Lecturas Matemáticas
Volumen **36** *(2) (2015), páginas 123-134*
ISSN 0120–1980

Teoremas de cubrimiento y promedios

Covering theorems and averages

Martha Guzmán-Partida
Universidad de Sonora, México

Resumen. Se presentarán versiones de teoremas de cubrimiento de Vitali y Besicovitch y se mostrará cómo pueden ser utilizados para obtener continuidad de promedios maximales y diferenciación de integrales.

Key words and phrases. Maximal operators, differentiation of integrals.

Abstract. We survey some versions of Vitali and Besicovitch covering theorems and we show how these versions can be used to obtain continuity properties of maximal average operators and differentiation of integrals.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 42B25, 46G05

1. Introducción

El objetivo de este artículo expositorio es presentar algunos teoremas de cubrimiento en el espacio euclideano que nos sean útiles para estudiar propiedades de diferenciabilidad de funciones. De manera particular, nos interesa extender un resultado clásico del cálculo en una variable, a saber, el *primer teorema fundamental del cálculo* que afirma que la integral indefinida de Riemann de una función continua f en un intervalo $[a,b]$ es diferenciable en $[a,b]$ y su derivada en un punto es el valor de f en dicho punto. La prueba de este resultado es en realidad muy sencilla, sin embargo, si relajamos la hipótesis de continuidad de f por integrabilidad en el sentido de Lebesgue podemos aun demostrar diferenciabilidad de la integral indefinida pero ahora para casi todo punto de $[a,b]$, es decir, en todo $[a,b]$ excepto por un subconjunto de medida cero. Este resultado, conocido como *teorema de diferenciación de Lebesgue* puede ser demostrado con la ayuda de un teorema de cubrimiento conocido como *teorema de Vitali*, del cual hablaremos extensamente más adelante. En vez de trabajar en el espacio euclideano unidimensional, nos moveremos en $\mathbb{R}^n$ ya que dicho resultado de Lebesgue sigue siendo válido en este contexto.

En términos muy generales, la función de los teoremas de cubrimiento al abordar estos problemas de diferenciabilidad, es lograr "cubrir" o "casi cubrir" un conjunto relativamente arbitrario del espacio euclideano por familias a lo sumo numerables de cubos o de bolas, o incluso, conjuntos más generales. Estas familias pueden ser ajenas por parejas, o bien, pueden presentar otra restricción que guarda cierta relación con el problema que se desea resolver. Como veremos, el análisis de dichas propiedades de diferenciación de integrales podrá realizarse de manera más efectiva a través del estudio de cierto tipo de funciones maximales, concretamente, a través del análisis de propiedades de continuidad del operador que estas funciones maximales inducen.

Presentaremos dos versiones del *teorema de cubrimiento de Vitali* que utilizaremos para demostrar algunas propiedades de diferenciabilidad de funciones. También abordaremos el *teorema de cubrimiento de Besicovitch* que emplearemos para demostrar algunas propiedades de continuidad de una generalización del llamado *operador maximal de Hardy-Littlewood*. Finalmente, concluiremos examinando un operador maximal "rectangular" que rompe con los esquemas clásicos del caso radial que se había venido estudiando previamente.

Aunque existen contextos más generales para los teoremas de cubrimiento que aquí presentamos (ver, por ejemplo, la excelente monografía [9]), nos restringimos a los casos más sencillos con el objeto de hacer fluida la lectura de este artículo. También es pertinente agregar que existen otros enfoques que pueden utilizarse para abordar los problemas de diferenciación que aquí presentamos. Tal es el caso de la llamada *descomposición de Calderón-Zygmund*, desarrollada por ambos autores en los años 50 del siglo pasado ([3]) y que es una de las herramientas más poderosas en el estudio de funciones maximales e integrales singulares. Para mayor información sobre esta descomposición y aplicaciones pueden consultarse los libros [17] y [7].

La notación que utilizaremos en este artículo es estándar, sin embargo, cuando sea estrictamente necesario y a riesgo de ser redundante la referiremos con toda claridad. Será también común denotar por la letra C a una constante positiva que podría estar cambiando renglón tras renglón.

