Lecturas Matemáticas
Volumen **35** *(1) (2014), páginas 5–24*
ISSN 0120–1980

Polinomios ortogonales clásicos de una variable discreta, su historia, extensiones y aplicaciones

Classical orthogonal polynomials in a discrete variable, their history, extensions and applications

A. Soria–Lorente, E. R. Moreno–Roque & J. B. Martí–Zamora
Universidad de Granma, Bayamo–Manzanillo, Cuba

Resumen. Hoy en día, las diversas familias de polinomios ortogonales continúan siendo un área trascendente de investigación para la comunidad matemática. En este artículo, se presentan algunos de los principales resultados alcanzados por varios matemáticos desde el siglo XIX hasta la actualidad, correspondientes a los polinomios ortogonales clásicos de una variable discreta y sus extensiones.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, multiple orthogonal polynomials, orthogonal q-polynomials.

Abstract. At present, the several families of orthogonal polynomials continue being a transcendent research area for the mathematical community. In this paper, some of the main results obtained for several mathematicians from the 19th century until the present, correspondent items to the classical orthogonal polynomials of a discreet variable and your extensions are presented.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 33C45, 33C47, 33D45.

1. Introducción

Actualmente la teoría de funciones especiales es bien conocida por su importancia dentro de la Física-Matemática, en especial, la de los polinomios ortogonales, por su aplicación en los más disímiles campos de la ciencia moderna. Los polinomios ortogonales son entes matemáticos de gran sencillez y con un sinnúmero de aplicaciones tanto en las Matemáticas, especialmente en las ecuaciones diferenciales, combinatoria, teoría de números, álgebra computacional, funciones Theta, teoría de grupos, geometría fractal [54], teoría de la aproximación y la de fracciones continuas, así como en la Física y en la Ingeniería en los campos de la física cuántica [39, 40], ecuaciones de Schrödinger, entropías de Shannon, osciladores [39] etc. También, cabe destacar su útil aplicación en la compresión y análisis de imágenes [4, 18, 29, 47, 52, 56, 57, 58, 60], en la reconstrucción de rostros [4, 18, 47], en visión por computador [34], en redes neuronales [31], en el estudio de imágenes médicas [59], en el procesamiento de señales [42] así como en la seguridad de la información entre otros. Realmente, el estudio de forma sistemática de tales funciones, comienza a finales del siglo XVIII cuando se trataban de resolver problemas relativos a la mecánica celeste.

Cabe destacar que existen ciertas familias de polinomios ortogonales denominadas comúnmente familias *discretas,* ya que o su ortogonalidad viene dada mediante sumas, o bien, son solución de una ecuación en diferencias. El caso más sencillo lo constituyen los polinomios de Chebyshev discretos introducidos por éste en 1858 en un breve trabajo titulado *Sur une nouvelle série* y que luego amplió en su ensayo *Sur l'interpolation des valeurs équidistantes* de 1875, cuyo principal objetivo era construir buenas tablas de fuego para la artillería rusa. Luego, para 1905 C. V. L. Charlier introduce por primera vez los conocidos polinomios discretos de Charlier [20]. También M. P. Kravchuk siguiendo las ideas expuestas por Chebyshev, en 1929 introdujo una nueva familia de polinomios ortogonales discretos, los llamados polinomios de Kravchuk. Para 1934, son obtenidos por primera vez los polinomios de Meixner [38]. Otras familias de polinomios ortogonales son los polinomios de Hahn introducidos por W. Hahn [27] como caso límite de los q-polinomios de Hahn en 1949 y estudiados en detalle por Karlin y McGregor [30] en 1961, quienes le dieron el nombre. Estas últimas cuatro familias son conocidas como las familias de polinomios ortogonales clásicos de una variable discreta sobre una red uniforme [3, 21, 33, 43, 44, 46], definidos como a continuación se expresa.

Los *polinomios mónicos de Charlier* vienen definidos del siguiente modo

$$C_n^{\alpha}(x) \equiv (-\alpha)^n \; {}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} -n,-x \\ \\ - \end{array}\right| -\alpha^{-1}\right), \quad \alpha > 0,$$

los cuales satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\sum_{k\geq 0} C_n^{\alpha}(k)\,(-k)_j\,\frac{\alpha^k}{k!} = 0, \quad j = 0,\ldots,n-1,$$

así como la siguiente relación de recurrencia

$$xC_n^{\alpha}(x) = C_{n+1}^{\alpha}(x) + (n+\alpha)\,C_n^{\alpha}(x) + \alpha n C_{n-1}^{\alpha}(x), n \geq 0,$$

donde ${}_rF_s$ denota la serie hipergeométrica ordinaria en la variable z y

$$(z)_n \equiv z\,(z+1)\cdots(z+n-1)\,, \quad n > 0, \quad (z)_0 = 1,$$

denota el símbolo de Pochhammer, para más detalle, véase [25, 32, 44].

Los *polinomios mónicos de Meixner* vienen definidos del siguiente modo

$$M_n^{\alpha,\beta}(x) \equiv \frac{\alpha^n (\beta)_n}{(\alpha-1)^n}\, {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n,-x \\ \\ \beta \end{array} \middle| \, 1-\alpha^{-1} \right), \quad \beta>0, \quad 0<\alpha<1,$$

los cuales satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\sum_{k\geq 0} M_n^{\alpha,\beta}(k)\,(-k)_j \frac{\alpha^k (\beta)_k}{k!} = 0, \quad j=0,\dots,n-1,$$

así como la siguiente relación de recurrencia

$$xM_n^{\alpha,\beta}(x) = M_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) + \frac{n+\alpha(n+\beta)}{1-\alpha} M_n^{\alpha,\beta}(x) + \frac{\alpha n (n+\beta-1)}{(1-\alpha)^2} M_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \; n\geq 0.$$

Los *polinomios mónicos de Kravchuk* vienen definidos del siguiente modo

$$K_n^{p,N}(x) \equiv p^n (-N)_n \, {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n,-x \\ \\ -N \end{array} \middle| \, p^{-1} \right), \quad 0<p<1,$$

los cuales satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\sum_{0\leq k\leq N} K_n^{p,N}(k)\,(-k)_j \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = 0, \quad j=0,\dots,n-1,$$

así como la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} xK_n^{p,N}(x) &= K_{n+1}^{p,N}(x) + [p(N-n)+n(1-p)]\,K_n^{p,N}(x) \\ &\qquad + np(1-p)(N-n+1)\,K_{n-1}^{p,N}(x), \quad n\geq 0. \end{aligned}$$

En los últimos años, estos polinomios han jugado un papel fundamental en la compresión y análisis de imágenes [29, 47, 52, 56], en la reconstrucción de rostro [47], en visión por computador [34], en redes neuronales [31], en el estudio de imágenes médicas [59] etc.

