central del Principio del Máximo: el vector de control óptimo tiene que ser seleccionado en forma tal que maximice la función hamiltoniana a lo largo de la trayectoria minimizante.

En el RM-100 HESTENES estudió el problema de las trayectorias de tiempo mínimo para un aeroplano, formulándolo analíticamente como un problema de cálculo de variaciones equivalente a uno de tipo Bolza. El problema es modelado por medio de las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{T} + \vec{L} + \vec{D} + \vec{W}, \quad \frac{dw}{dt} = \dot{W}(v, T, \ell), \quad (48)$$

donde  $\vec{L}$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{W}$  son los vectores de ascenso, arrastre y peso respectivamente; los dos primeros son funciones de los ángulos de ataque e inclinación lateral  $\alpha$  y  $\beta$ . Debido al tiempo corto de la maniobra, la masa  $m$  se asume constante y el vector de empuje  $\vec{T}$  se representa como una función de la velocidad  $v = |\vec{v}|$  y la altitud  $\ell$ .

La trayectoria queda completamente determinada por los valores iniciales del vector de posición  $\vec{r}$ , del vector velocidad  $\vec{v}$ , de  $w = |\vec{W}|$  y de los valores  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  a lo largo de la trayectoria.

El objetivo consiste en determinar las funciones  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  con  $t_1 \leq t \leq t_2$  tal que el tiempo  $t_2$  de vuelo es minimizado con respecto a las trayectorias que satisfacen las ecuaciones diferenciales y que tienen condiciones iniciales y terminales prescritas

$\vec{r}(t_1), \vec{v}(t_1), w(t_1), \vec{r}(t_2), \vec{v}(t_2)$  y  $w(t_2)$ . HESTENES formula este problema como un problema variacional, desglosa dos problemas que lo representan y muestra que estos dos problemas son equivalentes.

PROBLEMA A: (página 3, RM-100). Se considera una clase de funciones  $a_h(t)$  y un conjunto de parámetros  $b_\rho$  con  $h = 1, \dots, m$  y  $\rho = 1, \dots, r$ , así como una clase de arcos  $q_i(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $i = 1, \dots, n$ , conectados por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$q'_i = Q_i(t, q, a) \tag{49}$$

y las condiciones terminales

$$t_1 = T_1(b), q_i(t_1) = Q_{i1}(b), t_2 = T_2(b), q_i(t_2) = Q_{i2}(b). \tag{50}$$

Encontrar  $a_h, b_\rho$  y  $q_i$  tales que minimicen una función de la forma

$$I = g(b) + \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, a) dt.$$

PROBLEMA B: (página 4, RM-100). Corresponde al problema de Bolza a la manera expuesta por BLISS y presentada en el párrafo 3.1. Una clase de elementos  $b_\rho$  y  $x_j(t)$  con  $t_1 \leq t \leq t_2$  y  $\rho = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, p$  es denominada un arco. Las primeras  $r$  componentes de un arco son constantes y se consideran arcos que satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\phi_i(t, x, x') = 0, \quad i = 1, \dots, n < p, \tag{51}$$

y las condiciones terminales

$$t_1 = t_1(b), x_i(t_1) = X_{i1}(b), t_2 = t_2(b), x_i(t_2) = X_{i2}(b). \tag{52}$$

Entre los arcos que satisfacen (51) y (52) encontrar el que minimiza una función de la forma

$$I = g(b) + \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, x') dt. \tag{53}$$

HESTENES explica que el problema de la trayectoria de tiempo mínimo para un aeroplano es un problema de tipo A, pues al tomar  $a_1(t) = \alpha(t)$ ,  $a_2(t) = \beta(t)$  y  $b_1 = t_2$ , las cantidades  $q_1, \dots, q_7$  denotan las componentes de  $\vec{r}, \vec{v}$  y  $w$ . Las ecuaciones (48) son de la forma (49), en tanto que las ecuaciones (50) describen los valores  $t_1 = 0$ ,  $q_i(t_1) = q_i(t_2) = \text{constantes}$  y  $t_2 = b_1$ . La función a minimizar es el tiempo de vuelo

$$I = g(b) = b,$$

observando que normalmente  $q_7(t_2) = w$  no es prescrita de antemano.

Además muestra que el problema A se puede reducir a uno de tipo B y conversamente, esto último bajo la hipótesis de que existan  $m = p - n$  funciones  $\phi_{n+h}(t, x, x')$  de clase  $C^2$  tales que las ecuaciones

$$\begin{aligned}\phi_i(t, x, x') &= 0 \\ \phi_{n+h}(t, x, x') &= a_h\end{aligned}$$

tenga soluciones únicas

$$x'_j = P_j(t, x, a), j = 1, \dots, p, \quad (54)$$

en el dominio bajo consideración. Las funciones  $x_j(t)$  son entonces completamente determinadas cuando los valores de  $x_j(t_1)$  y  $a_h(t)$  son conocidos. Consecuentemente, si se eliminan las derivadas  $x'_j$  en (53) el problema B es equivalente al de minimizar, en la clase de arcos  $a_h(t), b_\rho, x_j(t)$  que satisfacen (54) y (51), la función

$$I = g(b) + \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, P(t, x, a)) dt,$$

el cual es un problema de tipo A con  $q_j(t) = x_j(t)$ .

Para el problema B un arco es denominado *admisible* si las  $x_i(t)$  son continuas y tienen derivadas continuas a trozos. Si  $C_0$  admisible es un valor extremal normal<sup>49</sup>, bajo las hipótesis de que  $C_0$  es de clase  $C^2$  y de que la matriz  $(\phi_{ix'_j})$  tiene rango  $n$  sobre  $C_0$ , HESTENES prueba que existe un conjunto único de multiplicadores  $\lambda_i(t)$  tal que si escribe

$$F(t, x, x', \lambda) = f + \lambda_i \phi_i,$$

entonces  $F$  satisface la ecuación de Euler-Lagrange, la condición de Weierstrass y la condición de Clebsh-Legendre. Luego utiliza estos resultados para formular las condiciones necesarias de optimalidad para el problema A, en donde aparece lo que bien podría denominarse versión variacional del principio máximo.

