Lecturas Matemáticas
Volumen **36** *(2) (2015), páginas 181-194*
ISSN 0120–1980

Sumemos esta serie

Let's sum this series

Josefina Álvarez
New Mexico State University, Estados Unidos
Stephen Locke
Florida Atlantic University, Estados Unidos

Resumen. El objeto de este artículo es encontrar, por métodos puramente analíticos, la suma de la serie $\sum_{k \geq 1} k^n c^k$, donde n toma uno de los valores $1, 2, 3, ..$ y c es un número real. Como explicamos brevemente en una última sección, esta serie tiene una larga e interesante historia dentro de la combinatoria y muchas de sus propiedades son obtenidas en ese marco. Sin embargo, la serie aparece en un ejemplo de aproximación asintótica desarrollado en la sección 8 del artículo [1], por lo cual nos interesó el estudiarla usando sólo métodos analíticos.

Key words and phrases. Convergence of series, recursive formulas, permutations, Eulerian numbers, Eulerian polynomials.

Abstract. The purpose of this article is to find, using only analytic methods, the sum of the series $\sum_{k \geq 1} k^n c^k$, where $n = 1, 2, 3, ...$ and $c \in \mathbb{R}$. As we explain briefly in a last section, this series has a long and interesting history within combinatorics and many of its properties are proved using enumerative arguments. However, the series appears in an example of asymptotic approximation presented in ([1], Section 8), thus our interest in studying it, using only analytic methods.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 11B68, 40A05, 65Q30.

1. Introducción

La serie a la que se refiere el título es

$$\sum_{k \geq 1} k^n c^k, \tag{1}$$

donde n toma uno de los valores $1, 2, 3, ...$ y c es un número real. Por supuesto, para $n = 0$, tenemos la *serie geométrica de razón* c, cuyo comportamiento es bien conocido.

Si usamos el *criterio del cociente*, también llamado *criterio de D'Alembert*, podemos ver que la serie (1) converge para todo n y para $|c| < 1$. En efecto,

$$\left|\frac{(k+1)^n c^{k+1}}{k^n c^k}\right| = \left(1+\frac{1}{k}\right)^n |c| \underset{k\to\infty}{\to} |c|.$$

El objetivo de este artículo es encontrar, por métodos exclusivamente analíticos, una fórmula explícita para la suma de la serie, como función de n y de c.

Esta serie aparece en un ejemplo de aproximación asintótica desarrollado en ([1], sección 8), pero eso no es todo, ni mucho menos. La serie (1) tiene conexiones de gran interés dentro de la combinatoria, que presentaremos brevemente en la última sección. En las referencias incluídas al final del artículo hay mucho material adicional que permitirá desarrollar aún más esas conexiones.

Nuestra exposición será informal, aunque pondremos la máxima atención en presentar nuestros cálculos de una manera detallada.

2. Una fórmula recursiva para la suma de la serie

Llamemos $S_n = S_n(c)$ a la suma que queremos encontrar. Como dijimos en la sección anterior, para $n = 0$ nuestra serie es la serie geométrica con razón c. Una de las maneras de encontrar su suma es usando el siguiente "truco":

$$cS_0 = \sum_{k\geq 1} c^{k+1} = \sum_{k\geq 2} c^k = S_0 - c,$$

de donde

$$S_0 = \frac{c}{1-c}.$$

Veamos qué pasa si hacemos lo mismo para cualquier $n \geq 1$ fijo.

$$cS_n = \sum_{k\geq 1} k^n c^{k+1} = \sum_{k\geq 2} (k-1)^n c^k,$$

de donde

$$(1-c) S_n = c + \sum_{k\geq 2} [k^n - (k-1)^n] c^k.$$

Observemos que la expresión $[k^n - (k-1)^n] c^k$ es igual a c, para $k = 1$. O sea que podemos escribir

$$(1-c) S_n = \sum_{k\geq 1} [k^n - (k-1)^n] c^k.$$

Ahora tenemos que recordar el *teorema del binomio*,

$$(k-1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^j (-1)^{n-j},$$

donde $\binom{n}{j}$ es el *coeficiente binomial*, definido como

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}. \tag{2}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
(1-c)\,S_n &= \sum_{k\geq 1} c^k \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} k^j\,(-1)^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j}\,(-1)^{n-j+1} \sum_{k\geq 1} k^j c^k \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j}\,(-1)^{n-j+1}\, S_j \text{ para cada } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que los términos de la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ satisfacen la fórmula recursiva

$$S_n = \frac{1}{1-c} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j}\,(-1)^{n-j+1}\, S_j \text{ para cada } n \geq 1, \tag{3}$$

con

$$S_0 = \frac{c}{1-c}.$$

En ([9], capítulo 2) se presenta la noción de *fórmula recursiva*, con muchos ejemplos.

