

O grupo de túnel: estendendo a noção de grupo de tranças

OSCAR EDUARDO OCAMPO URIBE
Universidade de São Paulo, Brasil

ABSTRACT. Let M be an orientable surface. Motivated by [12], we construct a group, called the tunnel group of M , in a similar manner to the braid group of M . We exhibit some short exact sequences related to these groups, and also give an application to calculate the commensurator subgroups of the braid group $B_n D$ of the disc on n strings in the surface braid group $B_m M$ on m strings, where M is different from the sphere and $n \leq m$.

Key words and phrases. Tunnel, braid, surface, commensurator.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 20F36 - 20F38 - 57M99.

RESUMO. Neste artigo construímos um grupo similar ao grupo de tranças de superfície que chamaremos de *grupo de túnel*, seguindo a idéia dada em [12]. Mostraremos algumas sequências exatas curtas associadas com estes grupos assim como uma aplicação ao cálculo do subgrupo comensurador do grupo de tranças do disco com n cordas $B_n D$ no grupo de tranças de superfície $B_m M$ com m cordas, quando M é orientável distinta da esfera e $n \leq m$.

Introdução

Os grupos de tranças do plano \mathbb{E}^2 foram definidos por ARTIN [1], e muito estudados em [2, 3]. Posteriormente, eles foram generalizados usando a definição dada por FOX (com a noção de espaço de configuração) a espaços topológicos arbitrários [8]. Os grupos de tranças de superfícies compactas, conexas sem bordo tem sido amplamente estudados; tais grupos são finitamente apresentados, e apresentações destes foram inicialmente obtidas em [6, 13]. Para uma leitura inicial da teoria de tranças recomendamos [9, 10], livros que envolvem aspectos geométricos e algébricos, usando pontos de vista diferentes.

A teoria de tranças tem sido muito importante dentro e fora da matemática, aplicações desta teoria são encontradas em diversas áreas do conhecimento, ver [5]. Como exemplo disto destacamos uma aplicação na teoria de homotopia, onde os grupos de homotopia da esfera S^2 são isomorfos com certos quocientes de subgrupos de grupos de tranças chamados de grupos Brunnianos, ver [4]. Existem diversas variações ou generalizações destes grupos de tranças, como exemplo podemos citar os grupos de Garside [5], e os grupos de tranças virtuais [14]. Queremos expor neste texto o chamado *grupo de túnel com ℓ cordas* associado a uma superfície orientável, $T_\ell M$, cuja construção é similar aos grupos de tranças de superfície.

Este artigo está baseado em [12], trabalho que foi a fonte principal para a dissertação de mestrado do autor [11], e motivação para o estudo dos grupos de túneis com a intenção de estender alguns teoremas ali descritos. Esperamos também encontrar no futuro outras aplicações destes grupos.

Aprofundamos aqui o estudo do grupo de túnel e encontramos que tais grupos de túnel admitem, de forma natural, subgrupos chamados de *grupos de túneis puros*. Conseguimos também um par de sequências exatas curtas similares com a sequência exata curta de tranças e com a sequência exata curta de tranças puras induzida pela fibração de Fadell-Neuwirth, as quais são muito importantes na teoria de tranças.

Este texto está dividido da seguinte maneira: na Seção 1 definiremos túneis geométricos e formamos o grupo de túnel de uma superfície orientável, os elementos são classes de homotopia de túneis geométricos. Na Seção 2 mostraremos que existe um epimorfismo $\sigma : T_\ell M \rightarrow \Sigma_\ell$, chamaremos o núcleo desta aplicação de *grupo de túnel puro com ℓ cordas*, $PT_\ell M$. Também nesta seção provaremos que existem sequências exatas curtas associadas com o grupo de túnel e dois homomorfismos que conectam o grupo de túnel com o grupo de tranças de uma superfície orientável M . Finalmente, na Seção 3, daremos uma aplicação do que foi visto nas seções anteriores no cálculo do subgrupo comensurador de $B_n D$ em $B_m M$, denotado por $C_{B_m M} B_n D$.

1. Construindo o grupo de túnel

Durante todo este texto M representará uma superfície conexa orientável, podendo ser com bordo e $D \subseteq M$ representará um disco mergulhado em M . Para evitar patologias assumiremos que M é compacta, ou pelo menos que é uma variedade compacta “perfurada”, ou seja, M é homeomorfa a uma 2-variedade compacta, eventualmente com um conjunto finito de pontos removidos do interior de M . Lembremos a definição de túnel dada em [12].