De manera similar, para el problema A (p.12, RM-100) HESTENES considera como admisibles los arcos para los cuales las  $q'_i(t)$  son continuas a trozos. De nueva cuenta si  $C_0$  admisible es un valor extremal normal, asumiendo que  $q'_1(t)$  y  $a_h(t)$  son continuas y tienen derivadas continuas, se muestra que existe un único multiplicador  $p_i(t)$  de clase  $C^1$  tal que si se escribe

<sup>49</sup>El concepto de extremal normal (vs. anormal) es discutido por BLISS en [24]. En el reporte RM-100 HESTENES señala que el caso anormal es . . . *altamente singular y no será discutido aquí*. . . La diferencia conceptual entre estos dos tipos de valores extremales será clarificada seis años más tarde con la formulación del Principio del Máximo.

$$H(t, q, p, a) = p_i Q_i - L,$$

entonces sobre  $C_0$  se cumplen las ecuaciones

$$q'_i = H_{p_i}, p'_i = -H_{q_i}, H_{a_h} = 0 \quad (55)$$

y las llamadas condiciones de transversalidad

$$\left( -HT_{s_\rho} + p_i Q_{i s_\rho} \right) \Big|_{s=1}^{s=2} + g_\rho = 0. \quad (56)$$

HESTENES señala además en la página 14 del RM-100 que: *... es interesante observar que las ecuaciones  $q'_i = Q_i$  son de la forma  $q'_i = a_i$ , así que  $a_i$  no es más que otro símbolo para  $q'_i$  y se tiene que  $H_{a_i} = p_i - L_{a_i} = p_i - L_{q'_i}$ ...*

Consecuentemente, a lo largo de una solución de (55) las  $p_i$  son las variables canónicas y la  $H$  coincide con la función hamiltoniana. Cuando la función exceso de Weierstrass para el problema B es interpretada en términos de  $H$  para el problema A se tiene que

$$\mathcal{E}(t, q, p, a, \Lambda) = -H(t, q, p, \Lambda) + H(t, q, p, a, a) + (\Lambda_h - a_h)H_{a_h}(t, q, p, a, a).$$

Por lo tanto, en la medida en que  $H_{a_h} = 0$  a lo largo de  $C_0$ , se tiene que la condición necesaria de Weierstrass implica que

$$H(t, q, p, \Lambda) \leq H(t, q, p, a)$$

debe cumplirse para cada elemento admisible  $(t, q, \Lambda)$ . En consecuencia,  $H$  tiene un valor máximo con respecto a  $a_h$  a lo largo de una curva minimizante, como lo establece el Principio del Máximo.

**Observación 7.** De acuerdo con [3], en una carta dirigida a MACLANE<sup>50</sup>, HESTENES reconoce que si bien en el RM-100 él había formulado, desde el marco teórico del cálculo de variaciones, el problema general de control óptimo y el Principio del Máximo, él no reescribió estos resultados formalmente sino hasta 15 años después.

El Principio del Máximo estuvo de alguna manera implícito en los trabajos de CARATHÉODORY y de BELLMAN, y con mayor nitidez en el reporte RM-100 de HESTENES, sin embargo es justo puntualizar que la génesis de la teoría de control óptimo, así como la formulación y demostración del Principio del Máximo se debe al grupo de Steklov liderado por PONTYAGIN.

<sup>50</sup>SANDERS MAC LANE, matemático norteamericano, 1909-2005.

#### 4. El Principio del Máximo

El Principio del Máximo fue anunciado en 1956 en [32] por el grupo de investigadores del Instituto Steklov de Matemáticas de Moscú en la ex Unión Soviética. El grupo encabezado por PONTRYAGIN incluyó, entre otros, a sus estudiantes V. BOLTYANSKI<sup>51</sup> y R. GAMKRELIDZE<sup>52</sup> además de E. MISHCHENKO<sup>53</sup>, joven investigador en Steklov.

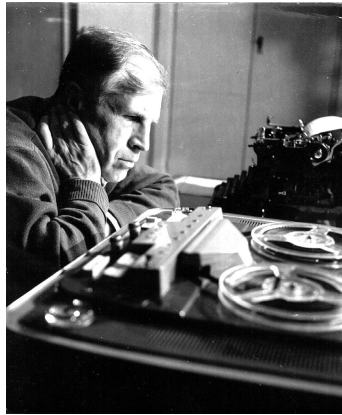


Figura 13. LEV SEMYONOVICH PONTRYAGIN<sup>54</sup>.

Habiendo realizado contribuciones relevantes a la topología algebraica, reconocido entre otras cosas como el creador de la teoría de cobordismo, PONTRYAGIN decide dedicar los últimos años de su vida a las matemáticas aplicadas. PONTRYAGIN perdió la vista a los 14 años y fue ayudado por su madre a completar su formación científica. Se dice que ella diseñó un código especial de comunicación para poder escribir la terminología matemática. Matemático de personalidad singular, PONTRYAGIN fue criticado en diversas ocasiones de sostener posturas antisemitas.

A partir de 1952 PONTRYAGIN decidió cambiar su ruta de investigación a temáticas más aplicadas e inició un seminario sobre la teoría de oscilaciones, en el cual la teoría de control óptimo y el Principio del Máximo encuentra sus orígenes. En el año de 1955, por intermediación de MISHCHENKO, en ese entonces representante del Partido Comunista en Steklov [33], el equipo entra en contacto con un académico ligado al ejército y su investigación se orienta más hacia las teorías matemáticas para el estudio de trayectorias óptimas y del problema de la interceptación espacial.

Los esfuerzos de investigación del grupo de Steklov rindieron frutos que se reflejaron en la serie de publicaciones [34, 35, 36, 37] y que culminaron en su famoso libro “*Teoría*

<sup>51</sup>VLADIMIR GRIGOREVICH BOLTYANSKI, matemático ruso, 1925–

<sup>52</sup>REVAZ VALERIANOVICH GAMKRELIDZE, matemático ruso de origen georgiano, 1927–

<sup>53</sup>EVGENII FROLOVICH MISHCHENKO, matemático ruso, 1922-2010.

<sup>54</sup>Ilustración tomada del sitio <http://www.wikipedia.org>

*matemática de procesos optimales*<sup>55</sup> que aún hoy es referencia ineludible para el estudio de la teoría de control óptimo.