Volviendo a (3), por supuesto podemos calcular los primeros términos "a mano", sin dificultad.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{S_0}{1-c} = \frac{c}{(1-c)^2}, \\
S_2 &= \frac{-S_0 + 2S_1}{1-c} = \frac{c^2+c}{(1-c)^3}.
\end{aligned}$$

Un sistema algebraico computacional nos dará muchos más términos con poco esfuerzo. He aquí los que hemos obtenido con *Scientific WorkPlace*:

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{c^3+4c^2+c}{(1-c)^4}, \\
S_4 &= \frac{c^4+11c^3+11c^2+c}{(1-c)^5}, \\
S_5 &= \frac{c^5+26c^4+66c^3+26c^2+c}{(1-c)^6}.
\end{aligned}$$

Ya estos cinco términos parecen decirnos la forma que debería de tener $S_n(c)$. En efecto, conjeturamos lo siguiente:

$$S_n(c) = \frac{P_n(c)}{(1-c)^{n+1}}, \tag{4}$$

donde $P_n(c)$ es un polinomio de grado n tal que

$$\begin{aligned} P_n(0) &= 0, \\ P_n'(0) &= 1, \\ P_n^{(n)}(0) &= n!. \end{aligned}$$

Además, los coeficientes de $c, c^2, c^3, ..., c^n$ son todos positivos y muestran una simetría similar a la que tienen los coeficientes binomiales,

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j} \text{ para } 0 \leq j \leq n. \tag{5}$$

Por cierto, esta propiedad de los coeficientes binomiales se puede verificar directamente usando la definición (2).

Sabemos que nuestra conjetura es cierta al menos para $1 \leq n \leq 5$. Veamos cuánto podemos probar de ella, usando la fórmula recursiva (3).

Razonando por inducción, fijamos $n \geq 5$ y suponemos que la fórmula (4) es cierta para $1 \leq j < n$. De acuerdo con (3),

$$(1-c)^{n+1} S_n = (-1)^{n+1} c(1-c)^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \tbinom{n}{j} (-1)^{n-j+1} (1-c)^{n-j-1} P_j,$$

de donde es claro que $(1-c)^{n+1} S_n$ es un polinomio de grado n, $P_n(c)$, que se anula cuando $c = 0$. O sea que podemos escribir

$$P_n(c) = (-1)^{n+1} c(1-c)^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \tbinom{n}{j} (-1)^{n-j+1} (1-c)^{n-j-1} P_j, \tag{6}$$

de donde,

$$\begin{aligned} P_n'(c) &= (-1)^{n+1}(1-c)^{n-1} + (-1)^n c(n-1)(1-c)^{n-2} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \tbinom{n}{j} (-1)^{n-j} (n-j-1)(1-c)^{n-j-2} P_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \tbinom{n}{j} (-1)^{n-j+1} (1-c)^{n-j-1} P_j'. \end{aligned}$$

Usando la hipótesis inductiva $P_j(0) = 0$ y $P'_j(0) = 1$ para $1 \leq j < n$,

$$\begin{aligned} P'_n(0) &= (-1)^{n+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^{n-j+1} \\ &= (-1)^{n+1} \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^j \right] = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^j . \end{aligned}$$

Observemos que

$$0 = (1-1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^j + (-1)^n ,$$

de donde

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^j = (-1)^{n+1} .$$

Es decir, $P'_n(0) = 1$.