2. Teoremas de cubrimiento de Vitali

El teorema de cubrimiento más clásico en el estudio de la diferenciación es el de G. Vitali ([19]) pues ha sido la herramienta tradicional utilizada para obtener el teorema de diferenciación de Lebesgue. La presentación que damos aquí se reduce a un par de versiones, que por cierto, no fueron las originales demostradas por G. Vitali.

Antes de enunciar la primera versión de este teorema de cubrimiento, introduciremos la siguiente notación: si B es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ con centro x_0

y radio r y ρ es cualquier número positivo, el conjunto ρB denotará la bola abierta con centro x_0 y radio ρr; el radio de una bola B será denotado por rad$B$. Si A es un subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}^n$, $|A|$ denotará la medida de Lebesgue de A.

Desarrollaremos la prueba de S. Banach de este teorema, la cual aparece en la mayor parte de los textos de teoría de la medida y puede ser consultada en el estupendo libro de F. Jones [11], p. 448.

Teorema 1. *Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Supóngase que $\mathcal{F}$ es una colección de bolas abiertas con centro en puntos de E, de modo que cada punto de E es el centro de alguna bola en $\mathcal{F}$. Entonces existe una colección a lo sumo numerable de bolas de $\mathcal{F}$, digamos, $\{B_i\}_i$ tales que:*

1. $\{B_i\}_i$ *es ajena por pares.*
2. $E \subset \bigcup_i 3B_i$.

Demostración. Si el conjunto $\{\text{rad}B : B \in \mathcal{F}\}$ no está acotado superiormente, hemos terminado porque E es acotado y podemos elegir $B \in F$ con radio suficientemente grande tal que $B \supset E$.

Si $\{\text{rad}B : B \in \mathcal{F}\}$ es acotado superiormente, procederemos inductivamente del modo siguiente:

Escojamos cualquier bola en $\mathcal{F}$ y llamémosla B_1. Supongamos que hemos elegido las bolas $B_1, ..., B_k$ con $k \geq 1$.

Sea

$$s_{k+1} = \sup\left\{\text{rad}B : B \in \mathcal{F},\, B \cap \bigcup_{j=1}^{k} B_j = \emptyset\right\}.$$

Si no existen bolas con tal propiedad el proceso de selección termina con B_k; en caso contrario, escogemos $B_{k+1} \in \mathcal{F}$ tal que

$$\frac{1}{2}s_{k+1} < \text{rad}B_{k+1} \text{ y } B_{k+1} \cap \bigcup_{j=1}^{k} B_j = \emptyset.$$

Por construcción, la colección de bolas $\{B_k\}_k$ es ajena por pares.

Ahora, sea $x \in E$ y sea $B \in \mathcal{F}$ una bola con centro x y radio r. Necesariamente existe k tal que $B \cap B_{k+1} \neq \emptyset$, ya que de no ocurrir así tendríamos que $B \cap B_{k+1} = \emptyset$ para cada k, y por tanto la selección de bolas nunca termina, esto es, $\{B_k\}_k$ es una colección infinita numerable; además $r \leq s_{k+1}$, $k \geq 1$.

Notemos también que como

$$\text{rad}B_{k+1} > \frac{1}{2}s_{k+1} \geq \frac{1}{2}r$$

tendremos

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k+1}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} |B_{k+1}| = \infty,$$

lo cual es imposible ya que $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k+1}$ es un conjunto acotado.

Si $k_0 = \text{mín}\{k \geq 1 : B \cap B_{k+1} \neq \emptyset\}$, tendremos que

$$B \cap \bigcup_{j=1}^{k_0} B_j = \emptyset$$

y así

$$r \leq s_{k_0+1} < 2\text{rad}B_{k_0+1}.$$

Si z_0 es el centro de B_{k_0+1}, tomando cualquier $y_0 \in B \cap B_{k_0+1}$ tendremos

$$|x - z_0| \leq |x - y_0| + |y_0 - z_0| < r + \text{rad}B_{k_0+1} < 3\text{rad}B_{k_0+1},$$

es decir, $x \in 3B_{k_0+1}$. □

A continuación, desarrollaremos algunas aplicaciones del teorema anterior al problema sobre diferenciación de integrales que nos interesa abordar. Concretamente, nuestra intención es examinar el comportamiento de los promedios

$$\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(y)\,dy \tag{1}$$

cuando $r \to 0$; aquí, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, esto es, f es una función Lebesgue integrable en compactos de $\mathbb{R}^n$ y $B_r(x)$ denota la bola abierta con centro x y radio r. Para efectuar el análisis del comportamiento de los promedios (1) resulta muy conveniente el estudio de la *función maximal de Hardy-Littlewood*