El grupo encabezado por PONTRYAGIN fue condecorado con el premio Lenin, a la época el máximo galardón otorgado por el Estado Soviético por “*el ciclo de trabajos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones a la teoría de control óptimo y a la teoría de oscilaciones durante el periodo 1956-1961.*”

PONTRYAGIN tuvo la oportunidad de presentar los resultados de su equipo en el Congreso Internacional de Matemáticos en Edimburgo en 1958, tiempo en el cual la prueba del Principio del Máximo había sido ya completada, y en el primer congreso de la IFAC<sup>56</sup> en 1960 en Moscú.

El nacimiento de la teoría de control óptimo y del Principio del Máximo se da en el contexto de la guerra fría, contexto en el cual las comunidades científicas, en particular aquellas que cultivaban las matemáticas aplicadas, no estuvieron exentas de estudiar problemas relacionados con la carrera espacial y la carrera armamentista. Sin embargo, esto no demerita el valor matemático de los resultados obtenidos en esa época, ni el valor científico que significó la ruptura conceptual de la teoría de control óptimo y el Principio del Máximo con la teoría clásica del cálculo de variaciones.

La primera formulación del Principio del Máximo de 1956 se presenta como la solución al problema de trayectorias óptimas para un sistema dinámico controlado PONTRYAGIN y sus colegas escribieron [33]:

... *Dadas las ecuaciones de movimiento*

$$\dot{x} = f^i(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r) = f^i(x, u)$$

*y dos puntos  $\xi_0$  y  $\xi_1$  en el espacio fase  $x^1, \dots, x^n$ , un control admisible  $u = (u^1, \dots, u^r)$  se tiene que escoger de forma tal que el punto fase pasa de la posición  $\xi_0$  a la posición  $\xi_1$  en un tiempo mínimo.*

... *Hemos obtenido el caso especial del siguiente principio general, el cual llamaremos el Principio del Máximo (principio que ha sido probado por nosotros en diferentes casos especiales): la función*

$$H(x, \psi, u) = \psi_\alpha f^\alpha(x, u)$$

*debe tomar un máximo con respecto a  $u$ , para  $x$  y  $\psi$  arbitrarios pero fijos, si el vector  $u$  cambia en el dominio cerrado  $\bar{\Omega}$ . Denotamos el máximo por  $M(x, \psi)$ . Si el vector  $2n$ -dimensional  $(x, \psi)$  es solución del sistema hamiltoniano*

<sup>55</sup>Esta obra fue traducida al inglés y publicado 1962 bajo el título de “*Mathematical theory of optimal processes.*”

<sup>56</sup>Federación Internacional de Control Automático.

$$\begin{aligned}\dot{x}^i &= f^i(x, u) = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i = 1, \dots, n \\ \dot{\psi}_i &= -\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \psi_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

y si el vector  $u(t)$ , continuo a trozos, satisface en cualquier tiempo la condición

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = M(x(t), \psi(t)) > 0,$$

entonces  $u(t)$  es el control óptimo y  $x(t)$  es la trayectoria óptima asociada, localmente, de las ecuaciones del movimiento.

Posteriormente, BOLTYANSKI clarificó que el Principio del Máximo es solamente una condición necesaria y proporcionó una prueba rigurosa para el caso general introduciendo las llamadas *variaciones de aguja* (variaciones que son cero en todos lados excepto por un pequeño intervalo donde pueden tomar valores arbitrarios). Por su parte GAMKRELIDZE, considerando la segunda variación, obtuvo resultados equivalentes a la condición de Legendre y probó además que, para el caso lineal, la condición del Principio del Máximo es necesaria y suficiente.

En lo que resta de esta sección se expone el Principio del Máximo y los conceptos centrales alrededor de éste. Para esto seguimos la presentación del libro de A. AGRACHEV y Y. SACHKOV [38], no sin señalar que, a nuestro entender, esta elección es justa pues aparte de develar la naturaleza geométrica del resultado presentándolo en el lenguaje moderno de la geometría diferencial, cierra, de algún modo, un ciclo genealógico en el sentido matemático, pues A. AGRACHEV defendió su tesis en 1989 en Steklov bajo la dirección de R. GAMKRELIDZE, quien hizo lo propio bajo la dirección de PONTRYAGIN.

#### 4.1. El problema de control óptimo

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y sea  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ . Un sistema de control en  $M$  es una ecuación diferencial de la forma

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad (57)$$

en la cual se supone que para cada  $u \in \mathcal{U}$  fija,  $q \mapsto f_u(q)$  es un campo vectorial diferenciable y que los mapeos

$$(q, u) \mapsto f_u(q), \quad (q, u) \mapsto \frac{\partial f_u}{\partial q}(q)$$

son continuos con  $q \in M$  y  $u \in \bar{\mathcal{U}}$ . Se denomina *controles admisibles* a los mapeos  $u : t \mapsto u(t) \in \mathcal{U}$  que son medibles y localmente acotados y la variedad  $M$  se denomina el *espacio de estados*.

Al substituir un control admisible en la ecuación (57), para cada punto  $q_0 \in M$  se obtiene el siguiente problema de Cauchy de valores a la frontera

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q(0) = q_0, \tag{58}$$

el cual tiene una solución única que denotaremos como  $t \mapsto q_u(t)$ . Con el objetivo de comparar diferentes controles admisibles en un cierto intervalo  $[0, t_1]$  se introduce el llamado *funcional de costo*

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt, \tag{59}$$

donde  $\varphi : M \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface las mismas condiciones de regularidad que  $f$ . Se tiene entonces el siguiente problema que se denomina *problema de control óptimo* (PCO) en el espacio de estados  $M$  con controles admisibles  $\mathcal{U}$ :

PCO. Minimizar el funcional  $J$  entre todos los controles admisibles  $u = u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , para los cuales la correspondiente solución  $t \mapsto q_u(t)$  al problema de Cauchy (58) satisface la condición de frontera  $q_u(t_1) = q_1$ .

El problema de *tiempo mínimo* consiste en la minimización del tiempo de movimiento de  $q_0$  a  $q_1$  por medio de controles admisibles del sistema (57), es decir,  $\min_u \{t_1 \mid q_u(t_1) = q_1\}$ , o equivalentemente  $\varphi(q, u) \equiv 1$ .