Sejam $P_1, \dots, P_\ell \in M \setminus D$. Um *túnel (geométrico) com ℓ cordas sobre a superfície orientável M* baseado em $(D; P_1, \dots, P_\ell)$ é uma aplicação

$$H : D \cup \{P_1, \dots, P_\ell\} \times [0, 1] \rightarrow M$$

tal que

- (1) $H(x, 0) = H(x, 1) = x$, para todo $x \in D$,
- (2) $H(P_i, 0) = P_i$ e $H(P_i, 1) \in \{P_1, \dots, P_\ell\}$, para todo $P_i \in \{P_1, \dots, P_\ell\}$,
- (3) $H(x, t) \neq H(y, t)$, para todo $x, y \in D \cup \{P_1, \dots, P_\ell\}$, $x \neq y$, e para todo $t \in [0, 1]$.

Quando o conjunto $\{P_1, \dots, P_\ell\}$ for vazio, definimos um túnel (sem cordas) sobre M baseado em D como antes, mas desconsiderando a condição 2.

Notemos que se Q_1, \dots, Q_m são m pontos distintos no interior do disco D , então a restrição da aplicação H acima a $\{Q_1, \dots, Q_m, P_1, \dots, P_\ell\} \times [0, 1]$ fornece uma trança geométrica com $m + \ell$ cordas sobre M .

Dado um túnel com ℓ cordas H podemos associar claramente uma permutação σ no grupo simétrico dos elementos $\{P_1, \dots, P_\ell\}$, denotado por Σ_ℓ , da seguinte forma: $\sigma(P_i) = H(P_i, 1)$.

Exemplo 1. Consideremos M como sendo o disco e $\ell = 3$. Para efeitos de visualização podemos desenhar os túneis no espaço $M \times [0, 1]$. Na Figura 1 temos um desenho de um túnel geométrico com 3 cordas sobre o disco baseado em $(D; P_1, P_2, P_3)$. Observemos que a permutação associada a este túnel é $(1\ 3\ 2)$.

Também podemos notar que se Q é o centro do disco, então a restrição do túnel ao conjunto $\{Q, P_1, P_2, P_3\} \times [0, 1]$ é a trança sobre o disco com 4 cordas, uma delas dada pela linha pontilhada na figura, com a mesma permutação associada $(1\ 3\ 2)$.

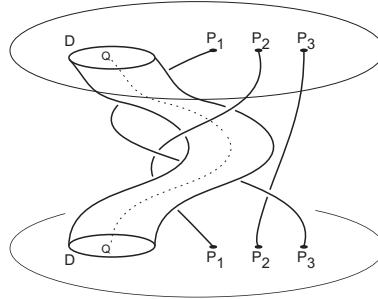


FIGURA 1. Túnel geométrico com 3 cordas sobre o disco.

Existe uma noção natural de homotopia de túneis como descrita na sequência. Sejam $H_1, H_2 : D \cup \{P_1, \dots, P_\ell\} \times [0, 1] \rightarrow M$ dois túneis com mesma permutação σ . Dizemos que H_1, H_2 são *homotópicos* se existem $\ell + 1$ aplicações contínuas F_0, F_1, \dots, F_ℓ , onde para todo $i = 1, \dots, \ell$,

$$F_0 : D \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M \text{ e } F_i : \{P_i\} \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

verificam as condições:

- $F_0(x, s, 0) = H_1(x, s)$, $F_0(x, s, 1) = H_2(x, s)$, para todo $x \in D$ e para todo $s \in [0, 1]$,
- $F_0(x, 0, t) = F_0(x, 1, t) = x$, para todo $x \in D$ e para todo $t \in [0, 1]$,
- $F_i(P_i, s, 0) = H_1(P_i, s)$, $F_i(P_i, s, 1) = H_2(P_i, s)$, para todo $s \in [0, 1]$,
- $F_i(P_i, 0, t) = P_i$, $F_i(P_i, 1, t) = H_1(P_i, 1) = H_2(P_i, 1)$, para todo $t \in [0, 1]$,

e tais que se definimos

$$H_0^t : D \cup \{P_1, \dots, P_\ell\} \times [0, 1] \longrightarrow M, \text{ por}$$

- $H_0^t(x, s) = F_0(x, s, t)$, para todo $x \in D$ e para todo $s \in [0, 1]$, e
- $H_0^t(P_i, s) = F_i(P_i, s, t)$, para todo $s \in [0, 1]$, e para todo $i = 1, \dots, \ell$,

então H_0^t é um túnel geométrico com ℓ cordas (com permutação σ) para cada $0 \leq t \leq 1$.