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy. \tag{2}$$

Esta función maximal fue introducida por Hardy y Littlewood en [10] para $n = 1$ y para n arbitraria por N. Wiener en [20]. Existen diferentes variantes de esta función, pero por el momento nos concentraremos en la versión dada por (2).

Dado que Mf es una función semicontinua inferiormente entonces resulta ser una función Lebesgue medible, de hecho, es Borel medible. Además se verifican las siguientes dos propiedades:

1. $Mf(x) < \infty$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces para cada $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{3^n}{\alpha}\|f\|_1 . \tag{3}$$

Una desigualdad del tipo (3) se conoce como desigualdad débil $(1,1)$. Esta denominación se debe al hecho de que por la desigualdad de Tchebychev, (3) resulta más débil que una desigualdad donde aparezca la norma en $L^1(\mathbb{R}^n)$ en el lado izquierdo.

La propiedad 1 se obtendrá como consecuencia de la propiedad 2 observando que para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) = \infty\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > j\}.$$

Ahora esbozamos las ideas principales que nos permitirán obtener (3) a partir del teorema 1.

Sea E el conjunto del lado izquierdo de (3) y sea $x \in E$, entonces existe una bola abierta B con centro en x tal que

$$|B| < \frac{1}{\alpha}\int_B |f(y)|\, dy. \tag{4}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, formamos la familia $\mathcal{F}_k$ de bolas abiertas con centros en puntos de $E \cap B_k(0)$ que además satisfacen la condición (4) y aplicamos el teorema 1 para obtener una sucesión de bolas $\left\{B_j^{(k)}\right\}_j$ ajenas por pares tal que $E \cap B_k(0) \subset \cup_j 3B_j^{(k)}$. De aquí se sigue que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$|E \cap B_k(0)| \leq \sum_j 3^n \left|B_j^{(k)}\right| \leq \frac{3^n}{\alpha}\sum_j \int_{B_j^{(k)}} |f(y)|\, dy \leq \frac{3^n}{\alpha}\|f\|_1 .$$

Si ahora hacemos $k \to \infty$, obtenemos $|E| \leq \frac{3^n}{\alpha}\|f\|_1$.

Ya tenemos todo lo necesario para demostrar nuestro teorema de diferenciación de Lebesgue. Presentaremos una prueba clásica que aparece en algunos libros como [6], [11] y [15]. De hecho, seguiremos la demostración dada en [6], p. 97.

Teorema 2. *Si* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *entonces*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(y)\, dy = f(x) \ \ \textit{para casi toda } x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Demostración. Dado $N \in \mathbb{N}$, notemos que si $|x| \leq N$ y $r \leq 1$, los valores de $\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(y)\, dy$ dependen solamente de las y tales que $|y| \leq N+1$. Así, no hay pérdida de generalidad al suponer que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ puesto que podemos reemplazar f por $f\chi_{B_{N+1}(0)}$.

Para $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una función continua g de soporte compacto tal que $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Además, por continuidad de g obtenemos

$$\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} g(y)\, dy \to g(x)$$

si $r \to 0$. De aquí vemos que

$$\limsup_{r\to 0}\left|\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(y)\,dy - f(x)\right|$$

$$= \limsup_{r\to 0}\left|\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} [f(y)-g(y)]\,dy + \left[\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} g(y)\,dy - g(x)\right]\right.$$
$$\left. + [g(x)-f(x)]\right|$$