#### 4.2. Conjuntos alcanzables

Sea  $q_0 \in M$  una condición inicial fija, se definen los *conjunto alcanzables* del sistema (57) desde el punto  $q_0$ , para un tiempo  $t \geq 0$ , para un tiempo no mayor que  $t$  y para un tiempo arbitrario no-negativo como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{q_0}(t) &= \{q_u(t) \mid u \in L^\infty([0, t], \mathcal{U})\}, \\ \mathcal{A}_{q_0}^t &= \bigcup_{0 \leq \tau \leq t} \mathcal{A}_{q_0}(\tau), \\ \mathcal{A}_{q_0} &= \bigcup_{0 \leq \tau < \infty} \mathcal{A}_{q_0}(\tau), \end{aligned}$$

respectivamente.

Los problemas de control óptimo en la variedad  $M$  puede ser esencialmente reducidos al estudio de conjuntos alcanzables de un sistema auxiliar, como explicaremos ahora. Se considera primero la siguiente extensión del espacio de estados:

$$\widehat{M} = \mathbb{R} \times M,$$

con la variable de estados  $\widehat{q} = (y, q)$  y el sistema extendido



$$\frac{d\widehat{q}}{dt} = \widehat{f}_u(\widehat{q}), \quad \widehat{q} \in \widehat{M}, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (60)$$

con

$$\widehat{f}_u(\widehat{q}) = \begin{pmatrix} \varphi(q, u) \\ f_u(q) \end{pmatrix}, \quad q \in M, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Denotamos por  $t \mapsto \widehat{q}_u(t)$  la solución del sistema extendido (60) con las condiciones iniciales  $\widehat{q}_u(0) = (y(0), q(0)) = (0, q_0)$ . Se tiene entonces el siguiente resultado.

**Proposition 2.** *Sea  $t \mapsto \widehat{q}_{\tilde{u}}(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$  una trayectoria óptima con tiempo final fijo  $t_1$ . Entonces la solución correspondiente del sistema extendido (60)  $t \mapsto \widehat{q}_{\tilde{u}}(t)$  llega hasta la frontera del conjunto alcanzable de éste, es decir,*

$$\widehat{q}_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial \widehat{\mathcal{A}}_{(0, q_0)}(t_1).$$

La idea geométrica de la prueba (para detalles ver [38]) consiste en escribir las soluciones  $\widehat{q}_u(t)$  del sistema extendido por medio de las soluciones del sistema original como

$$\widehat{q}_u(t) = \begin{pmatrix} J_t(u) \\ q_u(t) \end{pmatrix},$$

con

$$J_t(u) = \int_0^t \varphi(q_u(\tau), u(\tau)) \, d\tau,$$

y en probar que el conjunto alcanzable  $\widehat{\mathcal{A}}_{(0, q_0)}(t)$  no interseca al rayo

$$\{(y, q_1) \in \widehat{M} \mid y < J_{t_1}(\tilde{u})\},$$

(ver figura 14).

Como los problemas de control óptimo se reducen al estudio de los conjuntos alcanzables la existencia de soluciones óptimas se circunscribe al estudio de la compacidad de conjuntos alcanzables como se expresa en el siguiente resultado.

**Teorema 8.** *Supongamos que el espacio de parámetros de control  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  es compacto y que existe un compacto  $K \subset M$  tal que  $f_u(q) = 0$  para  $q \notin K$  y  $u \in \mathcal{U}$ . Supongamos además que para cada  $q \in M$  el conjunto  $f_{\mathcal{U}}(q) = \{f_u(q) \mid u \in \mathcal{U}\}$  es convexo. Entonces los conjuntos alcanzables  $\mathcal{A}_{q_0}(t)$  y  $\mathcal{A}_{q_0}^t$  son compactos para toda  $q_0 \in M$  y  $t > 0$ .*

Este resultado se aplica para garantizar la existencia de soluciones a los problemas de control óptimo sobre  $M$ .

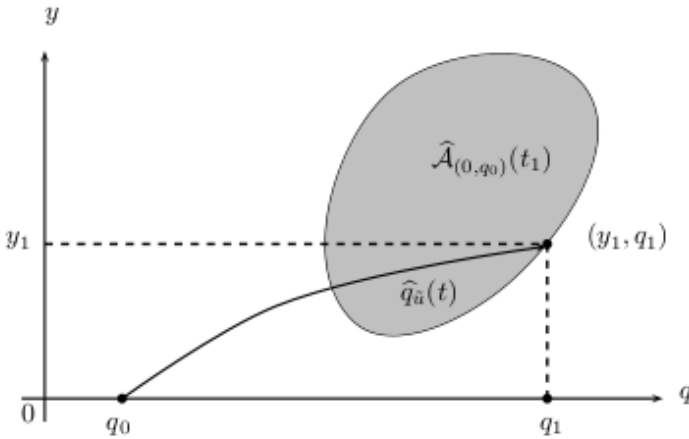


Figura 14. La trayectoria óptima  $t \mapsto \hat{q}_u(t)$ .

### 4.3. Formulación geométrica del Principio del Máximo

La formulación geométrica del Principio del Máximo descansa en la estructura simpléctica del haz cotangente  $T^*M$  del espacio de estados  $M$  y en el llamado *formalismo hamiltoniano* de la mecánica clásica. A continuación presentamos las principales definiciones y conceptos de geometría simpléctica que permiten enunciar en forma intrínseca al Principio del Máximo.

**Estructura simpléctica del haz cotangente.** El haz cotangente de  $M$ , denotado como  $T^*M$ , es un haz vectorial cuyas fibras son los espacios vectoriales duales  $(T_qM)^* = T_q^*M$ ,  $q \in M$ . Los elementos de  $T_qM$  se denominan *vectores* tangentes, en tanto que los de  $T_q^*M$  se denominan *covectores* cotangentes. La proyección canónica se define como  $\pi : T^*M \rightarrow M$ ,  $\lambda \mapsto q$  con  $\lambda \in T_q^*M$ , y su diferencial se denota por  $\pi_* : T_\lambda(T^*M) \rightarrow T_qM$ .