Para calcular $P_n^{(n)}(0)$, basta que consideremos en (6) los términos de grado n, de los que hay sólo uno, que aparece en $(-1)^{n+1} c (1-c)^{n-1}$.

$$(-1)^{n+1} c (1-c)^{n-1} = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j c^{j+1},$$

o sea,

$$P_n^{(n)}(0) = \left[(-1)^{n+1} c (1-c)^{n-1} \right]^{(n)} \Big|_{c=0} = (-1)^{2n} n! = n!.$$

Para completar la prueba de nuestra conjetura, nos falta por ver que los coeficientes son positivos y tienen una cierta simetría. En principio, si escribimos

$$\begin{aligned} P_n(c) &= \sum_{l=1}^{n} t_{n,l} c^l, \\ P_j(c) &= \sum_{l=1}^{j} t_{j,l} c^l \text{ para } 1 \leq j \leq n-1 \end{aligned}$$

y reemplazamos estas expresiones en (6), podríamos desarrollar los binomios, terminando por igualar los términos del mismo grado. Así, deberíamos poder obtener una fórmula recursiva a nivel de los coeficientes. Desafortunadamente, los cálculos que acabamos de delinear parecen llevarnos a expresiones de una complicación prohibitiva y en realidad innecesaria. Hay un camino mucho más sencillo para llegar a los coeficientes $\{t_{j,l}\}_{j,l}$, como veremos en la siguiente sección.

3. Una fórmula recursiva para los coeficientes de P_n

Comenzamos por observar qué pasa si aplicamos el operador diferencial $\left(c\frac{d}{dc}\right)$ a la serie $S_n(c) = \sum_{k\geq 1} k^n c^k$. Como podemos intercambiar el operador con la suma, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(c\frac{d}{dc}\right) S_n(c) &= \left(c\frac{d}{dc}\right) \sum_{k\geq 1} k^n c^k = \sum_{k\geq 1} k^{n+1} c^k \\ &= S_{n+1}(c).\end{aligned}$$

Escribiendo esta expresión en términos de los polinomios $P_n(c) = \sum_{j=1}^{n} t_{n,j} c^j$,

$$\begin{aligned}(1-c)^{-n-2} \sum_{j=1}^{n+1} t_{n+1,j} c^j &= \left(c\frac{d}{dc}\right)\left[(1-c)^{-n-1} \sum_{j=1}^{n} t_{n,j} c^j\right] \\ &= c(n+1)(1-c)^{-n-2} \sum_{j=1}^{n} t_{n,j} c^j \\ &\quad + (1-c)^{-n-1} \sum_{j=1}^{n} j t_{n,j} c^j.\end{aligned}$$

Si cancelamos los factores comunes, llegamos a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} t_{n+1,j} c^j &= c(n+1) \sum_{j=1}^{n} t_{n,j} c^j + (1-c) \sum_{j=1}^{n} j t_{n,j} c^j \\ &= c(n+1) \sum_{j=1}^{n} t_{n,j} c^j + \sum_{j=1}^{n} j t_{n,j} c^j - \sum_{j=1}^{n} j t_{n,j} c^{j+1} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} (n+1) t_{n,j-1} c^j + \sum_{j=1}^{n} j t_{n,j} c^j - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) t_{n,j-1} c^j \\ &= t_{n,1} c + \sum_{j=2}^{n} \left[(n-j+2) t_{n,j-1} + j t_{n,j}\right] c^j + t_{n,n} c^{n+1}.\end{aligned}$$

Ahora sólo nos queda igualar los coeficientes de los términos del mismo grado. Así obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned}t_{n+1,1} &= t_{n,1}, \\ t_{n+1,j} &= (n-j+2) t_{n,j-1} + j t_{n,j} \text{ para } 2 \leq j \leq n, \\ t_{n+1,n+1} &= t_{n,n}.\end{aligned} \tag{7}$$

De acuerdo con lo que hemos probado en la sección anterior, sabemos que

$$P'_n(0) = t_{n,1} = 1 = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!} = t_{n,n} \text{ para todo } n \geq 1. \tag{8}$$

También sabemos que los coeficientes de $c, c^2, ..., c^n$ son positivos y cumplen una propiedad de simetría para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Supongamos que hemos probado estas dos propiedades para un cierto n y para todo $1 \leq j \leq n$. Queremos probarlas para $n+1$ y para $1 \leq j \leq n+1$. En realidad, de acuerdo con (8), es suficiente probarlas cuando $2 \leq j \leq n$.