$$\leq M(f-g)(x) + 0 + |f(x)-g(x)|.$$

Para $\alpha > 0$ sean

$$E_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0}\left|\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(y)\,dy - f(x)\right| > \alpha\right\}$$
$$F_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)-g(x)| > \alpha\},$$

entonces

$$E_\alpha \subset F_{\alpha/2} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : M(f-g)(x) > \alpha/2\},$$

y puesto que

$$\frac{\alpha}{2}\left|F_{\alpha/2}\right| \leq \int_{F_{\alpha/2}} |f(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon,$$

aplicando la desigualdad (3) tenemos

$$|E_\alpha| \leq \frac{2}{\alpha}\varepsilon + \frac{2\cdot 3^n}{\alpha}\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario obtenemos que $|E_\alpha| = 0$ para cada $\alpha > 0$ y de aquí se infiere (5) para cada $x \notin \cup_{j=1}^{\infty} E_{1/j}$. □

Es posible considerar familias de conjuntos más generales que bolas para obtener versiones similares del teorema 2. Tal es el caso de las familias de conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^n$ que se "contraen de manera agradable" al punto x, esto es, familias de borelianos $\{E_r\}_{r>0}$ que satisfacen $E_r \subset B_r(x)$ para cada $r > 0$ y además existe una constante positiva C, independiente de $r > 0$ tal que $|E_r| > C\,|B_r(x)|$. La prueba es esencialmente la misma, y la omitimos.

Enseguida, consideraremos una segunda versión del teorema de cubrimiento de Vitali, cuya formulación puede encontrarse, por ejemplo, en [11], [14] y [16]. No daremos una demostración para no agobiar al lector, sin embargo, es pertinente comentar que la prueba de esta versión hace uso de un proceso de selección similar al considerado en la demostración del teorema 1.

Teorema 3. *Sea E un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ y supóngase que $\mathcal{F}$ es una familia de bolas cerradas de radio positivo que satisface la siguiente condición: dado $\varepsilon > 0$ y dado $x \in E$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $x \in B$ y $radB < \varepsilon$. Entonces existe una colección a lo más numerable de bolas de $\mathcal{F}$, $\{B_i\}_i$ tales que*

1. *$\{B_i\}_i$ es ajena por pares.*
2. *$E \subset \bigcup\limits_i B_i$ excepto por un conjunto de medida cero.*

El teorema 3 puede utilizarse para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función. Supóngase que Φ es diferenciable en cada punto del conjunto $E \subset \Omega$ y también que existe una constante positiva M tal que $|J(x)| \leq M$ para cada $x \in E$, donde J es el jacobiano de Φ en E. Entonces*

$$|\Phi(E)|^* \leq M\,|E|^*.$$

En el enunciado anterior $|\cdot|^*$ denota la medida exterior. Indicaremos a continuación cuáles son las ideas cruciales de la prueba del teorema 4.

Demostración. Dado que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ donde $E_k = E \cap B_k(0)$ y que $\Phi(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(E_k)$ basta ver que $|\Phi(E_k)|^* \leq M\,|E_k|^*$ para cada k. Así, sin pérdida de generalidad se puede suponer que E es acotado. Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un abierto G tal que $E \subset G \subset \Omega$ y $|G| < |E|^* + \varepsilon$. Usando la hipótesis de diferenciabilidad de Φ en E puede demostrarse que para cada $x \in E$ existe $\delta(x) > 0$ tal que para $0 < r < \delta(x)$ la bola $B_r(x) \subset G$ y

$$|\Phi(B_r(x))|^* \leq (M + \varepsilon)\,|B_r(x)|. \tag{6}$$

Ahora se aplica el teorema 3 a la colección de bolas

$$\{B_r(x) : x \in E,\ 0 < r \leq \delta(x)/5\}$$

y se extrae una subcolección a lo más numerable $\{B_j\}_j$ tal que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_j \cup \bigcup_{j=k+1}^{\infty} 5B_j.$$

De aquí se tiene que

$$\Phi(E) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Phi(B_j) \cup \bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Phi(5B_j)$$

y usando que las bolas son ajenas por pares y (6) se obtiene

$$|\Phi(E)|^* \leq (M + \varepsilon)\,|G| < (M + \varepsilon)\left(|E|^* + \varepsilon\right).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos así la demostración. □

Un corolario inmediato del teorema 4 es el *teorema de Sard* que establecemos a continuación.