Dizemos que dois túneis geométricos estão relacionados se existe uma homotopia entre eles, esta relação é uma relação de equivalência. Podemos formar assim o conjunto de classes de equivalência de túneis homotópicos, vamos munir este conjunto com uma operação dada por concatenação, como em tranças. Verifica-se facilmente que os axiomas de grupo são satisfeitos, o elemento neutro é o representante do túnel geométrico dado pela aplicação identidade e o elemento inverso de um túnel h , com representante H , é a classe do túnel geométrico \tilde{H} tal que $\tilde{H}(x, s) = H(x, 1 - s)$.

O grupo de túnel com ℓ cordas sobre a superfície orientável M baseado em $(D; P_1, \dots, P_\ell)$ é o grupo

$$T_\ell M = T_\ell M(D; P_1, \dots, P_\ell)$$

cujos elementos são as classes de homotopia de túneis com ℓ cordas sobre M baseados em $(D; P_1, \dots, P_\ell)$.

Observemos que, embora o conjunto $\{P_1, \dots, P_\ell\}$ seja vazio, podemos definir túneis geométricos sobre uma superfície orientável M . Como acima, podemos formar um grupo com as classes homotópicas destes elementos e denotamos tal grupo por $T_0 M = T_0 M(D)$.

2. Sequências associadas ao grupo de túnel e túneis puros

Queremos obter sequências exatas curtas em grupos de túnel, similares com aquelas que encontramos na teoria de grupos de tranças e que são ferramentas fortemente usadas nesta teoria.

A aplicação $\sigma : T_\ell M \longrightarrow \Sigma_\ell$, que associa a cada túnel h a permutação associada com um túnel geométrico representante H , é um epimorfismo. Denotamos o núcleo de σ por $PT_\ell M$ e o chamamos de *grupo de túneis puros com ℓ cordas*. Obtemos assim uma **sequência exata curta para túneis**

$$1 \longrightarrow PT_\ell M \longrightarrow T_\ell M \xrightarrow{\sigma} \Sigma_\ell \longrightarrow 1.$$

No caso em que o conjunto $\{P_1, \dots, P_\ell\}$ é vazio convencionaremos que $PT_0M = T_0M$.

Denotemos por B_mM o grupo de tranças com m cordas sobre a superfície M e por PB_mM o subgrupo de B_mM chamado de grupo de tranças puras (ou coloridas) com m cordas sobre a superfície M , ver [9, 10].

Observação 2. Se Q_1, \dots, Q_m são pontos pertencentes ao interior do disco D , e se tem-se uma homotopia de túneis com ℓ cordas então essa homotopia se restringe a uma homotopia de tranças (cujos pontos bases são $Q_1, \dots, Q_m, P_1, \dots, P_\ell$), e portanto as tranças geométricas associadas representam o mesmo elemento em $B_{m+\ell}M$.

Exemplo 3. Consideremos neste exemplo um túnel geométrico com ℓ cordas H baseado em $(D; P_1, \dots, P_\ell)$ sobre uma superfície M orientável arbitrária. Construímos H da seguinte forma, sobre o conjunto $\{P_1, \dots, P_\ell\} \times [0, 1]$ definimos caminhos constantes, e sobre $D \times [0, 1]$ definimos a aplicação que faz no tempo $[0, 1]$ uma rotação de 2π no disco D , como ilustra a Figura 2.