Sean  $\lambda \in T^*M$  y  $w \in T_\lambda(T^*M)$ . La 1-forma de Liouville  $\nu$  en el punto  $\lambda$  actúa sobre el vector  $w$  de la siguiente manera: se proyecta el vector  $w \in T_\lambda(T^*M)$  en el vector  $\pi_*w \in T_qM$  y se le hace actuar por el covector  $\lambda \in T_q^*M$ , o sea:

$$\langle \nu_\lambda, w \rangle = \langle \lambda, \pi_*w \rangle.$$

Aunque esta expresión es independiente de coordenadas, el uso de las llamadas *coordenadas canónicas*  $(p, x) = (p_1, \dots, p_n; x_1, \dots, x_n) \in T^*M$  clarifican esta definición, pues en este caso

$$\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dx_i, \quad w = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Además, como  $\pi(p, x) = x$  es lineal, la diferencial actúa como sigue:

$$\pi_* \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = 0, \quad \pi_* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto

$$\pi_* w = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y consecuentemente

$$\langle \nu_\lambda, w \rangle = \sum_{i=1}^n \beta_i p_i,$$

por lo que

$$\nu_\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dx_i.$$

La estructura simpléctica de  $T^*M$  se define como la derivada exterior de la forma de Liouville, es decir  $\omega = d\nu$ ; en coordenadas se tiene

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i$$

En la literatura de mecánica clásica esta expresión se escribe comúnmente  $\omega = dp \wedge dq$ . La 2-forma  $\omega$  es no-degenerada, es decir, la forma bi-lineal antisimétrica  $\omega_\lambda : T_\lambda(T^*M) \times T_\lambda(T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$  tiene *kernel* trivial y en la base canónica  $\{\partial x_i, \partial p_i\}$  está representada por una matriz de orden  $2n \times 2n$  diagonal a bloques con  $n$  bloques

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

en la diagonal.

**Formalismo hamiltoniano.** Un *hamiltoniano* es una función  $h \in C^\infty(T^*M)$ . Cada hamiltoniano tiene asociado un campo vectorial  $\vec{h}$  llamado *campo vectorial hamiltoniano*, definido por la regla

$$\omega_\lambda(\cdot, \vec{h}) = d_\lambda h, \quad \lambda \in T^*M.$$

Dado que la forma simpléctica  $\omega$  es no-degenerada, el campo vectorial  $\vec{h}$  existe y está únicamente determinado por  $h$ . Además en coordenadas canónicas se tiene que

$$dh = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \right),$$

por lo que

$$\vec{h} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Por lo tanto el sistema hamiltoniano de ecuaciones diferenciales ordinarias correspondiente a  $h$  se escribe como  $\dot{\lambda} = \vec{h}$ ,  $\lambda \in T^*M$ , y en coordenadas canónicas se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial h}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial h}{\partial x_i} \end{aligned}$$

con  $i = 1, \dots, n$ .

Regresemos ahora al problema de Cauchy (58) considerado en el párrafo 4.1. En este caso se define una familia de hamiltonianos parametrizada por los parámetros

$$H_u(\lambda) = \langle \lambda, f_u(q) \rangle, \quad \lambda \in T_q^*M, \quad q \in M, \quad u \in \mathcal{U},$$

es decir, cada control admisible determina un único hamiltoniano. El Principio del Máximo se enuncia entonces como sigue.

**Teorema 9.** *Sea  $\hat{u}(t)$  un control admisible y  $\hat{q}(t)$  la solución correspondiente al problema de Cauchy (58). Si  $\hat{q}(t_1) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ , entonces existe una curva  $\lambda : [0, t_1] \rightarrow T^*M$ ,  $t \mapsto \lambda_t \in T_{\hat{q}(t)}^*M$  tal que*

$$\lambda_t \neq 0 \tag{61}$$

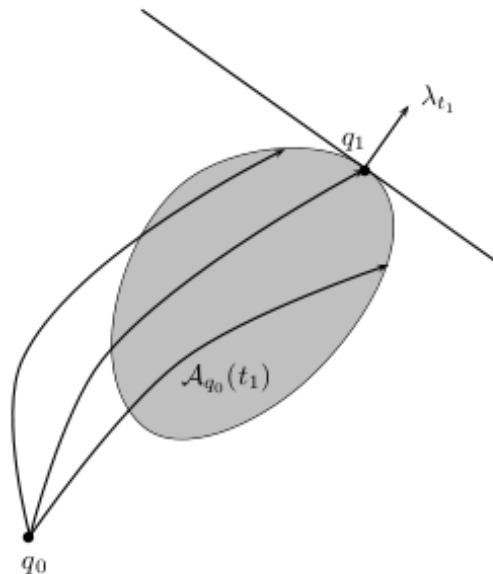
$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\hat{u}(t)}(\lambda_t) \tag{62}$$

$$H_{\hat{u}(t)}(\lambda_t) = \max_{u \in \mathcal{U}} H_u(\lambda_t) \tag{63}$$

para casi toda  $t \in [0, t_1]$ .

Si  $u(t)$  es un control admisible y  $\lambda_t$  es una función Lipschitz tal que se cumplen las condiciones (61)-(63), se dice entonces que el par  $(u(t), \lambda_t)$  satisface el Principio del Máximo, que  $\lambda_t$  es una curva extremal y que  $q(t) = \pi(\lambda_t)$  es una trayectoria extremal.

La curva de covectores  $\lambda_t$  aparece naturalmente en el estudio de trayectorias que alcanzan la frontera del conjunto alcanzable, pues si  $q_1 = \hat{q}(t_1) \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ , la idea geométrica central es tomar un covector normal al conjunto alcanzable  $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$  cerca de  $q_1$ , más precisamente, un covector normal al cono convexo tangente a  $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$  en  $q_1$ . De esta manera se tiene un *hiperplano de soporte*, es decir, un hiperplano en  $T_{q_1}^*M$  que acota a la mitad del espacio que contiene al cono. Además, el hiperplano de soporte es el kernel



**Figura 15.** Hiperplano de soporte y covector normal al conjunto alcanzable.

de un covector normal  $\lambda_{t_1} \in T_{q_1}^*M$ , como se ilustra en la figura 15. El covector  $\lambda_{t_1}$  es, en cierto sentido, un análogo a los multiplicadores de Lagrange del cálculo de variaciones.