Los *polinomios mónicos de Hahn* vienen definidos del siguiente modo

$$Q_n^{\alpha,\beta,N}(x) \equiv \frac{(\alpha+1)_n (-N)_n}{(n+\alpha+\beta+1)_n}\, {}_3F_2\left(\begin{array}{c} -n,-x,n+\alpha+\beta+1 \\ \\ -N,\alpha+1 \end{array} \middle| \, 1 \right), \alpha,\beta>-1,$$

los cuales satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\sum_{0\leq k\leq N} Q_n^{\alpha,\beta,N}(k)\,(-k)_j \binom{\alpha+k}{k}\binom{\beta+N-k}{N-k} = 0, \quad j=0,\dots,n-1,$$

así como la siguiente relación de recurrencia

$$xQ_n^{\alpha,\beta,N}(x) = Q_{n+1}^{\alpha,\beta,N}(x) + (A_n+C_n)\,Q_n^{\alpha,\beta,N}(x) + A_{n-1}C_n Q_{n-1}^{\alpha,\beta,N}(x), \; n\geq 0,$$

donde

$$A_n = \frac{(n+\alpha+1)(N-n)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)},$$

y

$$C_n = \frac{n\,(n+\beta)\,(N+n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)\,(2n+\alpha+\beta+1)}.$$

Cabe notar que existe otra familia de polinomios ortogonales discretos, también llamada *polinomios de Hahn*, los cuales vienen definidos de la siguiente manera [44]

$$\tilde{Q}_n^{\mu,\nu,N}(x) \equiv (N+\nu-1)_n\,(N-1)_n \times {}_3F_2\left(\begin{array}{c} -n,-x,2N+\mu+\nu-n-1 \\ \\ N+\nu-1,N-1 \end{array}\middle|\, 1\right), \quad \mu,\nu > -1.$$

Además, satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{0\le k\le N} \tilde{Q}_m^{\mu,\nu,N}(k)\,\tilde{Q}_n^{\mu,\nu,N}(k)\,\rho(k) = d_n^2\delta_{m,n}, \quad 0 \le m,n \le N-1,$$

siendo

$$\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(x+\mu+1)\,\Gamma(N+\nu-x)\,\Gamma(N-n-x)},$$

y

$$d_n^2 = \frac{\Gamma(2N+\mu+\nu-n)}{(2N+\mu+\nu-2n-1)\,\Gamma(N+\mu+\nu-n)} \times \frac{1}{\Gamma(N+\mu-n)\,\Gamma(N+\nu-n)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(N-n)}.$$

Nótese que si se escala estos polinomios, haciendo uso de la expresión anterior, se tiene entonces

$$\hat{Q}_n^{\mu,\nu,N}(x) \equiv \tilde{Q}_n^{\mu,\nu,N}(x)\sqrt{\frac{\rho(x)}{d_n^2}}, \quad n = 0,1,\ldots,N-1, \tag{1}$$

los cuales satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{0\le k\le N} \hat{Q}_m^{\mu,\nu,N}(k)\,\hat{Q}_n^{\mu,\nu,N}(k) = \delta_{m,n}, \quad 0 \le m,n \le N-1.$$

A partir de estos resultados, para el año 2005, Jian Zhou junto con otros autores en [57] mostró que dada una imagen digitalizada $f(x,y)$ de tamaño $N \times N$ el *momento de Hahn* de orden $m+n$ viene dado mediante

$$H_{mn} \equiv \sum_{0\le x\le N-1}\;\sum_{0\le y\le N-1} f(x,y)\,\hat{Q}_m^{\mu,\nu,N}(x)\,\hat{Q}_n^{\mu,\nu,N}(y)\,, m,n = 0,1,\ldots,N-1,$$

y haciendo uso de la expresión anterior así como de (1) se llega al momento inverso

$$f(x,y) = \sum_{0\le m\le N-1}\;\sum_{0\le n\le N-1} H_{mn}\hat{Q}_m^{\mu,\nu,N}(x)\,\hat{Q}_n^{\mu,\nu,N}(y)\,,$$

el cual indica que la imagen digitalizada $f(x,y)$ puede ser reconstruida a través del cálculo de sus momentos ortogonales hasta el orden $2N-2$. Resultados similares a los anteriores ya habían sido dados anteriormente en el año 2003 por Pew-Thian Yap junto con otros autores para el caso de los *polinomios de Kravchuk*; para más detalles véase [47, 52].

En la próxima sección, se darán varias extensiones de estos polinomios estudiadas por algunos autores.

2. Extensiones de los polinomios ortogonales clásicos de una variable discreta

Actualmente es conocido, que los ilustres matemáticos, Nikiforov y Uvarov, introdujeron para el año 1983 los q-polinomios sobre redes no uniformes, aunque dichos resultados aparecieron más tarde para el año 1985, en una edición rusa ya completada [43]. A raíz de esto, fueron apareciendo nuevos resultados, para más detalle, consultar [2, 8, 9, 13, 37, 43, 44, 51]. En el año 2012, Jorge Arvesú y Anier Soria en [13] construyeron una *función de Stieltjes* en términos del q-falling factorial

$$S_q(z) \equiv \sum_{k\geq 0} \frac{u_k^q}{q^k\,[z]_q^{(k+1)}}, \tag{2}$$

para los q-polinomios ortogonales clásicos (*q-Charlier, q-Meixner, q-Kravchuk y q-Hahn*) en una red no uniforme $x(s) = (q^s-1)(q-1)^{-1}$, donde u_k^q son los q-momentos de orden k y $[z]_q^{(k)}$ es el q-análogo del falling factorial [13] definido mediante

$$[s]_q^{(k)} \equiv \frac{(q^{-s};q)_k}{(q-1)^k} q^{ks-\binom{k}{2}}, \quad k\geq 1, \quad [s]_q^{(0)} = 1,$$

siendo

$$(a;q)_k \equiv \prod_{0\leq j\leq k-1} (1-aq^j), \quad k>0, \quad (a;q)_0 = 1,$$

el q-análogo del símbolo de Pochhammer [25, 43]. Además, probaron que esta función de Stieltjes, asociada a estos polinomios es solución de la q-ecuación en diferencias no homogénea

$$\nabla\left[(\sigma(s)+\tau(s)\bigtriangledown x(s+1/2))S_q(s)\right] = \tau(s)S_q(s) + C_q, \quad \nabla \equiv \frac{\bigtriangledown}{\bigtriangledown x(s+1/2)}.$$

En particular, para el caso de los *q-polinomios de Charlier* se tiene que

$$\begin{cases} \tau(s) = \mu q^{3/2} - q^{1/2} x(s), \\ \\ \sigma(s) + \tau(s) \bigtriangledown x(s+1/2) = q^s x(s) + \left[\mu q^{3/2} - q^{1/2} x(s)\right] \bigtriangledown x(s+1/2), \\ \\ C_q = \dfrac{1}{e_q\left[(1-q)\mu\right]}, \end{cases}$$

siendo la función de Stieltjes asociada

$$\begin{aligned} S_q(z) &= \frac{u_0^q}{x(z)} \, {}_1\varphi_1 \left(\begin{array}{c|c} q & \\ & q; \mu(1-q) q^{1-z} \\ q^{1-z} & \end{array} \right) \\ &= \frac{C_q q^{-1/2}}{x(z)} \, {}_2\varphi_1 \left(\begin{array}{c|c} q^{-z}, 0 & \\ & q; (1-q)\mu q \\ q^{1-z} & \end{array} \right), \end{aligned}$$

donde ${}_r\varphi_s$ denota las q-series hipergeométricas básicas, para más detalle, consultar [25, 32]. De igual modo, para el caso de los *q-polinomios de Meixner* se tiene

$$\begin{cases} \tau(s) = q^{1/2}(\mu q^{\gamma+1} - 1) x(s) + \mu q^{\frac{\gamma+2}{2}} [\gamma]_q, \\ \\ \sigma(s) = (q-1) x(s)^2 + x(s), \end{cases}$$

siendo

$$\begin{aligned} S_q(z) &= \frac{q^{-1/2}}{x(z)} \, {}_2\varphi_1 \left(\begin{array}{c|c} q^{\gamma}; q^{-z} & \\ & q; \mu q \\ q^{1-z} & \end{array} \right) \\ &= \frac{q^{-1/2}}{x(z)} \frac{\left(\mu q^{\gamma+1}; q\right)_\infty}{(\mu q; q)_\infty} \, {}_2\varphi_2 \left(\begin{array}{c|c} q^{\gamma}, q & \\ & q; \mu q^{1-z} \\ q^{1-z}, \mu q^{\gamma+1} & \end{array} \right) \\ &= \frac{u_0^q}{x(z)} \, {}_2\varphi_2 \left(\begin{array}{c|c} q^{\gamma}, q & \\ & q; \mu q^{1-z} \\ q^{1-z}, \mu q^{\gamma+1} & \end{array} \right). \end{aligned}$$