De la fórmula recursiva (7), es claro que $t_{n+1,j} > 0$ para $2 \leq j \leq n$. En cuanto a la propiedad de simetría, podemos enunciarla como

$$t_{n,j} = t_{n,n-j+1} \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y } 1 \leq j \leq n. \tag{9}$$

Entonces, usando el principio de inducción, lo que tenemos que probar es que

$$t_{n+1,j} = t_{n+1,n+1-j+1} \text{ para } 2 \leq j \leq n.$$

Esto lo haremos usando (7) y la hipótesis inductiva.

$$\begin{aligned} t_{n+1,n+1-j+1} &= t_{n+1,n-j+2} \\ &= (n-n+j-2+2)\, t_{n,n-j+1} + (n-j+2)\, t_{n,n-j+2} \\ &= j t_{n,j} + (n-j+2)\, t_{n,j-1} \\ &= t_{n+1,j}. \end{aligned}$$

Así completamos la prueba de nuestra conjetura.

Observemos que la propiedad de simetría (9) es equivalente a la siguiente igualdad:

$$c^{n+1} P_n\left(\frac{1}{c}\right) = P_n(c). \tag{10}$$

En efecto,

$$c^{n+1} P_n\left(\frac{1}{c}\right) = \sum_{j=1}^{n} t_{n,j} c^{n-j+1}.$$

Usando el cambio de índice $l = n - j + 1$, podemos escribir,

$$c^{n+1} P_n\left(\frac{1}{c}\right) = \sum_{l=1}^{n} t_{n,n-l+1} c^{l}.$$

Es decir que (10) se cumple si y sólo si $t_{n,j} = t_{n,n-j+1}$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Esta observación parece sugerir una manera diferente de probar la simetría de los coeficientes, a partir de la fórmula recursiva (6). El problema de este enfoque es que, como podemos comprobar de inmediato, cada uno de los términos en (6), por separado, no cumple (10). Así, es necesario "meterse" en la fórmula de cada polinomio P_j, lo cual vuelve a producir muchas complicaciones.

Aunque la conjetura que hemos probado nos permite decir bastante sobre la suma $S_n(c)$, aún no tenemos una fórmula explícita. El hallarla es el propósito de la siguiente sección.

4. Una fórmula explícita para la suma $S_n(c)$

Sabemos que el coeficiente $t_{n,j}$ del polinomio $P_n(c)$ está dado por

$$t_{n,j} = \frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dc}\right)^j P_n(c)\bigg|_{c=0}. \tag{11}$$

Así,

$$\left(\frac{d}{dc}\right)^j P_n(c) = \left(\frac{d}{dc}\right)^j \left[(1-c)^{n+1}\sum_{k\geq 1} k^n c^k\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^{j-i}(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-j+i+2)\,(1-c)^{n+1-j+i}$$

$$\times \sum_{k\geq 1} k^n k\,(k-1)\ldots(k-i+1)\,c^{k-i}.$$

Por lo tanto, usando (11), tendremos

$$\begin{aligned} j!t_{n,j} &= \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^{j-i}(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-j+i+2)\,i^n i! \\ &= \sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\frac{j!}{i!\,(j-i)!}\frac{(n+1)!}{(n+1-j+i)!}i^n i!. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} t_{n,j} &= \sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\frac{(n+1)!}{(j-i)!\,(n+1-j+i)!}i^n \\ &= \sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}\binom{n+1}{i}(j-i)^n. \end{aligned} \tag{12}$$

A partir de (12), obtenemos entonces

$$P_n(c) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{n+1}{i}(j-i)^n\right)c^j. \tag{13}$$

Reemplazando (13) en (4), finalmente tenemos que la suma de la serie (1) es

$$\sum_{k\geq 1} k^n c^k = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{n+1}{i}(j-i)^n\right)c^j}{(1-c)^{n+1}} \text{ para } n\geq 1,\ |c|<1. \tag{14}$$

Podemos comprobar que de esta fórmula resultan las expresiones obtenidas en la sección 2, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Cumplimos así con el propósito expresado en la introducción, que fue el encontrar una fórmula explícita para la suma $S_n(c)$ de la serie, por métodos puramente analíticos.

Aquí podríamos poner el punto final a nuestra exposición. Sin embargo, esto no haría justicia a la serie (1) que, como decimos en la introducción, tiene una presencia muy importante en la combinatoria. Por ello agregamos, a modo de apéndice, una última sección en la que presentamos, de manera sucinta, varios conceptos combinatorios, manteniendo como tema central sus vinculaciones a (1).