Teorema 5. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función. Supóngase que Φ es diferenciable en cada punto del conjunto $E \subset \Omega$ y que $J(x) = 0$ para cada $x \in E$. Entonces $\Phi(E)$ es un conjunto de medida cero.*

En otras palabras, el teorema de Sard establece que el conjunto de valores críticos de Φ es un conjunto de medida cero.

3. Teorema de cubrimiento de Besicovitch

El teorema que presentamos a continuación es una de las versiones del llamado *teorema de Besicovitch*, originalmente probado por A. Besicovitch en [2]. En dicho artículo, el resultado se demuestra para bolas en el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$; nosotros, nos apegaremos a la versión formulada en [8], p. 289, que a su vez, está basada en la formulación correspondiente que aparece en la excelente monografía de M. de Guzmán ([9]). Presentamos el resultado sin prueba, recomendando al lector interesado en ella consultar [8], [9] o [12] donde podrá encontrar una excelente exposición al respecto.

Aunque sólo consideraremos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, pueden considerarse medidas más generales. La diferencia entre los resultados de cubrimiento de Vitali y Besicovitch radica en el hecho de que el resultado de Vitali es aplicable a una clase más grande de cubrientes, pero a una familia más restringida de medidas, mientras que en el resultado de Besicovitch ocurre a la inversa.

Teorema 6. *Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in E$, sea Q_x un cubo abierto con centro x y lados paralelos a los ejes coordenados. Entonces, existe una colección a lo sumo numerable de puntos $\{x_j\}_j$ de E tales que:*

1. $E \subset \bigcup_j Q_{x_j}$.
2. *Para casi toda $y \in \mathbb{R}^n$ se verifica*

$$\sum_j \chi_{Q_{x_j}}(y) \leq 24^n. \tag{7}$$

En otras palabras, para casi toda $y \in \mathbb{R}^n$ la cubierta $\{Q_{x_j}\}_j$ sólo puede tener una colección finita de cubos que contiene al punto y.

Aplicaremos este resultado para obtener una desigualdad de tipo débil $(1,1)$ para una generalización de la función maximal definida en (2). Esto nos permitirá obtener un teorema de diferenciación de Lebesgue más general que el teorema 2.

Sea $w(x)$ un peso en $\mathbb{R}^n$, esto es, $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y w toma sus valores en $(0,\infty)$ casi en todas partes. Para $1 \leq p < \infty$ denotaremos por $L^p(w)$ a la clase de funciones Lebesgue medibles f definidas en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, w(x) \, dx < \infty.$$

Vamos a suponer que la medida $d\mu(x) = w(x)\,dx$ es una medida de Borel regular. La función maximal generalizada que aquí consideraremos está definida así:

$$M^w f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{w(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} |f(y)|\, w(y)\, dy, \tag{8}$$

donde $Q(x,r)$ denota al cubo con centro en x, longitud de lado $2r$ y lados paralelos a los ejes coordenados, y

$$w(Q(x,r)) = \int_{Q(x,r)} w(y)\, dy.$$

Nos interesa obtener la siguiente desigualdad de tipo débil $(1,1)$

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M^w f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(w)} \tag{9}$$

para cada $\lambda > 0$, donde C es una constante que sólo depende de la dimensión n.

Esbozamos a continuación las ideas de la demostración, que puede ser consultada en [8], p. 288. Usando la continuidad de la función

$$x \longmapsto \frac{1}{w(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} |f(y)|\, w(y)\, dy$$

podemos demostrar que el conjunto

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M^w f(x) > \lambda\}$$

es abierto. Ahora, si K es cualquier subconjunto compacto de E_λ, dado $x \in K$ elijamos un cubo Q_x centrado en x tal que

$$\frac{1}{w(Q_x)} \int_{Q_x} |f(y)|\, w(y)\, dy > \lambda.$$

Por el teorema 6 podemos encontrar una subcolección a lo sumo numerable de cubos $\left\{Q_{x_j}\right\}_j$ de $\{Q_x\}_{x \in K}$ tales que se cumplen las condiciones 1 y 2 del teorema 6. Por consiguiente

$$w(K) \leq \sum_j w\left(Q_{x_j}\right) \leq \sum_j \frac{1}{\lambda} \int_{Q_{x_j}} |f(y)|\, w(y)\, dy \leq \frac{24^n}{\lambda} \|f\|_{L^1(w)}. \tag{10}$$