También, para el caso de los *q-polinomios de Kravchuk* se tiene

$$\begin{cases} \tau(s) = \dfrac{q^{1/2} p q (q^N - 1)}{1-p} - \dfrac{q^{1/2}\left(p(q-1)+1\right)}{1-p} x(s), \\ \\ \sigma(s) = (q-1) x^2(s) + x(s), \\ \\ C_q = (1-p)^N \dfrac{[N]_q!}{\Gamma_q(N+1)} = (1-p)^N q^{-\binom{N}{2}/2}, \end{cases}$$

siendo

$$\begin{aligned} S_q(z) &= \frac{C_q q^{-1/2}}{x(z)}\, {}_2\varphi_1\left(\left.\begin{matrix} q^{-N}, q^{-z} \\ \\ q^{1-z} \end{matrix}\right| q; \frac{pq^{N+1}}{p-1}\right) \\ &= \frac{C_q q^{-1/2}}{x(z)} \frac{\left(\frac{pq}{p-1}; q\right)_\infty}{\left(\frac{pq}{p-1}q^N; q\right)_\infty}\, {}_2\varphi_2\left(\left.\begin{matrix} q^{-N}, q \\ \\ q^{1-z}, \dfrac{pq}{p-1} \end{matrix}\right| q; \frac{pq^{N+1-z}}{p-1}\right) \\ &= \frac{u_0^q}{x(z)}\, {}_2\varphi_2\left(\left.\begin{matrix} q^{-N}, q \\ \\ q^{1-z}, \dfrac{pq}{p-1} \end{matrix}\right| q; \frac{pq^{N+1-z}}{p-1}\right). \end{aligned}$$

Por último para el caso de los *q-polinomios de Hahn* se tiene

$$\begin{cases} \tau(s) = -q^{(1-N-\alpha)/2}[\alpha+\beta+2]_q x(s) + q^{\alpha+1+(\beta-N)/2}[\beta+1]_q[N-1]_q), \\ \\ \sigma(s) = q^{-(N+\alpha)/2} x(s)\left([N+\alpha]_q - x(s)\right), \\ \\ C_q = q^{\tilde{v}(\alpha,\beta,N)-1/2} \dfrac{\Gamma_q(\beta+1)\,\Gamma_q(N+\alpha)}{\Gamma_q(N)}, \end{cases}$$

siendo

$$\begin{aligned} S_q(z) &= \frac{u_0^q}{x(z)}\, {}_3\varphi_2\left(\left.\begin{matrix} q^{\beta+1}, q^{1-N}, q \\ q^{1-z}, q^{\alpha+\beta+2} \end{matrix}\right| q; q^{N+\alpha-z}\right) \\ &= \frac{C_q}{x(z)}\, {}_3\varphi_2\left(\left.\begin{matrix} q^{\beta+1}, q^{1-N}, q^{-z} \\ q^{1-N-\alpha}, q^{1-z} \end{matrix}\right| q; q^{\alpha+1}\right). \end{aligned}$$

Estos resultados, también fueron estudiados para las familias de los polinomios ortogonales clásicos de una variable discreta sobre una red uniforme, en el año 2013, por los autores Cleonice F. Bracciali, Teresa E. Pérez y Miguel A. Piñar, los cuales, por ejemplo, para el caso de los polinomios discretos de Hahn dieron el siguiente resultado

$$\begin{aligned} &\nabla\left[(\alpha+1+z)(N-z)\,S(z)\right] \\ &\qquad = \left[(\alpha+1)N - (\alpha+\beta+2)z\right]S(z) + \frac{1}{N!}(\alpha+\beta+1)_{N+1}, \end{aligned}$$

donde

$$S\left(z\right)=\frac{(\alpha+\beta+2)_N}{N!z}\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} -N,\alpha+1,1 \\ \\ 1-z,\alpha+\beta+2 \end{array}\middle|\, 1\right).$$

Para más detalle, consultar [22].

Es importante precisar, que los q-polinomios son objetos matemáticos de gran interés por sus distintas aplicaciones en diversas áreas de la Física–Matemática. Son significativas sus aplicaciones y su relación con la teoría de particiones [5], las fracciones continuas, series de Euler, funciones theta y elípticas, entre otras [6, 7, 24]. A lo anterior hay que añadirle su estrecha conexión con la teoría de grupos y ciertas estructuras algebraicas, tales como los grupos de Lie, las álgebras de Lie, los grupos finitos, los grupos cuánticos, las álgebras de Hecke, las q-álgebras (o álgebras cuánticas) [9, 25, 55]; éstas últimas han sido usadas para describir el espectro rotacional y vibracional de núcleos atómicos de las moléculas diatómicas, así como en el estudio del problema inverso de la dispersión cuántica [23], etc., véase para más detalle [1, 19], y las referencias del mismo, también en todo tipo de funciones especiales, véase por ejemplo [55].

La conexión con la teoría de grupos es mucho más reciente, de hecho, comenzó con Gelfand y Šapiro en los años 50 los cuales descubrieron la relación entre los polinomios de Jacobi y el grupo lineal especial $SL(2,\mathbb{C})$. A partir de ese momento, la literatura que considera dichas relaciones se ha expandido de manera explosiva. Posteriormente, después de que se hubiesen introducido los grupos cuánticos, Drinfeld y Woronowicz mostraron que estos grupos estaban relacionados con las q-funciones especiales de una forma análoga a como están relacionados los polinomios de Jacobi y el grupo $SL(2,\mathbb{C})$. También, los q-polinomios han sido considerados para describir algunas de las propiedades de los estados cuánticos de los átomos y los fotones [26].

Sus aplicaciones en Física se han incrementado en los últimos años debido a la introducción de los q-osciladores cuánticos, véase [14, 15, 16, 17] y las referencias de los mismos. Dichos objetos tienen una gran importancia en diversos problemas de la Física–Matemática actual, en sistemas integrales, teoría cuántica de campos conformes, Física–Estadística, entre otros. También se han evidenciado sus aplicaciones en el q-análogo de la teoría cuántica del momento angular [48, 50], y las q-ecuaciones de Schrödinger [41].

Por otro lado, usando el q-análogo de la teoría cuántica del momento angular [48, 49] pueden obtenerse diversos resultados relacionados con los q-polinomios, algunos de los cuales de una forma nada trivial desde el punto de vista de la teoría de los polinomios ortogonales. Además los coeficientes de Clebsh–Gordan (6j-símbolos) de las q-álgebras $SU_q(2)$ están relacionados con ciertos q-polinomios (véase por ejemplo [9, 48, 49]).