5. Donde miramos a la serie desde un punto de vista combinatorio

Como ya dijimos, nuestro interés inicial en la serie proviene de su aparición en un ejemplo de aproximación asintótica desarrollado en la sección 8 de [1]. En ese contexto, fue suficiente el saber que la serie converge. Sin embargo, nos pareció interesante el estudiar la serie en detalle, siguiendo un camino analítico y es eso lo que hemos hecho en las secciones anteriores. Ahora veremos que la serie juega un papel de gran importancia en una historia larga y distinguida.

En efecto, en 1755, el gran matemático Leonhard Euler (1707-1783) incluyó una lista de polinomios en su libro [4]. En [19] se puede ver un facsímil de la página con los polinomios.

De acuerdo con [14], Euler en realidad introdujo estos polinomios en una presentación que hizo en 1749, en la Real Academia de Ciencias de Prusia (*Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin)*. En esa ocasión, Euler definió los polinomios en la forma

$$\begin{aligned}
t + t^2 + t^3 + ... &= \frac{t}{1-t},\\
t + 2t^2 + 3t^3 + ... &= \frac{t}{(1-t)^2},\\
t + 2^2t^2 + 3^2t^3 + ... &= \frac{t(1+t)}{(1-t)^3},\\
t + 2^3t^2 + 3^3t^3 + ... &= \frac{t\left(1+4t+t^2\right)}{(1-t)^4},
\end{aligned} \tag{15}$$

o, en notación moderna

$$\sum_{i\geq 1} i^n t^i = \frac{tA_n(t)}{(1-t)^{n+1}},$$

para cada $n = 1, 2, ...$

El polinomio $A_n(t)$, de grado $n-1$, se llama *polinomio euleriano* ([14], [6], [10]), y sus coeficientes $A_{n,i}(t)$, para $0 \leq i \leq n-1$, se llaman *números eulerianos* ([19], [6]).

Euler definió esos polinomios porque estaba interesado en calcular la llamada *función eta de Dirichlet* [18],

$$\eta(s) = -\sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^i}{i^s}, \tag{16}$$

para $s = -1, -2, -3, ...$ Aunque hoy su razonamiento no sería considerado riguroso, aún se lo ve como un paso fundamental hacia el trabajo hecho por el matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) en la teoría de la llamada *función zeta de Riemann* [21]. Observemos que, formalmente, la serie en (16) es igual a $S_{|s|}(-1)$ cuando $s = -1, -2, -3, ...$

Los polinomios que hemos indicado con P_n están relacionados con los polinomios eulerianos A_n en la siguiente forma:

$$P_n(t) = tA_n(t).$$

Es decir, que los coeficientes $t_{n,i}$ de los polinomios P_n y los números eulerianos $A_{n,i}$ satisfacen

$$t_{n,i+1} = A_{n,i} \text{ para } n \geq 1 \text{ y } 0 \leq i \leq n-1,$$

por lo cual todo lo que decimos a continuación sobre los números eulerianos, se traslada inmediatamente a los coeficientes $t_{n,i}$.

Considerando que los polinomios P_n se nos han aparecido en un contexto puramente analítico, es quizá sorprendente la interpretación que los números eulerianos tienen en la combinatoria.

En efecto, si se consideran todas las permutaciones de los números en el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ para $n \geq 1$ fijo, resulta que el coeficiente i-ésimo del polinomio A_n es el número de permutaciones que tienen i *ascendentes*, es decir, i posiciones donde el número es menor que el que ocupa la posición siguiente, para $0 \leq i \leq n-1$ ([15], capítulo 1; [8], págs. 267-272). Por ejemplo, cuando $n = 3$, hay una permutación de los números $\{1, 2, 3\}$ sin ningún ascendente,

$$\{3, 2, 1\},$$

hay cuatro permutaciones con un ascendente,

$$\{1, 3, 2\}, \{2, 3, 1\}, \{2, 1, 3\}, \{3, 1, 2\},$$

y hay una permutación con dos ascendentes,

$$\{1,2,3\}.$$

Estos valores coinciden, respectivamente, con $A_{3,0}$, $A_{3,1}$ y $A_{3,2}$, como lo muestra (15).

A partir de esta caracterización, se pueden justificar fácilmente varias de las propiedades que tienen los polinomios P_n, propiedades que ya hemos probado usando métodos analíticos.