Para el PCO formulado en el párrafo 4.1 se tiene que si  $\hat{u}$  es un control óptimo entonces  $J(\hat{u}) = \min\{J(u) \mid u \in \mathcal{U}, q_u(t_1) = q_1\}$ . En este caso los controles admisibles definen la familia de hamiltonianos

$$\mathcal{H}_u^\mu(\lambda) = \langle \lambda, f_u \rangle + \mu \varphi(q, u), \quad \lambda \in T_q^*M, \quad u \in \mathcal{U}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

y el Principio del Máximo se enuncia como sigue.

**Teorema 10.** Si  $\hat{u}(t), t \in [0, t_1]$  es el control óptimo para el PCO, entonces existe un par no trivial  $(\mu, \lambda_t) \neq 0, \mu \in \mathbb{R}, \lambda_t \in T_{\hat{q}(t)}^*M$ , tal que

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_t &= \vec{\mathcal{H}}_{\hat{u}(t)}^\mu(\lambda_t) \\ \mathcal{H}_{\hat{u}(t)}^\mu(\lambda_t) &= \max_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}_u^\mu(\lambda_t), \quad \text{para casi toda } t \in [0, t_1] \\ \mu &\leq 0. \end{aligned}$$

El parámetro constante  $\mu$  nos permite distinguir entre dos tipos de curvas extremales:

1. Si  $\mu \neq 0$ , la curva  $\lambda_t$  se denomina *extremal normal*. Además como  $(\mu, \lambda_t)$  puede ser multiplicado por cualquier número positivo, este multiplicador puede normalizarse y tomarse como  $\mu = -1$ .
2. Si  $\mu = 0$ , la curva  $\lambda_t$  se denomina *extremal anormal*.

**Observación 8.** La distinción entre curvas extremales normales y anormales fue señalada por BLISS en [24] en el contexto del cálculo de variaciones. Los extremales anormales son independientes del funcional de costo y juegan un papel central en el estudio de la llamada geometría subriemanniana (ver por ejemplo [7]).

#### 4.4. Ejemplos de aplicación del Principio del Máximo

Para finalizar esta exposición presentamos dos ejemplos ilustrativos de aplicación del Principio del Máximo, ambos contenidos en la obra original de PONTRYAGIN et al. [12]. Igual que antes, seguimos la presentación de estos ejemplos contenida en [38], e invitamos al lector a consultar estas obras para los detalles. El primer ejemplo modela el problema del frenado más eficiente de un tren aproximándose a una estación, en tanto que el segundo modela a un oscilador lineal cuyo movimiento es controlado por una fuerza externa.

**Ejemplo 4.** Se considera sistema de control

$$\ddot{x}_1 = 0, \text{ con } x_1 \in \mathbb{R} \text{ y } |u| \leq 1,$$

el cual se escribe como un sistema de control en  $M = \mathbb{R}^2$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned}$$

La variable de estado se escribe como  $x = (x_1, x_2)$  y el conjunto de controles admisibles está dado por  $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} \mid |u| \leq 1\}$ . El problema es de tiempo mínimo con condiciones  $x(0) = x_0$  y  $x(t_1) = 0$ , es decir, se busca minimizar  $t_1$ .

Dado que el conjunto de controles admisibles es acotado, el teorema 8 garantiza la existencia de trayectorias de tiempo mínimo, siempre y cuando el origen sea un estado alcanzable desde cualquier estado inicial  $x_0$ .

El haz cotangente se escribe como  $T^*M = \{\lambda = (p, x) \mid p = (p_1, p_2), x = (x_1, x_2)\}$ , y la familia de hamiltonianos parametrizada por  $\mathcal{U}$  está dada por

$$H(p, x) = p_1 x_2 + p_2 u.$$

En coordenadas las ecuaciones de Hamilton se escriben como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{p}_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 &= u, & \dot{p}_2 &= -p_1. \end{aligned}$$

El Principio del Máximo implica que si  $\hat{u}$  es el control óptimo y si  $p(t) \neq 0$  entonces  $\hat{u} = \text{signo}(p_2(t))$  y como  $\dot{p}_2 = 0$  entonces  $p_2(t) = \alpha + \beta t$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes, es decir,

$$\hat{u} = \text{signo}(\alpha + \beta t),$$

de lo cual se concluye que  $\hat{u}$  es un función discontinua constante a trozos, que toma los valores  $\pm 1$  y que no tiene más que un *punto de conmutación*.<sup>57</sup>

Para los controles  $u = \pm 1$  se tiene que

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \text{y} \quad \dot{x}_2 = \pm 1,$$

o equivalentemente

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \pm x_2,$$

por lo tanto las trayectorias extremales son parábolas de la forma

$$x_1 = \pm \frac{x_2^2}{2} + \kappa, \quad \text{con } \kappa \text{ constante.}$$

Las parábolas que llegan al origen sin un punto de conmutación satisfacen

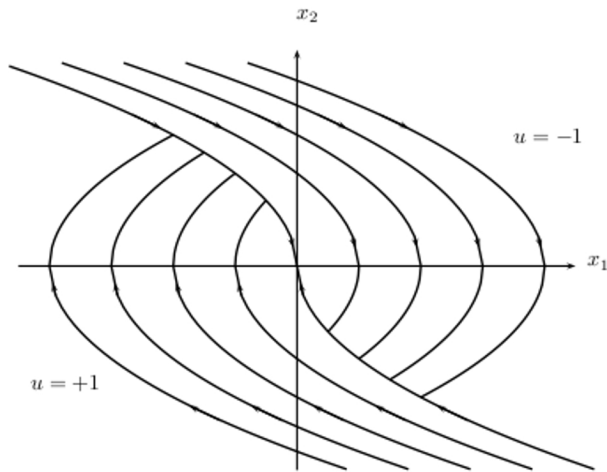
$$x_1 = +\frac{x_2^2}{2}, \quad \text{con } x_2 < 0, \text{ y } \dot{x}_2 > 0, \quad \text{o bien } x_1 = -\frac{x_2^2}{2}, \quad \text{con } x_2 > 0, \text{ y } \dot{x}_2 < 0.$$

Se puede mostrar que para cada punto en  $\mathbb{R}^2$  existe una única curva que llega al origen y que consiste de dos trozos de parábola que se concatenan en un punto de conmutación, como se ilustra en la figura 16.

**Ejemplo 5.** Se considera un oscilador lineal cuyo movimiento puede ser controlado por una fuerza externa acotada, es decir,

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 = u, \quad |u| \leq 1, x_1 \in \mathbb{R}.$$

<sup>57</sup>En inglés se usa la nomenclatura “switching point”.