Como es conocido, para el año 1991 en [45], Nikishin y Sorokin considerando r funciones $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ de la forma

$$f_j(z) = \int_{\triangle_j} \frac{d\mu_j(x)}{z-x}, \quad j = 1, \ldots, r, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \triangle_j,$$

con un desarrollo formal cerca del infinito

$$f_j(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{c_{k,j}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \ldots, r,$$

introducen el concepto de aproximaciones Hermite–Padé de tipo II, en cuyo caso el objetivo es hallar un polinomio $P_{\vec{n}}$ de grado $\leq |\vec{n}|$, y r polinomios $Q_{\vec{n},1}, \ldots, Q_{\vec{n},r}$ tales que

$$P_{\vec{n}}(z) f_j(z) - Q_{\vec{n},j}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \to \infty,$$

donde el denominador común $P_{\vec{n}}$ puede ser determinado mediante el sistema de ecuaciones lineales homogéneas, con a lo sumo $|\vec{n}|+1$ coeficientes incógnitas y $|\vec{n}|$ ecuaciones lineales

$$\int_{\triangle_j} x^{\nu} P_{\vec{n}}(x)\, d\mu_j(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n_j - 1, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{3}$$

siendo los numeradores

$$Q_{\vec{n},j}(z) = \int_{\triangle_j} \frac{P_{\vec{n}}(z) - P_{\vec{n}}(x)}{z-x} d\mu_j(x), \quad j = 1, \ldots, r,$$

y el error de aproximación

$$P_{\vec{n}}(z) f_j(z) - Q_{\vec{n},j}(z) = \int_{\triangle_j} \frac{P_{\vec{n}}(x)}{z-x} d\mu_j(x), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Además, a los polinomios de grado $\leq |\vec{n}|$ que satisfacen la condición de ortogonalidad (3), Nikishin y Sorokin en [45] los denominaron polinomios multiortogonales de tipo II.

Más adelante, en el año 2001, Jorge Arvesú junto a otros autores, traduce (3) al caso discreto e introduce en [12] los *polinomios ortogonales múltiples de Charlier, Meixner, Kravchuk y Hahn*. En este trabajo, haciendo uso de los polinomios $(-x)_j$, plantearon que un polinomio ortogonal múltiple discreto de tipo II sobre una red lineal, correspondiente a un multi-índice $\vec{n} \in \mathbb{N}^r$, es un polinomio $P_{\vec{n}}$ de grado $\leq |\vec{n}|$ que satisface las condiciones de ortogonalidad

$$\begin{gathered}
\sum_{0 \leq k \leq N_1} P_{\vec{n}}(k) (-k)_j \rho_{1,k} = 0, \quad j = 0, \ldots, n_1 - 1, \\
\vdots \\
\sum_{0 \leq k \leq N_r} P_{\vec{n}}(k) (-k)_j \rho_{r,k} = 0, \quad j = 0, \ldots, n_r - 1.
\end{gathered}$$

Así de este modo, los *polinomios múltiples de Charlier* $C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x)$ [12], correspondientes al multi–índice $\vec{n} \in \mathbb{N}^r$ y al conjunto de parámetros $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, son los polinomios mónicos de grado $|\vec{n}|$, para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{k\geq 0} C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(k)\,(-k)_j\, \upsilon^{\alpha_1}(k) = 0, \quad j = 0, \ldots, n_1 - 1,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k\geq 0} C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(k)\,(-k)_j\, \upsilon^{\alpha_r}(k) = 0, \quad j = 0, \ldots, n_r - 1,$$

donde

$$\upsilon^{\alpha_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i^x}{\Gamma(x+1)}, & \text{Si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-, \\ \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

También en [12] encontraron el siguiente operador de creación

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i}\left[C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x)\right] = -C_{\vec{n}+\vec{e_i}}^{\vec{\alpha}}(x), \quad i = 1, \ldots, r,$$

donde $\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i}$ viene definido mediante

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i}[f(x)] \equiv \frac{\alpha_i}{\upsilon^{\alpha_i}(x)} \bigtriangledown \left[\upsilon^{\alpha_i}(x)\, f(x)\right],$$

para cualquier función continua $f(x)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, y $\bigtriangledown f(x) = f(x) - f(x-1)$. Como una consecuencia de lo anterior consiguieron la fórmula tipo Rodrigues [12]

$$C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x) = (-1)^{|\vec{n}|}\left(\prod_{1\leq j\leq r} \alpha_j^{n_j}\right)\Gamma(x+1)\mathcal{C}_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}\left(\frac{1}{\Gamma(x+1)}\right),$$

donde

$$\mathcal{C}_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}} = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{C}_{n_i}^{\vec{\alpha}}, \quad \mathcal{C}_{n_i}^{\vec{\alpha}} = \alpha_i^{-x} \bigtriangledown^{n_i} \alpha_i^x.$$

Luego para el año 2008 D. W. Lee en [36] halla la siguiente ecuación en diferencias de orden superior para estos *polinomios múltiples de Charlier* estudiados en [12]

$$\prod_{1\leq i\leq r} \mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i}\left[\triangle C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x)\right] + \sum_{1\leq i\leq r} n_i \prod_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}} \mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_j}\left[C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x)\right] = 0, \text{donde} \triangle f(x) = f(x+1) - f(x),$$

y más tarde para el 2011 en [28, 53] Walter van Assche da la siguiente relación de recurrencia

$$xC_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x) = C_{\vec{n}+\vec{e_k}}^{\vec{\alpha}}(x) + (\alpha_k + |\vec{n}|)\, C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x) + \sum_{1\leq i\leq r} \alpha_i n_i C_{\vec{n}-\vec{e_i}}^{\vec{\alpha}}(x).$$

En este mismo año, Hiroshi Miki junto a otros autores, consideró teniendo en cuenta los operadores de aniquilación y creación [39], el siguiente conjunto de r Hamiltonianos H_i, $i = 1, \ldots, r$ definidos en la forma

$$H_i = \sum_{1 \le j \le r} a_j^{+} a_j + \sum_{1 \le j \le r} \alpha_j a_j^{+} + a_i + \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

así como los estados $|x\rangle\rangle$ definidos mediante la combinación de los estados $|n_1, \ldots, n_r\rangle$

$$|x\rangle\rangle = \frac{r^{-x/2} e^{-\alpha_1}}{\sqrt{x!}} \sum_{\vec{n} \ge 0} \frac{C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x)}{\sqrt{n_1! \cdots n_r!}} |n_1, \ldots, n_r\rangle, \quad x \in \mathbb{N},$$

en vista a deducir ciertas propiedades de los *polinomios múltiples de Charlier*, entre ellas, la siguiente expresión explícita

$$C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x) = \sum_{1 \le l_1 \le n_1} \cdots \sum_{1 \le l_r \le n_r} \frac{(-n_1)_{l_1} \cdots (-n_r)_{l_r} (-\alpha_1)^{n_1 - l_1} \cdots (-\alpha_r)^{n_r - l_r}}{l_1! \cdots l_r!} (-x)_{l_1 + \cdots l_r},$$

y la función generatriz

$$\sum_{\vec{n} \ge 0} \frac{C_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}(x)}{n_1! \cdots n_r!} z_1^{n_1} \cdots z_r^{n_r} = e^{-(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_r z_r)} (z_1 + \cdots + z_r + 1)^x.$$

Los *polinomios múltiples de Meixner de primer tipo* [12], correspondientes al multi-índice $\vec{n} \in \mathbb{N}^r$ y al conjunto de parámetros $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ y β, son los polinomios mónicos $M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(x)$ de grado $|\vec{n}|$, para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{k \ge 0} M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(k) (-k)_j \upsilon^{\alpha_1,\beta}(k) = 0, \quad j = 0, \ldots, n_1 - 1,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k \ge 0} M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(k) (-k)_j \upsilon^{\alpha_r,\beta}(k) = 0, \quad j = 0, \ldots, n_r - 1,$$

donde

$$\upsilon^{\alpha_i,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta + x)}{\Gamma(\beta)} \dfrac{\alpha_i^x}{\Gamma(x+1)}, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{-\beta, -\beta - 1, -\beta - 2, \ldots\}), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Además, en [12] encontraron el siguiente operador de creación