Por ejemplo, es claro que sus coeficientes deben de ser positivos. Además, $t_{n,n} = t_{n,1} = 1$ para todo $n \geq 1$, porque hay una sola permutación de n números con $n-1$ ascendentes y hay una sola permutación de n números sin ningún ascendente.

La simetría $t_{n,i} = t_{n,n-i+1}$, o en términos de los números eulerianos,

$$A_{n,i} = A_{n,n-i-1}, \tag{17}$$

se debe a la siguiente propiedad de las permutaciones:

Si una permutación $\{p_1,...,p_n\}$ de los números $\{1,...,n\}$ tiene i ascendentes, eso implica que deben de haber $n-i-1$ posiciones donde el número es menor que el número que ocupa la siguiente posición. Es decir, esa permutación tiene $n-i-1$ *descendentes*. Pero entonces, la permutación con los números escritos en el orden contrario, $\{p_n,...,p_1\}$, tendrá $n-i-1$ ascendentes. Finalmente, como para cada permutación $\{p_1,...,p_n\}$ hay exactamente una permutación $\{p_n,...,p_1\}$, el número de permutaciones con i ascendentes tiene que ser igual al número de permutaciones con $n-i-1$ ascendentes. Es decir, llegamos a (17). Una consecuencia de este razonamiento es que los números eulerianos se pueden definir tanto en términos de ascendentes como en términos de descendentes.

Otro concepto de la combinatoria que aparece en relación a la serie (1), es la llamada *función generatriz*, o *serie generatriz*, de una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ ([15], capítulo 4; [20]; [5], capítulo 10). Esta función es una serie formal de potencias

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

cuyos coeficientes son los términos de la sucesión. Observemos que en esta definición la serie no tiene que converger. Por ello, es más correcto referirse a series que a funciones, aunque éste último nombre es el más aceptado. El caso en que la serie converge y más aún, cuando su suma tiene una forma explícita, es de especial interés [9].

Nuestra serie $\sum_{k\geq 1} k^n c^k$ es la función generatriz de la sucesión $\{k^n\}_{k\geq 1}$, para cada $n \geq 1$. Cuando $|c| \geq 1$, esta función generatriz es una serie formal. Para $|c| < 1$, la suma (14) de la serie, da la función en forma explícita.

De acuerdo al matemático Herbert Wilf (1931-2012), "una función generatriz es una cuerda de la ropa en la que tendemos una sucesión para exhibirla" ([5], pág. 748).

El matemático ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) introdujo el concepto de función generatriz en 1730 para resolver la ecuación recursiva lineal general ([11]). En [11] y [9] se pueden ver varios ejemplos, así como también el desarrollo de la teoría general.

Ya hemos mencionado que la propiedad (17) es similar a la propiedad (5) que tienen los coeficientes binomiales. Además de que estas dos familias de números aparecen juntas en varias de las fórmulas que hemos obtenido, hay muchos otros puntos de afinidad entre ellas. Por ejemplo, el *triángulo de Pascal* es una manera de mostrar los coeficientes binomiales, mientras que el llamado *triángulo de Euler* permite mostrar los números eulerianos.

n									
0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		3		3		1	
4	1		4		6		4		1

Triángulo de Pascal

n									
1					1				
2				1		1			
3			1		4		1		
4		1		11		11		1	
5	1		26		66		26		1

Triángulo de Euler

Puesto que los coeficientes binomiales aparecen en el desarrollo

$$(1+t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i,$$

poniendo $t = 1$, resulta

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}. \tag{18}$$

Es decir que la suma de los números en la n-ésima fila del triángulo de Pascal, es igual a 2^n. Podemos verificar la validez de (18) con las primeras filas del triángulo de Pascal.

Por otra parte, la suma de los números en la n-ésima fila del triángulo de Euler verifica

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i} = n!, \tag{19}$$

porque esa suma da el número total de permutaciones de los números $\{1, ..., n\}$ para $n \geq 1$ fijo, que es $n!$. En este caso podemos verificar la validez de (19) con las primeras filas del triángulo de Euler. En términos de los coeficientes $t_{n,i}$, (19) se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} t_{n,i} = n!.$$

En las referencias ya mencionadas, se pueden ver otras propiedades que relacionan los coeficientes binomiales y los números eulerianos. Quizá debido a estas vinculaciones, los números eulerianos $A_{n,i}$ a veces se indican como $\left\langle {n \atop i} \right\rangle$.