Tomando supremo sobre todos los subconjuntos compactos de E_λ y usando la regularidad interior de $w(x)\,dx$, obtenemos la desigualdad (9) con constante 24^n.

Vale la pena comentar, que la desigualdad (9) puede obtenerse también usando la descomposición de Calderón-Zygmund que hemos mencionado anteriormente. Sin embargo, hay que pedirle un poco más a la medida $w(x)\,dx$, a saber, que también satisfaga la condición de "duplicación"

$$w(2B) \leq C w(B) \tag{11}$$

para cada bola B, donde C es una constante absoluta. Por ejemplo, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ satisface dicha condición, aunque por supuesto existen ejemplos más generales y de gran importancia en el Análisis de Fourier; tal es el caso de la clase A_p (ver, por ejemplo [7], [4], [8]) que consta de cierto tipo de pesos que inducen medidas que cumplen la condición (11) pero con propiedades aún mejores y juegan un papel crucial en la continuidad de operadores maximales generalizados e integrales singulares.

Ahora, gracias a la desigualdad (9) y a la regularidad de la medida $d\mu(x) = w(x)\,dx$, podemos obtener con la misma prueba del teorema 2 nuestro teorema de diferenciación de Lebesgue generalizado.

Teorema 7. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mu)$, entonces para μ-casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica*

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} f(y)\,w(y)\,dy.$$

Una observación que debemos hacer, es que en el teorema anterior realmente no importa que la medida μ tenga una densidad. El resultado sigue siendo válido si μ es una medida de Borel positiva y regular en $\mathbb{R}^n$.

Finalizamos esta sección comentando que existen otros teoremas que nos muestran como cubrir un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con frontera no vacía por medio de una sucesión ajena por pares de cubos que se van haciendo más y más pequeños a medida que nos aproximamos a la frontera del abierto. Este tipo de teoremas de cubrimiento fue introducido por H. Whitney en [21] y son ampliamente utilizados en el Análisis de Fourier, por ejemplo, para obtener extensiones con cierto grado de diferenciabilidad de funciones diferenciables definidas en un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$.

4. El ejemplo de R. Fefferman

Las desigualdades débiles de tipo $(1,1)$ dadas por (3) y (9) junto con la propiedad de acotamiento de los operadores M y M^w en los espacios $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $L^\infty(w)$, respectivamente, permiten obtener por medio de interpolación resultados de continuidad de dichos operadores en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^p(w)$, respectivamente, para $1 < p < \infty$.

Sin embargo, si reemplazamos bolas o cubos en las definiciones (2) y (8) por conjuntos más generales como rectángulos con lados paralelos a los ejes coordenados en $\mathbb{R}^n$, esto es, producto cartesiano de n intervalos, entonces ya no será posible obtener resultados de continuidad en $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, para cualquier medida μ. R. Fefferman comenta en [5], que la diferencia en la geometría de bolas (o cubos) y rectángulos, es que en el caso de los rectángulos se puede encontrar una sucesión de puntos distintos en $\mathbb{R}^n$, digamos $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ y una sucesión de rectángulos $\{R_k\}_{k=1}^\infty$ tal que cada rectángulo R_k contiene al origen y al punto x_k, pero ningún otro punto x_j con $j \neq k$. Esto puede lograrse, por ejemplo, para $n = 2$ eligiendo sucesiones $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ tales que ambas están formadas por números positivos, la primera es estrictamente creciente, la segunda estrictamente decreciente, $R_k = [0, \alpha_k] \times [0, \beta_k]$ y la correspondiente sucesión de puntos es $x_k = (\alpha_k, \beta_k)$. No existe algún ejemplo para bolas con dicha propiedad.