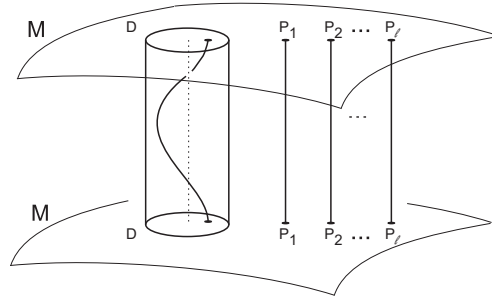


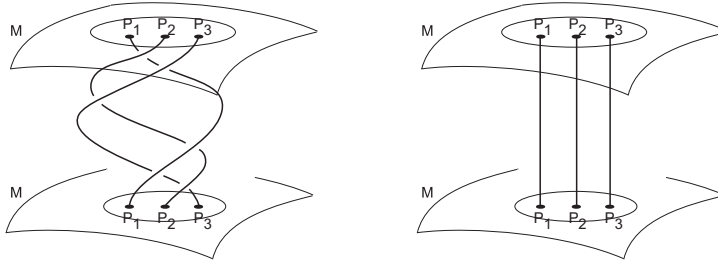
FIGURA 2. Túnel geométrico sobre a superfície M .

A classe h do túnel geométrico H pertence ao subgrupo de túneis puros, ou seja a permutação associada a este túnel é trivial. Mas o túnel H não é homotópico com o túnel identidade, verifiquemos no caso extremo $\ell = 0$ que H restrita a $D \times [0, 1]$ não é homotópica com a aplicação identidade $I : D \times [0, 1] \longrightarrow M$.

De fato, se existisse uma homotopia F entre estas duas aplicações, então a restrição de F a três pontos dentro do disco daria uma homotopia entre as tranças da Figura 3 o que é absurdo. O caso de $M = S^2$ é garantido por [7], veja também [9, Teorema 6.1, Capítulo I].

Notemos que $[T_\ell M : PT_\ell M] = \ell!$ como acontece de forma similar nos grupos de tranças. Seja $0 \leq r < \ell$ e consideremos as seguintes aplicações naturais, induzidas por aplicações geométricas,

$$\alpha : PB_{\ell-r}(M \setminus (D \cup \{P_1, \dots, P_r\})) \longrightarrow PT_\ell M,$$

FIGURA 3. Tranças não homotópicas sobre a superfície M .

$$\beta : PT_\ell M \longrightarrow PT_r M,$$

onde α é induzida por uma aplicação geométrica que “coloca” caminhos constantes em D, P_1, \dots, P_r , e β é induzida por uma aplicação geométrica que “esquece” os $\ell - r$ últimos caminhos. No caso em que $r = 0$ tomamos o conjunto de pontos $\{P_1, \dots, P_r\}$ vazio.

Proposição 4. *Se $M \neq S^2$ e $0 \leq r < \ell$ ou se $M = S^2$ e $2 \leq r < \ell$, então a seguinte sequência é exata*

$$1 \longrightarrow PB_{\ell-r}(M \setminus (D \cup \{P_1, \dots, P_r\})) \xrightarrow{\alpha} PT_\ell M \xrightarrow{\beta} PT_r M \longrightarrow 1.$$

Demonstração. Dado $h \in PT_\ell M$ sabemos que dado H um túnel geométrico representante de h , a restrição de H ao subconjunto $\{Q, P_1, \dots, P_\ell\}$, onde Q é o centro do disco D , define uma trança geométrica

$$b = (H(Q, t), H(P_1, t), \dots, H(P_\ell, t)).$$

Consideramos assim o homomorfismo $\hat{\kappa} : PT_\ell M \longrightarrow PB_{\ell+1}M$ tal que $\hat{\kappa}(h) = f$ onde f é a classe de equivalência de b .

É claro que $M \setminus (D \cup \{P_1, \dots, P_r\})$ é homeomorfo com $M \setminus (\{Q, P_1, \dots, P_r\})$, então podemos dizer que

$$PB_{\ell-r}(M \setminus (D \cup \{P_1, \dots, P_r\})) = PB_{\ell-r}(M \setminus (\{Q, P_1, \dots, P_r\})).$$

Portanto, que α é um monomorfismo segue do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} PB_{\ell-r}(M \setminus (D \cup \{P_1, \dots, P_r\})) & \xrightarrow{\alpha} & PT_\ell M \\ \parallel & & \downarrow \\ PB_{\ell-r}(M \setminus (\{Q, P_1, \dots, P_r\})) & \longrightarrow & PB_{\ell+1}M. \end{array}$$

De fato, a aplicação que se encontra na linha de baixo desse diagrama comutativo, ao nível de grupos de tranças, é um monomorfismo devido à sequência exata curta de tranças puras induzida pela fibração de Fadell-Neuwirth, ver [9, 11].