Hay muchísimas otras propiedades y conexiones, incluso con la geometría algebraica [10], que muestran cuán rica es la estructura de los polinomios eulerianos y de sus coeficientes, los números eulerianos. Como no es nuestra intención desarrollar este tema, aquí terminamos mencionando varias referencias ([2], [3], [7], [16]), que completan muy bien la presentación.

Creemos que los comentarios que hemos hecho en esta última sección muestran que, en efecto, la serie que hemos considerado forma parte de una historia fascinante. Y ahora sí, ponemos el punto final.

Reconocimientos

Los datos biográficos que aparecen sin referencia, han sido tomados de [12]. Agradecemos al anónimo revisor sus comentarios y sugerencias.

Referencias

[1] J. Álvarez, *Hablemos De Series Divergentes*, Materials Matemàtics **2014**(5), http://www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2014/v2014n05.pdf.
[2] M. Bona, *Combinatorics Of Permutations*, Second Edition , Taylor & Francis 2012.
[3] L. Comtet, *Advanced Combinatorics: The Art Of Finite And Infinite Expansions*, Riedel, 1974.
[4] L. Euler, *Fundamentos Del Cálculo Diferencial Con Aplicaciones Al Análisis Finito Y A Las Series (Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Usu In Analysi Finitorum Ac Doctrina Serierum)*, The Euler Archive, http://eulerarchive.maa.org/pages/E212.html.
[5] P. Fernández Gallardo, *Notas De Curso: Matemática Discreta (2011-2012)*, http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/cap10-fgs1.pdf.
[6] D. Foata, *Eulerian Polynomials: From Euler's Time To The Present*, The Legacy Of Alladi Ramakrishnan In The Mathematical Sciences, Springer Science+Business Media, 2010, 253-273, http://www-irma.u-strasbg.fr/~foata/paper/pub117EulerUlam.pdf.
[7] D. Foata & M.-P. Schützenberger, *Theorie Geométrique Des Polynômes Eulériens*, Lecture Notes In Mathematics **138**, Springer, 1970, http://www.emis.de/journals/SLC/books/foaschuetz.pdf.
[8] R.L. Graham, D. Knuth & O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation For Computer Science*, Second Edition, Addison-Wesley, 1994.
[9] J.L. Gross, *Course Material*, http://www.cs.columbia.edu/~cs4205/course material.html.
[10] F. Hirzebruch, *Eulerian Polynomials*, Münster Journal Of Mathematics **1** (2008), 9-14, http://wwwmath.uni-muenster.de/42/fileadmin/Einrichtungen/mjm/vol_1/mjm_vol_1_02.pdf.
[11] D. Knuth, *The Art Of Computer Programming, Volume I: Fundamental Algorithms* Third Edition, Addison-Wesley, 1997.
[12] J. O'Connor & E.F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*, Retrieved November, 2015, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk.

[13] OEIS Foundation Inc., *Eulerian Numbers, Triangle of*, The Online Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS), http://oeis.org/wiki/Eulerian_numbers,_triangle_of.
[14] OEIS Foundation Inc., *Eulerian Polynomials*, The Online Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS), http://oeis.org/wiki/Eulerian_polynomials.
[15] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume I, Second Edition*, version del 11 de julio del 2011, http://math.mit.edu/~rstan/ec/ec1.pdf.
[16] M. Wachs, *Eulerian Polynomials And Beyond*, Access date December 2015, https://www.math.ias.edu/files/wam/mwachs.pdf.
[17] Wikipedia contributors, *Binomial coefficient*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient.
[18] Wikipedia contributors, *Dirichlet Eta Function*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_eta_function.
[19] Wikipedia contributors, *Eulerian Number*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_number.
[20] Wikipedia contributors, *Generating Function*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Generating_Function.
[21] Wikipedia contributors, *Riemann Zeta Function*, Wikipedia, The Free Encyclopedia,, http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function.
[22] H. Wilf, *Generatingfunctionology, Second Edition*, A. K. Peters 2006, http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html.

Recibido en marzo de 2015. Aceptado para publicación en noviembre de 2015

Josefina Álvarez
Departamento de Matemática
New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico, EEUU
e-mail: jalvarez@nmsu.edu
Stephen Locke
Departamento de Matemática
Boca Raton, Florida, EEUU
e-mail: lockes@fau.edu