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i,\beta}\left[M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(x)\right] = -M_{\vec{n}+\vec{e_i}}^{\vec{\alpha},\beta-1}(x), \quad i = 1, \ldots, r,$$

definido mediante

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i,\beta}[f(x)] \equiv \frac{\alpha_i(\beta - 1)}{(1 - \alpha_i)\,\upsilon^{\alpha_i,\beta-1}(x)} \nabla \left[\upsilon^{\alpha_i,\beta}(x) f(x)\right].$$

A partir del cual consiguieron la fórmula de tipo Rodrigues [12]

$$M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(x)=(\beta)_{|\vec{n}|}\left[\prod_{1\leq j\leq r}\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_j-1}\right)^{n_j}\right]\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(x+1)}{\Gamma(\beta+x)}\mathcal{C}_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}\left(\frac{\Gamma(\beta+|\vec{n}|+x)}{\Gamma(\beta+|\vec{n}|)\Gamma(x+1)}\right).$$

Luego, de forma similar al caso de los *polinomios múltiples de Charlier*, D. W. Lee determina en [36] la siguiente ecuación en diferencias de orden superior para estos *polinomios múltiples de Meixner de primer tipo* estudiados en [12]

$$\prod_{1\leq i\leq r}\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i,\beta+i-r+1}\left[\triangle M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(x)\right] + \sum_{1\leq i\leq r} n_i \prod_{1\leq j\leq i-1}\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_j,\beta+j-r+1}\prod_{i+1\leq k\leq r}\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_k,\beta+k-r}\left[M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(x)\right]=0.$$

También, para el año 2012 [28] Maciej Haneczok y otros autores trabajan con la siguiente relación de recurrencia

$$xM_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(x)=M_{\vec{n}+\vec{e}_k}^{\vec{\alpha},\beta}(x)+\left[(\beta+|\vec{n}|)\left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}\right)+\sum_{1\leq i\leq r}\frac{n_i}{1-\alpha_i}\right]M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(x) + \sum_{1\leq i\leq r}\frac{n_i\alpha_i(\beta+|\vec{n}|-1)}{(\alpha_i-1)^2}M_{\vec{n}-\vec{e}_i}^{\vec{\alpha},\beta}(x).$$

Además, para este mismo año, de manera similar al caso de los *polinomios múltiples de Charlier*, Hiroshi Miki junto a otros autores en [40], consideró el siguiente conjunto de r hamiltonianos $H_i^{\vec{\alpha},\beta}$, $i=1,\ldots,r$ definidos como sigue

$$H_i^{\vec{\alpha},\beta}=a_i+\sum_{1\leq k\leq r}\frac{a_k^{+}a_k}{1-\alpha_k} + \left(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}+\sum_{1\leq j\leq r}\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}a_j^{+}\right)\left(\sum_{1\leq k\leq r}a_k^{+}a_k+\beta\right),\quad i=1,\ldots,r,$$

así como los estados $|x,\vec{\alpha},\beta\rangle\rangle$ definidos mediante la combinación de los estados $|n_1,\ldots,n_r\rangle$

$$|x,\vec{\alpha},\beta\rangle\rangle=N_{x,\vec{\alpha},\beta}^{r}\sum_{\vec{n}\geq 0}\frac{M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(x)}{\sqrt{n_1!\cdots n_r!}}|n_1,\ldots,n_r\rangle,\quad x\in\mathbb{N},$$

en vista a deducir ciertas propiedades de los polinomios *múltiples de Meixner de primer tipo*, entre ellas, la siguiente función generatriz para estos polinomios

$$\sum_{\vec{n}\geq 0}\frac{M_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}(x)}{n_1!\cdots n_r!}z_1^{n_1}\cdots z_r^{n_r}=\left(1+\sum_{1\leq k\leq r}\frac{z_k}{1-\alpha_k}\right)^{x}\left(1+\sum_{1\leq k\leq r}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}z_k\right)^{-x-\beta}.$$

Los *polinomios múltiples de Meixner de segundo tipo* [12], correspondientes al multi-índice $\vec{n} \in \mathbb{N}^r$ y al conjunto de parámetros $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$, $\beta_i > 0$, $\beta_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$, para todo $i \neq j$ y $0 < \alpha < 1$, son los polinomios mónicos $M_{\vec{n}}^{\alpha,\vec{\beta}}(x)$ de grado $|\vec{n}|$, para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\begin{gathered}\sum_{k\geq 0} M_{\vec{n}}^{\alpha,\vec{\beta}}(k)\,(-k)_j\, \upsilon^{\beta_1,\alpha}(k) = 0, \quad j = 0, \ldots, n_1 - 1,\\ \vdots \\ \sum_{k\geq 0} M_{\vec{n}}^{\alpha,\vec{\beta}}(k)\,(-k)_j\, \upsilon^{\beta_r,\alpha}(k) = 0, \quad j = 0, \ldots, n_r - 1,\end{gathered}$$

donde

$$\upsilon^{\alpha,\beta_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta_i + x)}{\Gamma(\beta_i)} \dfrac{\alpha^x}{\Gamma(x+1)}, & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{-\beta_i, -\beta_i - 1, \ldots\}), \\ \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Además, en [12] encontraron el siguiente operador de creación

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha,\beta_i}\left[M_{\vec{n}}^{\alpha,\vec{\beta}}(x)\right] = -M_{\vec{n}+\vec{e_i}}^{\alpha,\vec{\beta}-\vec{e_i}}(x), \quad i = 1, \ldots, r,$$

definido mediante

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha,\beta_i}[f(x)] = \frac{\alpha\,(1-\alpha)^{-1}(\beta_i - 1)}{\upsilon^{\alpha,\beta_i - 1}(x)} \bigtriangledown \left[\upsilon^{\alpha,\beta_i}(x)\, f(x)\right],$$

así como la siguiente fórmula de tipo Rodrigues

$$M_{\vec{n}}^{\alpha,\vec{\beta}}(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^{|\vec{n}|} \left[\prod_{1\leq j\leq r} (\beta_j)_{n_j}\right] \frac{\Gamma(x+1)}{\alpha^x} \mathcal{M}_{\vec{n}}^{\vec{\beta}}\left(\frac{\alpha^x}{\Gamma(x+1)}\right),$$

donde

$$\mathcal{M}_{\vec{n}}^{\vec{\beta}} = \prod_{1\leq i\leq r} \mathcal{M}_{n_i}^{\vec{\beta}}, \quad \mathcal{M}_{n_i}^{\vec{\beta}} = \frac{\Gamma(\beta_i)}{\Gamma(\beta_i + x)} \bigtriangledown^{n_i} \frac{\Gamma(\beta_i + n_i + x)}{\Gamma(\beta_i + n_i)}.$$