Provemos que β é um epimorfismo. Sejam $h \in PT_r M$ um túnel puro e H um representante de h . Então, H é uma aplicação definida em $(D \cup \{P_1, \dots, P_r\}) \times [0, 1]$. Estendemos H a uma aplicação $\hat{H} : D \cup \{P_1, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_\ell\} \times [0, 1] \rightarrow M$ pondo caminhos constantes em P_{r+1}, \dots, P_ℓ , e se for necessário, por meio de uma “ligeira homotopia” evitamos que $H(P_i, t) = P_j$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, para todo $t \in [0, 1]$ e para todo $j \in \{r+1, \dots, \ell\}$. Logo, \hat{H} é um túnel geométrico com ℓ cordas e sua classe de equivalência \hat{h} pertence a $PT_\ell M$ e satisfaz $\beta(\hat{h}) = h$.

Vamos demonstrar agora que o núcleo de β é igual à imagem de α . Suponhamos que h pertence ao núcleo de β , então $\beta(h) = 1$. Ou seja, podemos escolher um representante H de h o qual tem caminhos constantes em P_1, \dots, P_r e um caminho constante “gordo” em D . Se considerarmos a trança $b = (b_{r+1}, \dots, b_\ell)$ dada por $b_j(t) = H(P_j, t)$, com $j = r+1, \dots, \ell$, teremos que, para a classe de b que chamaremos de f , $\alpha(f) = h$. Por outro lado, tomemos h na imagem de α , então $h = \alpha(f)$ para algum $f \in PB_{\ell-r}(M \setminus (D \cup \{P_1, \dots, P_r\}))$. Portanto, h tem um representante geométrico H tal que $H(D, t)$ e $H(P_i, t)$ é constante para todo $t \in [0, 1]$ e para todo $P_i \in \{P_1, \dots, P_r\}$. Logo, $\beta(h) = 1$. \square

Observação 5. Notemos que o túnel geométrico do Exemplo 3 não é homotópico com o túnel identidade, mas as classes de ambos túneis são levados pela aplicação $\hat{\kappa}$ no elemento identidade de $PB_{\ell+1}M$. Portanto, $\hat{\kappa}$ não é um monomorfismo.

A sequência exata curta obtida na proposição anterior é análoga com a famosa sequência exata curta de tranças puras induzida pela fibração de Fadell-Neuwirth.

Na sequência, queremos definir um par de aplicações que fazem conexão entre grupos de túnel e grupos de tranças. A primeira aplicação é igual àquela que encontramos em [12]. Definimos um homomorfismo

$$\tau : B_n D \times T_\ell M \longrightarrow B_{n+\ell} M$$

como segue: sejam $f \in B_n D$ e $h \in T_\ell M$, suponhamos que os pontos base para as tranças em $B_n D$ são $\{Q_1, \dots, Q_n\}$. Sejam H um túnel sobre M baseado em $(D; P_1, \dots, P_\ell)$ que representa h e $b = (b_1, \dots, b_n)$ uma trança sobre D que representa f . Seja $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\ell)$ uma trança sobre M definida por

- $\tilde{b}_j(t) = H(b_j(t), t)$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ e para todo $t \in [0, 1]$,
- $\tilde{c}_i(t) = H(P_i, t)$, para todo $i \in \{1, \dots, \ell\}$ e para todo $t \in [0, 1]$.

Então, $\tau(f, h)$ é o elemento de $B_{n+\ell} M$ representado por \tilde{b} .

Propriedades 6. Destacamos algumas propriedades da aplicação τ definida anteriormente.

- (1) Sejam 1 o elemento neutro em $T_\ell M$ e $f \in B_n D$, então $\tau(f, 1) = \bar{f}$, onde \bar{f} é a trança de $B_{n+\ell} M$ que pode ser representada geometricamente por uma trança com as primeiras n cordas correspondentes a um representante de f e as últimas ℓ cordas constantes. Por simplicidade na notação, não vamos distinguir f e \bar{f} .
- (2) Sejam 1 o elemento neutro em $B_n D$ e $h \in T_\ell M$, então $\tau(1, h)$ é a classe de trança em $B_{n+\ell} M$ correspondente ao representante de túnel, restrito aos pontos Q_i , para todo $i = 1, \dots, n$, e aos pontos P_i , para todo $i = 1, \dots, \ell$.
- (3) Sejam $f \in B_n D$ e $h \in T_\ell M$. Então, $\tau(f, h)^{-1} = \tau(f^{-1}, h^{-1})$. Esta é uma propriedade direta do homomorfismo entre grupos.