Si ahora consideramos el operador maximal generalizado

$$M^{\mu} f(x) = \sup_{x \in R} \frac{1}{\mu(R)} \int_R |f(y)| \, d\mu(y)$$

donde el supremo se toma sobre todos los rectángulos R que contienen al punto x y la medida μ está definida como $d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{x_k}$ donde δ_{x_k} es la medida de Dirac concentrada en x_k, $x_0 = 0$ y $f = \chi_{R_1}$ entonces $f \in L^p(\mu)$ para cualquier p pero

$$M^{\mu} f(x_k) \geq \frac{1}{\mu(R_k)} \int_{R_k} f(y) \, d\mu(y) = \frac{1}{2}$$

para $k \geq 2$, $\mu(\{x_k\}_{k=1}^{\infty}) = \infty$ y así es imposible que $M^{\mu} f \in L^p(\mu)$.

La condición sobre una medida μ que establece R. Fefferman en [5] para obtener continuidad en $L^p(\mu)$, $1 < p \leq \infty$ es una condición técnica que suele describirse como "pertenencia uniforme" a la clase A_∞ en cada coordenada. Grosso modo, es algo así como ser absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue unidimensional en cada coordenada, pero de manera uniforme.

Por último, mencionamos el hecho de que nunca podrá tenerse continuidad para $p = 1$ para cualquiera de las funciones maximales dadas por (2) y (8). Por ejemplo, en el caso de la función maximal más simple, esto es, la dada por (2), se tiene la estimación

$$Mf(x) \geq C \frac{1}{|x|^n} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, dy$$

cuando $|x| > r$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$ es cualquier número positivo y C es una constante que sólo depende de la dimensión. Como $|x|^{-n}$ no es integrable la única posibilidad que le queda a f a fin de que Mf sea integrable es que f sea la función cero. De hecho, puede demostrarse que ni siquiera $Mf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Para ampliar el panorama de esta discusión, recomendamos al lector consultar los artículos [5] y [18].

Referencias

[1] S. Banach, *Sur un théorème de M. Vitali*, Fundamamenta Mathematicae **5** (1937), pp. 130-136.

[2] A. Besicovitch, *A general form of the covering principle and relative differentiation of aditive functions*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **41** (1945), pp. 103-110.

[3] A. Calderón & A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Mathematica **88** (1952), pp. 85-139.

[4] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2001.

[5] R. Fefferman, *Strong differentiation with respect to measures*, American Journal of Mathematics **103** (1) (1981), pp. 33-40.
[6] G.B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Second Edition, Wiley, 1999.
[7] J. García-Cuerva & J. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, Elsevier, 1985.
[8] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Second Edition, Springer, 2009.
[9] M. de Guzmán, *Differentiation of Integrals*, Springer, 1975.
[10] G. Hardy & J. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Mathematica **54** (1930), pp. 81-116.
[11] F. Jones, *Lebesgue Integration on Euclidean Space*, Revised Edition, Jones and Bartlett Publishers, 2001.
[12] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability*, Cambridge, 1995.
[13] T. Radò, *Sur un problème relatif à un théorème de Vitali*, Fundamenta Mathematicae **11** (1928), pp. 228-229.
[14] S. Saks, *Theory of the Integral*, Second Edition (English Translation), Monografie Matematyczne Tom VII, Warszawa, 1937.
[15] E. Stein & R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton, 2005.
[16] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Fifth Edition, Princeton, 1986.
[17] E. Stein, *Harmonic Analysis. Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton, 1993.
[18] E. Stein, *Note on the class $L \log L$*, Studia Mathematica **32** (1969), pp. 305-310.
[19] G. Vitali, *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Atti. Accad. Sci. Torino **43** (1908), 75-92.
[20] N. Wiener, *The ergodic theorem*, Duke Mathematical Journal **5** (1939), pp. 1-18.
[21] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets*, Transactions of the American Mathematical Society **36** (1934), pp. 63-89.

Recibido en septiembre de 2015. Aceptado para publicación en octubre de 2015

Martha Guzmán-Partida
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora, México
e-mail: martha@mat.uson.mx