Del mismo modo que en los casos anteriores, D. W. Lee determinó en [36] la siguiente ecuación en diferencias de orden superior para estos *polinomios múltiples de Meixner de segundo tipo* estudiados en [12]

$$\prod_{1\leq i\leq r} \mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha,\beta_i+1}\left[\triangle M_{\vec{n}}^{\alpha,\vec{\beta}}(x)\right] + \sum_{1\leq i\leq r} d_i \prod_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}} \mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha,\beta_j+1}\left[M_{\vec{n}}^{\alpha,\vec{\beta}}(x)\right] = 0,$$

donde

$$d_i = \frac{\prod\limits_{1\le k\le r} (n_k + \beta_k - \beta_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le r-1\\ k\neq i}} (\beta_i - \beta_k) \prod\limits_{i+1\le l\le r} (\beta_l - \beta_i)} \Theta^{\vec{n},\vec{\alpha},r},$$

siendo

$$\Theta^{\vec{n},\vec{\alpha},r} = \sum_{1\le j\le r} \frac{(-1)^{i+j} (n_j + \beta_j - \beta_i)^{-1} \prod\limits_{1\le k\le r} (n_j + \beta_j - \beta_k)}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le r-1\\ k\neq j}} (n_k - n_j + \beta_k - \beta_j) \prod\limits_{j+1\le l\le r} (n_j - n_l + \beta_j - \beta_l)}.$$

También, para el año 2012 [28] Maciej Haneczok y otros autores hacen uso de la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} xM_{\vec{n}}^{\alpha,\vec{\beta}}(x) &= M_{\vec{n}+\vec{e}_k}^{\alpha,\vec{\beta}}(x) + \left[(n_k+\beta_k)\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) + \frac{|\vec{n}|}{1-\alpha}\right] M_{\vec{n}}^{\alpha,\vec{\beta}}(x) \\ &\quad + \alpha \sum_{1\le i\le r} \frac{n_i(\beta_i+n_i-1)}{(1-\alpha)^2} \prod_{j\neq i}^{r} \frac{n_i+\beta_i-\beta_j}{n_i-n_j+\beta_i-\beta_j} M_{\vec{n}-\vec{e}_i}^{\alpha,\vec{\beta}}(x). \end{aligned}$$

Los *polinomios múltiples de Kravchuk* [12], correspondientes al multi-índice $\vec{n} \in \mathbb{N}^r$ con $|\vec{n}| \le N$ y al conjunto de parámetros N y $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_r)$, son los polinomios mónicos $K_{\vec{n}}^{\vec{p},N}(x)$ de grado $|\vec{n}|$, para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\begin{gathered} \sum_{0\le k\le N} K_{\vec{n}}^{\vec{p},N}(k)\,(-k)_j\, \upsilon^{p_1,N}(k) = 0, \quad j = 0,\ldots,n_1-1, \\ \vdots \\ \sum_{0\le k\le N} K_{\vec{n}}^{\vec{p},N}(k)\,(-k)_j\, \upsilon^{p_r,N}(k) = 0, \quad j = 0,\ldots,n_r-1, \end{gathered}$$

donde

$$\upsilon^{p_i,N}(x) = \begin{cases} \dfrac{N!\,p_i^x(1-p_i)^{N-x}}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(N-x+1)}, & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash(\mathbb{Z}_- \cup \{N+1, N+2, \ldots\}), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

También, en [12] se consiguió el siguiente operador de creación

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{p_i,N}\left[K_{\vec{n}}^{\vec{p},N}(x)\right] = -K_{\vec{n}+\vec{e_i}}^{\vec{p},N+1}(x), \quad i = 1,\ldots,r,$$

definido mediante

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{p_i,N}[f(x)] = \frac{p_i(1-p_i)(N+1)}{\upsilon^{p_i,N+1}(x)} \bigtriangledown \left[\upsilon^{p_i,N}(x)\, f(x)\right],$$

y a partir de dicho resultado obtuvieron la siguiente fórmula de tipo Rodrigues

$$K_{\vec{n}}^{\vec{p},N}(x) = (-N)_{|\vec{n}|}\left(\prod_{1\le j\le r} p_j^{n_j}\right)\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x+1)}{N!} \\ \times \mathcal{K}_{\vec{n}}^{\vec{p}}\left(\frac{(N-|\vec{n}|)!}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-|\vec{n}|-x+1)}\right),$$

donde

$$\mathcal{K}_{\vec{n}}^{\vec{p}} = \prod_{1\le i\le r}\mathcal{K}_{n_i}^{\vec{p}}, \quad \mathcal{K}_{n_i}^{\vec{p}} = \left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)^x \nabla^{n_i}\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)^x.$$

De igual modo que en los casos anteriores, D. W. Lee en el 2007 probó en [35] la siguiente ecuación en diferencias de orden superior para estos *polinomios múltiples de Kravchuk* estudiados en [12]

$$\prod_{1\le i\le r}\mathcal{L}_{\vec{n}}^{p_i,N+r-i-1}\left[\triangle K_{\vec{n}}^{\vec{p},N}(x)\right] \\ + \sum_{1\le i\le r} n_i \prod_{1\le j\le i-1}\mathcal{L}_{\vec{n}}^{p_i,N+r-j-1}\prod_{i+1\le k\le r}\mathcal{L}_{\vec{n}}^{p_i,N+r-k}\left[K_{\vec{n}}^{\vec{p},N}(x)\right] = 0.$$

Luego, para el año 2012 [28] Maciej Haneczok y otros autores utilizan la siguiente relación de recurrencia

$$xK_{\vec{n}}^{\vec{p},N}(x) = K_{\vec{n}+\vec{e}_k}^{\vec{p},N}(x) + \left[(N-|\vec{n}|)p_k + \sum_{1\le i\le r} n_i(1-p_i)\right]K_{\vec{n}}^{\vec{p},N}(x) \\ + \sum_{1\le i\le r} n_i p_i (p_i-1)(|\vec{n}|-N-1)K_{\vec{n}-\vec{e}_i}^{\vec{p},N}(x).$$

Los *polinomios múltiples de Hahn* [12], correspondientes al multi-índice $\vec{n}\in\mathbb{N}^r$ y al conjunto de parámetros $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, β y N, son los polinomios mónicos $Q_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta,N}(x)$ de grado $|\vec{n}|$, para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{0\le k\le N} Q_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta,N}(k)(-k)_j\,\upsilon^{\alpha_1,\beta,N}(k) = 0, \quad j=0,\ldots,n_1-1,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{0\le k\le N} Q_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta,N}(k)(-k)_j\,\upsilon^{\alpha_r,\beta,N}(k) = 0, \quad j=0,\ldots,n_r-1,$$

donde

$$\upsilon^{\alpha_i,\beta,N}(x) = \begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha_i+x+1)}{\Gamma(\alpha_i+1)\Gamma(x+1)}\dfrac{\Gamma(\beta+N-x+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(N-x+1)}, & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus(\mathbb{X}\cup\mathbb{Y}),\\ 0, \quad \text{si } x\in\mathbb{X},\end{cases}$$

donde

$$\mathbb{X} = \{-1, -2, \ldots\} \cup \{N+1, N+2, \ldots\},$$

y

$$\mathbb{Y} = \{-\alpha_i - 1, -\alpha_i - 2, \ldots\} \cup \{\beta + N + 1, \beta + N + 2, \ldots\}.$$

También, en [12] se obtuvo el siguiente operador de creación

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i,\beta,N}\left[Q_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta,N}(x)\right] = -\left(|\vec{n}| + \alpha_i + \beta\right) Q_{\vec{n}+\vec{e_i}}^{\vec{\alpha}-\vec{e_i},\beta-1,N+1}(x), \quad i = 1, \ldots, r,$$

definido mediante

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i,\beta,N}\left[f(x)\right] = \frac{\alpha_i \beta}{\upsilon^{\alpha_i-1,\beta-1,N+1}(x)} \bigtriangledown \left[\upsilon^{\alpha_i,\beta,N}(x) f(x)\right],$$

y a partir de dicho resultado obtuvieron la siguiente fórmula de tipo Rodrigues

$$Q_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta,N}(x) = \frac{(-1)^{|\vec{n}|}(\beta+1)_{n_1+n_2}}{\displaystyle\prod_{1\le k\le r}(n_1+n_2+\alpha_k+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x+1)}{\Gamma(\beta+N-x+1)} \times \mathcal{H}_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}}\left(\frac{\Gamma(\beta+N-x+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x+1)}\right),$$

donde

$$\mathcal{H}_{\vec{n}}^{\vec{\alpha}} = \prod_{1\le i\le r} \mathcal{H}_{n_i}^{\vec{\alpha}}, \quad \mathcal{H}_{n_i}^{\vec{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i + x + 1)} \bigtriangledown^{n_i} \Gamma(\alpha_i + n_i + x + 1).$$