**Figura 16.** Trayectorias óptimas con un punto de conmutación.

De nuevo consideramos el problema de tiempo mínimo en  $M = \mathbb{R}^2$  dado por el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u.\end{aligned}$$

Es decir, entre las soluciones  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  de este sistema, encontrar el valor mínimo de  $t_1$  tal que  $x(0) = x_0$  y  $x(t_1) = 0$ .

Como en el ejemplo anterior, la variable de estado se escribe como  $x = (x_1, x_2)$  y el conjunto de controles admisibles también está dado por  $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} \mid |u| \leq 1\}$ . Una vez más, el teorema 8 garantiza la existencia de trayectorias de tiempo mínimo siempre y cuando el origen sea un estado alcanzable desde cualquier estado inicial  $x_0$ .

Siguiendo la misma línea de argumentación que en el ejemplo anterior se tiene que la familia de hamiltonianos parametrizada por  $\mathcal{U}$  se escribe como

$$H_u(p, x) = p_1 x_2 - p_2 x_1 + p_2 u,$$

y en coordenadas las ecuaciones hamiltonianas están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & \dot{p}_1 &= p_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u, & \dot{p}_2 &= -p_1.\end{aligned}$$



El Principio del Máximo implica que si  $\hat{u}$  es el control óptimo y si  $p_2(t) \neq 0$  entonces  $\hat{u} = \text{signo}(p_2(t))$ . Además como  $\dot{p}_2 = -p_2$  entonces  $p_2(t) = \alpha \text{sen}(t + \beta)$  con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes y  $\alpha \neq 0$ , o sea

$$\hat{u} = \text{signo}(\alpha \text{sen}(t + \beta)),$$

de lo cual se concluye que  $\hat{u}$  es una función discontinua constante a trozos, que toma los valores  $\pm 1$  y que el intervalo entre dos puntos sucesivos de conmutación tiene longitud  $\pi$ , por lo que el control óptimo está parametrizado por dos números: el signo inicial  $\text{signo}(\hat{u}(0))$  y el primer punto de conmutación.

Para los controles  $u = \pm 1$  se tiene que

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 \pm 1,$$

por lo tanto las trayectorias extremales  $(x_1, x_2)$  consisten de piezas de arcos de círculos

$$(x_1 \pm 1)^2 + x_2^2 = \kappa, \text{ con } \kappa \text{ constante,}$$

que se recorren en sentido horario.

Una trayectoria que no tiene un punto de conmutación y que alcanza el origen de coordenadas debe ser uno de los dos semicírculos siguientes:

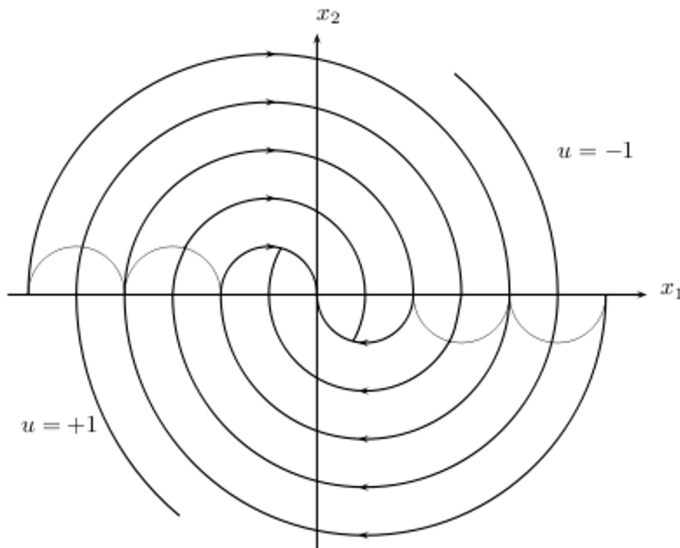
$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1, \text{ con } x_2 \leq 0, \text{ o bien } (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1, \text{ con } x_2 \geq 0.$$

Como el intervalo entre dos puntos de conmutación consecutivos es de longitud  $\pi$ , una trayectoria extremal tiene un número finito de puntos de conmutación y consiste de una concatenación de semicírculos que forman una especie de espiral. Además los puntos de conmutación están sobre los semicírculos

$$\begin{aligned} (x_1 - (2k - 1))^2 + x_2^2 &= 1, & x_2 \leq 0, & k \in \mathbb{N}, \\ (x_1 + (2k - 1))^2 + x_2^2 &= 1, & x_2 \geq 0, & k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

como se ilustra en la figura 17. Se puede mostrar que para cada estado pasa una y solamente una curva con estas características.

**Observación 9.** Dado un PCO, la descripción del lugar geométrico de las trayectorias extremales se denomina la “síntesis óptima” del problema en cuestión. Las figuras 16 y 17 ilustran las síntesis óptimas de los ejemplos presentados.



**Figura 17.** Trayectorias extremales para el oscilador lineal actuado.

## 5. Conclusiones

El Principio del Máximo establece condiciones necesarias para las trayectorias extremales de problemas de control óptimo. El resultado fue obtenido a mediados del siglo pasado por un grupo de científicos del Instituto Steklov de Matemáticas de Moscú liderado por PONTRYAGIN, y constituye un punto de llegada de una larga historia del pensamiento matemático que encuentra sus orígenes en problemas planteados desde la antigüedad y que descansa en la tradición clásica del cálculo de variaciones.

En el marco conceptual del cálculo de variaciones, cuya formalización se remonta al siglo XVII, la idea central del Principio del Máximo aparece en estado gestacional en diversos momentos. En un primer momento se pueden mencionar los trabajos de WEIERSTRASS y la introducción de su función exceso. Un segundo momento se encuentra en los trabajos de BOLZA y BLISS y casi de manera paralela en el llamado *camino real de Carathéodory* en el cálculo de variaciones. Un tercer momento se da en la segunda mitad siglo pasado, en desafortunada coincidencia histórica con un contexto de guerra fría y carrera armamentista y espacial, con la programación dinámica de BELLMAN y con más claridad con los trabajos HESTENES, ambos trabajando para la corporación RAND.