A segunda aplicação é uma ligeira generalização do homomorfismo κ construído em [12]. Como no caso do grupo de túnel podemos definir um homomorfismo $\sigma : B_m M \rightarrow \Sigma_m$. Denotamos por

$$B_{r+\ell}^r M = B_{r+\ell}^r M(Q_1, \dots, Q_r, P_1, \dots, P_\ell)$$

o subgrupo de $B_{r+\ell} M = B_{r+\ell} M(Q_1, \dots, Q_r, P_1, \dots, P_\ell)$ formado pelas tranças $g \in B_{r+\ell} M$ tais que $\sigma(g)(Q_i) = Q_i$, para todo $i = 1, \dots, r$. Notemos que $B_{r+\ell}^r M$ é formado pelas tranças de $B_{r+\ell} M$ tais que a coleção das primeiras r cordas é uma trança pura sobre M .

Suponhamos que os pontos Q_1, \dots, Q_r pertençam ao disco mencionado na definição de túnel. Definimos um homomorfismo

$$\kappa_r : T_\ell M \rightarrow B_{r+\ell}^r M$$

como segue: sejam $h \in T_\ell M$ e H um túnel sobre M baseado em $(D; P_1, \dots, P_\ell)$ que representa h . Seja $b = (b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_\ell)$ a trança definida por

- $b_j(t) = H(Q_j, t)$, para $j \in \{1, \dots, r\}$ e para todo $t \in [0, 1]$,
- $c_i(t) = H(P_i, t)$, para $i \in \{1, \dots, \ell\}$ e para todo $t \in [0, 1]$.

Então, $\kappa_r(h)$ é o elemento de $B_{r+\ell}^r M$ representado por b .

Observemos que quando $r = 1$ a aplicação κ_1 é exatamente a aplicação κ definida em [12], portanto de agora em diante assumimos que $\kappa_1 = \kappa$.

3. Uma aplicação do grupo de túnel

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . O conjunto formado pelos elementos $g \in G$ tais que $gHg^{-1} \cap H$ tem índice finito em gHg^{-1} e em H , é um subgrupo de G chamado o *subgrupo comensurador* de H em G , que denotamos por $C_G(H)$.

Denotemos por $Z_G(H)$, e $N_G(H)$ o centralizador de H em G , e o normalizador de H em G , respectivamente. O seguinte resultado relacionando tais subgrupos de G pode ser demonstrado facilmente.

Proposição 7. $Z_G(H) \subseteq N_G(H) \subseteq C_G(H)$.

Mostraremos como aplicar o grupo de túnel para calcular o subgrupo comensurador do grupo de tranças $B_n D$ em $B_m M$, com $n \leq m$, no caso em que M é uma superfície orientável distinta da esfera. Os resultados aqui descritos são encontrados em [12].

Usemos inicialmente o homomorfismo $\tau : B_n D \times T_{m-n} M \longrightarrow B_m M$, e denotemos por $C_{n,m-n} M$ a imagem de τ . Sejam $f, f' \in B_n D$ e $h \in T_{m-n} M$. Então,

$$\tau(f, h) \cdot f' \cdot \tau(f, h)^{-1} = \tau(ff'f^{-1}, 1) = ff'f^{-1} \in B_n D.$$

Podemos usar o anterior para provar que

$$C_{n,m-n} M \subseteq N_{B_m M}(B_n D).$$

De fato, dado $g \in C_{n,m-n} M$ existem $f \in B_n D$ e $h \in T_{m-n} M$ tais que $\tau(f, h) = g \in B_m M$. Seja $f' \in B_n D$, então pelo comentado acima $gf'g^{-1} \in B_n D$. Logo, $gB_n Dg^{-1} \subseteq B_n D$. Além disso, se $f' \in B_n D$, sabemos que $f' = g(g^{-1}f'g)g^{-1} = gf''g^{-1}$, com $f'' = (g^{-1}f'g) \in B_n D$ pelo comentado acima. Logo, $B_n D \subseteq gB_n Dg^{-1}$. Como consequência temos que $gB_n Dg^{-1} = B_n D$, ou seja, g pertence ao normalizador $N_{B_m M}(B_n D)$.