De igual modo que en los casos anteriores, D. W. Lee probó en [36] la siguiente ecuación en diferencias de orden superior para estos *polinomios múltiples de Hahn* estudiados en [12]

$$\prod_{1\le i\le r} \mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_i+1,\beta+i-r+1,N-i+r-1}\left[\triangle Q_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta,N}(x)\right] + \sum_{1\le i\le r} d_i\left(|\vec{n}| + \alpha_i + \beta + 1\right) \times \prod_{1\le j\le i-1} \mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_j+1,\beta+j-r+1,N-j+r-1} \prod_{i+1\le k\le r} \mathcal{L}_{\vec{n}}^{\alpha_k+1,\beta+k-r,N+r-k}\left[Q_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta,N}(x)\right] = 0,$$

donde

$$d_i = \frac{\left(|\vec{n}| + \alpha_i + \beta + 1\right)^{-1} \displaystyle\prod_{1\le k\le r}(n_k + \alpha_k - \alpha_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le k\le r-1\\ k\neq i}}(\alpha_i - \alpha_k) \prod_{i+1\le l\le r}(\alpha_l - \alpha_i)} \Xi^{\vec{n},\vec{\alpha},\beta},$$

siendo

$$\Xi^{\vec{n},\vec{\alpha},\beta} = \sum_{1\le j\le r} \frac{(-1)^{i+j}(n_j + \alpha_j - \alpha_i)^{-1}(n_j + \alpha_j + \beta + 1) \displaystyle\prod_{1\le k\le r}(n_j + \alpha_j - \alpha_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le k\le r-1\\ k\neq j}}(n_k - n_j + \alpha_k - \alpha_j) \prod_{j+1\le l\le r}(n_j - n_l + \alpha_j - \alpha_l)}.$$

Más tarde, para el 2010, Jorge Arvesú en [10] introdujo por primera vez los *q-polinomios múltiples de Hahn* y en el 2012 inspirado en un trabajo de Lee [36] obtiene la siguiente q-ecuación en diferencias de orden superior para estos polinomios

$$\left(\prod_{1\leq i\leq r}\mathcal{D}^{\alpha_i+1,\beta+1,N-1}\right)\frac{\triangle}{\triangle x\left(s\right)}Q_{q,\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta,N}\left(s\right)=$$
$$-\,q^{-(N+|\vec{n}|+\beta-1)/2}\left(\sum_{1\leq i\leq r}\xi_i\left[|\vec{n}|+\beta+\alpha_i+1\right]_q\mathcal{D}^{\alpha_i+1,\beta+1,N-1}\right)Q_{q,\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta,N}\left(s\right).$$

Para más detalle véase [11].

Agradecimientos: Los autores expresan sus más sinceros agradecimientos a los árbitros por sus valoradas sugerencias. Agradecemos además, al proyecto ClaveMat, financiado por la unión Europea, `www.clavemat.com`.

Referencias

[1] R. Álvarez–Nodarse, D. Bonastos & Yu. F. Smirnov, *q-Deformed vibron model for diatomic molecules*, Phys. Rev., Vol 50, pp. 1088–1095, 1994.

[2] R. Álvarez–Nodarse & J. Arvesú, *On the q-polynomials in the exponential lattice*, Integral Transform. Spec. Funct., Vol 8, pp. 299–394, 1999.

[3] R. Álvarez–Nodarse, *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*, Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, No 26, Zaragoza, 2003.

[4] D. Bonatsov & C. Daskaloyannis, *Face Image Retrieval System using Discrete Orthogonal Moments*, International Conference on Bioinformatics and Biomedical Technology, Vol. 29, pp. 218–223, 2012.

[5] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge Univ. Press, 1985.

[6] G. E. Andrews, *q-Series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 66, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[7] G. E. Andrews, R. Askey & R. Roy, *Special functions*, Cambridge Univ. Press, 1999.

[8] I. Area, D. K. Dimitrov, E. Godoy & V. G. Paschoa, *Zeros of classical orthogonal polynomials of a discrete variable,* Math. Comp., Vol. 82, pp. 1069–1095, 2013.

[9] J. Arvesú, *Quantum Algebras $SU_Q(2)$ and $SU_Q(1,1)$ associated with certain q-Hahn polynomials: A revisited approach*, Electron. Trans. Numer. Anal., Vol. 24, pp. 24–44, 2006.

[10] J. Arvesú, *On some properties of q-Hahn multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math., Vol. 233, pp. 1462–1469, 2010.

[11] J. Arvesú & C. Esposito, *A high order q-difference equation for q-Hahn multiple orthogonal polynomials*, J. Diffe. Equ. Appl., Vol. 18, pp. 833–847, 2012.

[12] J. Arvesú, J. Coussement & W. van Assche, *Some discrete multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math., Vol. 153, pp. 19–45, 2003.

[13] J. Arvesú & A. Soria–Lorente, *First order non-homogeneous q-difference equation for Stieltjes function characterizing q-orthogonal polynomials*, J. Differ. Equ. Appl., pp. 1–25, 2012.
[14] R. Askey & S. K. Suslov, *The q-harmonic oscillator and an analogue of the Charlier polynomials*, J. Phys. A., Vol. 26, pp. 693–698, 1993.
[15] R. Askey & S. K. Suslov, *The q-harmonic oscillator and the Al-Salam and Carlitz polynomials*, Lett. Math. Phys., Vol. 29, pp. 123–132, 1993.
[16] N. M. Atakishiyev & S. K. Suslov, *Difference analogs of the harmonic oscillator*, Theoret. and Math. Phys., Vol. 85, pp. 442–444, 1991.
[17] N. M. Atakishiyev & S. K. Suslov, *A realization of the q-harmonic oscillator*, Theoret. and Math. Phys., Vol. 87, pp. 1055–1062, 1991.
[18] B. Bayraktara, T. Bernasb, J. P. Robinsonb & B. Rajwa, *A numerical recipe for accurate image reconstruction from discrete orthogonal moments*, Pattern Recognition, Vol. 40, pp. 659–669, 2007.
[19] D. Bonatsov & C. Daskaloyannis, *Quantum groups and their applications in nuclear physics*, Progress in Particle and Nuclear Physics, Vol. 43, pp. 537–618, 1999.
[20] C. V. L. Charlier, *Über die darstellung willkurlicher funktionen*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Vol. 25, No. 3, pp. 1–11, 1970.
[21] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
[22] C. F. Bracciali, T. E. Pérez & M. A. Piñar, *Stieltjes functions and discrete classical orthogonal polynomials*, Comput. Appl. Math., Vol 32, No 3, pp. 537–547, 2013.
[23] L. D. Faddeev, *Integrable models in $(1+1)$-dimensional quantum field theory*, In Les Houches Lectures, Elsevier, Amsterdam, pp. 563–573, 1982.
[24] N. J. Fine, *Basic hypergeometric series and applications*, Mathematical Surveys and Monographs 27, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
[25] G. Gasper & M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
[26] B. Gruber, Yu. F. Smirnov & Yu. I. Kharitonov, *Quantum algebra $u_q(gl(3))$ and nonlinear optics*, J. Russian Laser Res., Vol 24, pp. 56–68, 2003.
[27] W. Hahn, *Über orthogonalpolynomen die q-differentialgleichungen genugen,* Math. Nachr, Vol. 2, pp. 4–34, 1949.
[28] M. Haneczok & W. van Assche, *Interlacing properties of zeros of multiple orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 389, pp. 429–438, 2012.
[29] S. Jianfeng, X. Xingjun, L. Xiaoxue & W. Qi, *LIDAR Image Matching Based on Radial Krawtchouk Moments*, J. Comput. Inform. Systems, Vol. 6, No 7, pp. 2351–2357, 2010.
[30] S. Karlin & J. McGregor, *The Hahn polynomials, formulas and applications,* Scripta Math., Vol. 26, pp. 33–46, 1961.
[31] A. Khalid, A. Cherkaoui, H. Fadili & H. Qjidaa, *Krawtchouk Moment Feature Extraction for Neural Arabic Handwritten Words Recognition*, Int. J. Comput. Sci. Netw. Sec., Vol. 9, No 9, pp. 417–423, 2009.
[32] R. Koekoek & R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Report 98-17, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1998.
[33] R. Koekoek, P. A. Lesky & R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogue*, With a foreword by Tom H. Koornwinder, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2010.
[34] I. Lassoued, E. Zagrouba & Y. Chahir, *Video Action Classification: A New Approach combining Spatio-temporal Krawtchouk Moments and Laplacian Eigenmaps*, Seventh International Conference on Signal Image Technology & Internet-Based Systems, DOI 10.1109/SITIS.2011.65, pp. 291–297, 2011.