En este artículo se sostiene la tesis de que el nacimiento de la teoría de control óptimo y el Principio del Máximo representa una ruptura conceptual con el cálculo de variaciones y el nacimiento de una nueva disciplina matemática llevada a cabo por el grupo de Steklov.

Actualmente se reconoce al Principio del Máximo como una herramienta poderosa para el estudio de problemas matemáticos, no solamente de la teoría de control óptimo sino también de nuevas estructuras geométricas, por ejemplo para el estudio de curvas

rígidas y para lo que hoy se conoce como geometría subriemanniana o geometría de Carnot-Caratheodory) (ver [7]).

### Referencias

- [1] R. V. Gamkrelidze. *Discovery of the maximum principle*, J. Dyn. Control Syst. **4** (1999), no. 5, 437-451.
- [2] K.D. Elworthy, W.N. Everitt, and E.B. Lee, *Differential equations, dynamical systems, and control science: a festschrift in honor of Lawrence Markus*. Marcel Dekker Inc. NY, 1994.
- [3] H.J. Pesch and M. Plail, *The Cold War and the maximum principle of optimal control*, Documenta Mathematica, Extra Volume ISMP (2012), 331-343.
- [4] H.J. Sussmann and J.C. Willems, *300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle*, IEEE Control Systems **17** (1997), no. 3, 32-44.
- [5] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, 1972.
- [6] R. Bellman, I. Glicksberg, and O. Gross, *On the "bang-bang" control problem*, Quart. Appl. Math. **14** (1956), 11-18.
- [7] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Vol. 91 of *Mathematical surveys and monographs*, American Mathematical Society, 2002.
- [8] G.A. Bliss, *Lectures on calculus of variations*, University of Chicago Press, 1946.
- [9] I.M. Gelfand and S.V. Fomin, *Calculus of variations*, Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [10] J.L. Troutman, *Variational calculus and optimal control*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [11] M.R. Hestenes, *A general problem in the calculus of variations with applications to paths of least time*, Research Memorandum RM-100, The RAND corporation, 1700 Maint St. Santa Monica, California, 1950.
- [12] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mischenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Wiley, New York, 1962.
- [13] H.H. Goldstine, *A history of the calculus of variations from the 17th through 19th century*, Springer-Verlag, 1980.
- [14] C.G. Fraser, *The calculus of variations: A historical survey*, Chapter 12 of *A history of Analysis*, H.N. Jahnke, Editor, Volume 24 of *History of mathematics*, American Mathematical Society and London Mathematical Society, (2003), 355-383.
- [15] R. Woodhouse, *A History of the calculus of variations in the eighteenth century (Reprint of "A treatise on isoperimetrical problems and the calculus of variations", originally published in 1810)*, Vol.177, AMS Chelsea Publishing Company, 1988.

- [16] J. Stillwell, *Mathematics and its history*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, Third edition, 2010.
- [17] V. Blåsjö, *The isoperimetric problem*, Amer. Math. Monthly **112** (in The Evolution of . . . Edited by A. Shenitzer and J. Stillwell) (2005), 526-566.
- [18] C.G. Fraser, *J.L. Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations*, Archive for History of Exact Sciences **32** (1985), 151-191.
- [19] M. Nakane and C.G. Fraser, *The early history of Hamilton-Jacobi dynamics 1834-1837*, Centaurus **44** (2002), 161-227.
- [20] G.A. Bliss. *Oskar Bolza- In memoriam*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), no. 7, 478-489.
- [21] O. Bolza, *Über den "anormalen Fall" beim Lagrangeschen und Meyerschen Problem mit gemischten Bedingungen und variabeln Endpunkten*, Math. Ann. **74** (1913), 430-446.
- [22] O. Bolza, *Über Variationsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen*, Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum (1914), 1-18.
- [23] G.A. Bliss. *The problem of Bolza in the calculus of variations*. Annals of Mathematics **33** (1932), no. 2, 261-274.
- [24] G.A. Bliss, *Normality and abnormality in the calculus of variations*, Trans. of the American Math. Society **43** (1938), 365-376.
- [25] M. Georgiadu, *Constantin Carathéodory. Mathematics and politics in turbulent times*, History of mathematical sciences, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [26] C. Carathéodory, *Calculus of variations and partial differential equations*, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Third edition, 1999.
- [27] R. Thiele, *On some contributions to field theory in the calculus of variations*, Historia Mathematica **24** (1997), 281-300.
- [28] H.J. Pesch, *Carathéodory on the road to the maximum principle*, Documenta Mathematica (2012), 317-329.
- [29] R. Bellman, *Eye of the hurricane: an autobiography*, World Scientific Publishing Company, 1984.
- [30] R. Bellman, *The theory of dynamic programming*, Bull. Amer. Math. Soc. **60** (1954), 503-515.
- [31] E.N. Barron and R. Jensen, *The Pontryagin maximum principle from dynamic programming and viscosity solutions to first order partial differential equations*, Trans. of the Am. Math. Soc. **298** (1986), no. 2, 635-641.
- [32] R. V. Boltyanskii, V. G. Gamkrelidze, and L.S. Pontryagin, *Towards a theory of optimal processes*, Doklady Akademii Nauk SSSR (in Russian) **110** (1956), 7-10.
- [33] H.J. Pesch and M. Plail, *The maximum principle of optimal control: a history of ingenious ideas and missed oportunities*, Control and Cybernetics **38** (2009), no. 4A, 973-975.

- [34] V.G. Boltianskii, *The maximum principle in the theory of optimal processes*, Doklady Akademii Nauk SSSR (in Russian) **119** (1958), 1070-1073.
- [35] R.V. Gamkrelidze, *On the general theory of optimal processes*, Doklady Akademii Nauk SSSR (in Russian) **123** (1958), 223-226.
- [36] R. V. Gamkrelidze, *Processes which have an optimal speed of response for bounded phase coordinates*, Doklady Akademii Nauk SSSR (in Russian) **125** (1959), 475-478
- [37] L.S. Pontryagin, *Optimal processes II*, Usphekhi Mat. Nauk **14** (1959), 3-20.
- [38] A.A. Agrachev and Y. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, Control theory and optimization, Springer, 2004.

Recibido en abril de 2015. Aceptado para publicación en noviembre de 2016.

FELIPE MONROY PÉREZ  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS  
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-AZCAPOTZALCO  
CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO  
e-mail: fmp@correo.azc.uam.mx