Portanto $C_{n,m-n} M \subseteq N_{B_m M}(B_n D)$ e ainda mais $C_{n,m-n} M \subseteq C_{B_m M}(B_n D)$ pela Proposição 7. Na realidade $C_{B_m M}(B_n D) = N_{B_m M}(B_n D) = C_{n,m-n} M$, como mostra o seguinte teorema.

Teorema 8. *Sejam $n \geq 2$ e M uma superfície orientável distinta da esfera S^2 . Então,*

$$C_{B_m M}(B_n D) = N_{B_m M}(B_n D) = C_{n,m-n} M.$$

É claro que se $n = 1$, então $C_{B_m M}(B_n D) = B_m M$. Para demonstrar o Teorema 8 é fundamental provar o seguinte lema. Oferecemos aqui uma prova alternativa à dada em [12], usando as propriedades e as seqüências associadas com o grupo de túnel descritas anteriormente.

Lema 9. *Seja M uma superfície orientável distinta da esfera S^2 . O morfismo $\kappa : T_\ell M \longrightarrow B_{\ell+1}^1 M$ é sobrejetor.*

A idéia usada na prova do lema é um argumento clássico da teoria de tranças, envolvendo toda a ferramenta das seqüências construídas para tais grupos. O túnel construído no Exemplo 3 garante que κ não é um monomorfismo.

Observação 10. Até o momento não sabemos se resultados similares aos dois anteriores valem para superfícies não orientáveis.

Demonstração do Lema 9. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & PT_\ell M & \longrightarrow & T_\ell M & \longrightarrow & \Sigma_\ell \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \hat{\kappa}_\ell & & \downarrow \kappa & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & PB_{\ell+1} M & \longrightarrow & B_{\ell+1}^1 M & \longrightarrow & \Sigma_\ell \longrightarrow 1, \end{array}$$

onde $\hat{\kappa}_\ell$ é a restrição da aplicação κ ao subgrupo $PT_\ell M$. Desse diagrama comutativo temos que se $\hat{\kappa}_\ell$ é um epimorfismo, então pelo lema dos cinco segue que κ também é um epimorfismo.

Seja $Q \in D$, vejamos agora o seguinte diagrama comutativo, onde a sequência exata curta da linha de acima é garantida pela Proposição 4 com $r = \ell - 1$, e a outra sequência exata curta é dada pela fibração de Fadell-Neuwirth.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(M \setminus (D \cup \{P_1, \dots, P_r\})) & \xrightarrow{\alpha} & PT_\ell M & \xrightarrow{\beta} & PT_{\ell-1} M \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \hat{\kappa}_\ell & & \downarrow \hat{\kappa}_{\ell-1} \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(M \setminus \{Q, P_1, \dots, P_r\}) & \longrightarrow & PB_{\ell+1} M & \longrightarrow & PB_\ell M \longrightarrow 1. \end{array}$$

Por um argumento indutivo, usando o lema dos cinco, podemos provar que $\hat{\kappa}_\ell$ é um epimorfismo. Portanto basta demonstrar o caso $\ell = 0$ para mostrar que o homomorfismo $\kappa : T_\ell M \longrightarrow B_{\ell+1}^1 M$ é um epimorfismo.

Mostremos então que $\hat{\kappa}_0 : PT_0 M \longrightarrow PB_1 M = \pi_1(M, Q)$ é um epimorfismo. Sejam $\alpha \in \pi_1(M, Q)$ e $f : (S^1, 1) \longrightarrow (M, Q)$ um caminho que representa α , podemos escolher tal caminho de forma que $f(S^1) \cap \partial M = \emptyset$, talvez usando uma “ligeira homotopia”.

Existe uma vizinhança tubular do caminho f inteiramente contida no interior de M . Seja \tilde{D} um disco em M com centro em Q que faz parte da vizinhança tubular. Podemos pensar na vizinhança tubular como uma aplicação $\tilde{H} : \tilde{D} \times [0, 1] \longrightarrow M$ tal que $\tilde{H}(x, 0) = \tilde{H}(x, 1)$ para todo $x \in \tilde{D}$, pois $\tilde{H}(\tilde{D}, 0)$ é homeomorfo com $\tilde{H}(\tilde{D}, 1)$. Portanto \tilde{H} satisfaz as condições de túnel geométrico.

O problema consiste em que temos um disco D fixado na definição de túnel. Se o disco D está contido no disco \tilde{D} , basta definir H como sendo a restrição de \tilde{H} ao disco D , tal H é um túnel geométrico e satisfaz $\kappa_0(h) = \alpha$, com h a classe de equivalência de H .