[35] D.W. Lee, *Difference equations for multiple Kravchuk polynommials,* J. Korean Math. Soc., Vol. 44, No 6, pp, 1429–1440, 2007.

[36] D.W. Lee, *Difference equations for discrete multiple orthogonal polynommials,* J. Approx. Theory, Vol. 150, pp. 132–152, 2008.

[37] J. C. Medem, R. Álvarez–Nodarse, & F. Marcellán, *On the q-polynomials: a distributional study*, J. Comput. Appl. Math., Vol 135, pp. 157–196, 2001.

[38] J. Meixner, *Orthogonale polynomsysteme mit einem besonderen Gestalt der erzeugenden funktion,* J. London Math. Soc., Vol. 9, pp. 6–13, 1934.

[39] H. Miki, L. Vinet & A. Zhedanov, *Non-Hermitian oscillator Hamiltonians and multiple* Charlier *polynommials,* Phys. Lett. A., Vol. 376, pp. 65–69, 2011.

[40] H. Miki, S. Tsujimoto, L. Vinet, & A. Zhedanov, *An algebraic model for the multiple Meixner polynomials of the first kind,* J. Phys. A: Math. Theor., Vol. 45, pp. 11, 2012.

[41] J. A. Minahan, *The q-Schrodinger equation*, Mod. Phys. Lett., Vol. 5, pp. 2625–2632, 1990.

[42] L. J. Morales, H. Gamboa & Y. Shmaliy, *A new class of discrete orthogonal polynomials for blind fitting of finite data,* Signal Processing, Vol. 93, pp, 1785–1793, 2013.

[43] A. F. Nikiforov, S.K. Suslov & V. B. Uvarov, I. A., *Classical Orthogonal polynomials of a Discrete Variable*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1991. (Edición en ruso, Nauka, Moscú, 1985).

[44] A. F. Nikiforov & V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.

[45] E. M. Nikishin & V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality,* Transl. Math Monographs vol 92, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1991.

[46] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert & C. W. Clark Editors, *NIST Handbook of Mathematical Functions,* Cambridge University Press, Cambridge UK 2010.

[47] J. Sheeba & D. Devaraj, *Face recognition using Krawtchouk moment,* Sadhana, Vol. 37, No 4, pp, 441–460, 2012.

[48] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy y Yu. I. Kharitonov, *Method of projection operators and the q-analog of the quantum theory of angular momentum.* Clebsch-Gordon coefficients and irreducible tensor operators, Soviet J. Nuclear Phys., Vol. 53, pp. 593–605, 1991.

[49] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoi & Yu. I. Kharitonov, *Projection operator and the q-analog of the quantum theory of angular momentum. Racah coefficients, 3j & 6j-symbols, and their symmetry properties,* Sov. J. Nucl. Phys., Vol. 53, pp, 1069–1086, 1991.

[50] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy & Yu. I. Kharitonov, *Tree technique and irreducible tensor operators for the* $SU_q\,(2)$ *quantum algebra:* $9j$ *symbols*, Soviet J. Nuclear Phys., Vol. 55, pp. 1599–1604, 1992.

[51] Yu. F. Smirnov & C. Campigotto, *The quantum q-Krawtchouk and q-Meixner polynomials and their related D-functions for the quantum groups* $SU_q\,(2)$ *and* $SU_q\,(1,1)$, J. Comput. Appl. Math., pp. 643–660, 2004.

[52] P. Thian, R. Paramesran & S. Member, *Image Analysis by Krawtchouk Moments,* IEEE Trans. Imag. Proc., Vol. 12, No 11, pp, 1367–1377, 2003.

[53] W. van Assche & E. Coussement, *Nearest neighbor recurrence relations for multiple orthogonal polynomials,* J. Approx. Theo., Vol. 163, pp. 1427–1448, 2011.

[54] J. L. Varona & E. Lafuente, *Fractales relacionados con polinomios ortogonales*, Actas del Congreso UNIMAC'94, Vol. 1, pp. 39–43, 1994.

[55] N. J. Vilenkin & A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions*, Vol. 1, 2, 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, The Netherlands, 1992/93.

[56] P. Yap & P. Raveendran, *Krawtchouk moments as a New Set of Discrete Orthogonal Moments for Image Reconstruction*, IEEE, Vol 6, pp. 908–911, 2002.

[57] J. Zhou, , H. Shu, H. Zhu, C. Toumoulin & L. Luo, *Image Analysis by Discrete Orthogonal Hahn Moments,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 524–531, 2005.

[58] H. Zhu, H. Shua, J. Zhoua, L. Luoa & J. L. Coatrieux, *Image analysis by discrete orthogonal dual Hahn moments*, Pattern Recognition, Vol 28, No 13, pp. 1688–1704, 2007.

[59] N. Zhu, H. Zhang & H. Z. Shu, *Medical Image Retrieval by Radial Krawtchouk Moments,* Journal of Biomedical Engineering Research, Vol. 27**,** pp. 40–44, 2008.

[60] H. Zhu, *Image representation using separable two-dimensional continuous and discrete orthogonal moments*, Pattern Recognition, Vol 45, pp. 1540–1558, 2012.

(Recibido en febrero de 2014; aceptado para su publicación en abril de 2014)

Anier Soria–Lorente
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad de Granma
Km 17.5 de la carretera de Bayamo–Manzanillo, Cuba
e-mail: `sorial@udg.co.cu`

Eduardo R. Moreno–Roque
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad de Granma
Km 17.5 de la carretera de Bayamo–Manzanillo, Cuba
e-mail: `emorenor@udg.co.cu`

Juan B. Martí–Zamora
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad de Granma
Km 17.5 de la carretera de Bayamo–Manzanillo, Cuba
e-mail: `juanbm@udg.co.cu`