Agora, suponhamos que o disco \tilde{D} está contido no disco D . Sabemos que D e \tilde{D} são homeomorfos, portanto existe uma aplicação bi-contínua e bijetora $\psi : D \longrightarrow \tilde{D}$ que transforma um disco no outro. Tal deformação pode ser expressa por meio de uma homotopia $\varphi : D \times [0, 1] \longrightarrow M$ tal que $\varphi(x, 0) = x$ e $\varphi(x, 1) = \psi(x)$. Definamos a aplicação H da seguinte forma:

$$H(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, 3t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/3, \\ \tilde{H}(x, 3t - 1), & \text{se } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ \varphi(x, 3(1 - t)), & \text{se } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tal aplicação está bem definida, satisfaz as condições de túnel geométrico e se h é a classe de equivalência de H , então $\kappa_0(h) = \alpha$. Logo, κ_0 é um epimorfismo, como queríamos provar. \checkmark

Pelo Lema 9, podemos fixar uma seção (entre conjuntos) $\iota_0 : B_{\ell+1}^1 M \longrightarrow T_\ell M$ de κ . O Teorema 8 é uma consequência direta do seguinte lema, o qual é

provado em [12]. Para a prova de tal lema é indispensável que o homomorfismo κ seja sobrejetor.

Lema 11. *Sejam $n \geq 2$ e M uma superfície orientável distinta da esfera S^2 . Seja $g \in C_{B_m M}(B_n D)$. Existem $f \in B_n D$ e $u \in B_{m-n+1}^1 M$ tais que*

$$g = \tau(f, \iota_0(u)).$$

Demonstração do Teorema 8. Já provamos que $C_{n,m-n}M \subseteq N_{B_m M}(B_n D) \subseteq C_{B_m M}(B_n D)$. Sejam $n \geq 2$ e $g \in C_{B_m M}(B_n D)$, pelo Lema 11 existem $f \in B_n D$ e $u \in B_{m-n+1}^1 M$ tais que $g = \tau(f, \iota_0(u))$, ou seja, $g \in C_{n,m-n}M$. Logo, $C_{n,m-n}M = N_{B_m M}(B_n D) = C_{B_m M}(B_n D)$. \checkmark

Denotemos por $Z_{n,m-n}M$ a imagem por τ de $Z(B_n D) \times T_{m-n}M$, onde $Z(B_n D)$ é o centro do grupo $B_n D$. Temos que,

$$Z_{n,m-n}M \subseteq Z_{B_m M}(B_n D).$$

De fato, dado $g \in Z_{n,m-n}M$, existem $f \in Z(B_n D)$ e $h \in T_{m-n}M$ tais que $\tau(f, h) = g \in B_m M$. Seja $f' \in B_n D$, então

$$\tau(f, h) \cdot f' = \tau(f, h)\tau(f', 1) = \tau(ff', h) = \tau(f'f, h) = f'\tau(f, h).$$

Logo, $Z_{n,m-n}M \subseteq Z_{B_m M}(B_n D)$.

Corolário 12. *Sejam $n \geq 2$ e M uma superfície orientável distinta da esfera S^2 . Então,*

$$Z_{B_m M}(B_n D) = Z_{n,m-n}M.$$

Demonstração. Provamos acima que $Z_{n,m-n}M \subseteq Z_{B_m M}(B_n D)$. Inversamente, se $g \in Z_{B_m M}(B_n D)$, então $g \in C_{n,m-n}M$ pela Proposição 7 e o Teorema 8, e portanto existem $f' \in B_n D$ e $h \in T_{m-n}M$ tais que $\tau(f', h) = g \in B_m M$. Provemos que $f' \in Z(B_n D)$. Como $\tau(f', h)\tau(f, 1) = \tau(f, 1)\tau(f', h)$ para todo $f \in B_n D$, então $\tau(f'f, h)\tau((ff')^{-1}, h^{-1}) = 1$, donde segue que $f'f = ff'$, para todo $f \in B_n D$. Logo, $f' \in Z(B_n D)$ e como consequência $g = \tau(f', h) \in Z_{n,m-n}M$. \checkmark

Em [12] prova-se o seguinte teorema, que dá uma descrição para o comensurador $C_{B_m M}(B_n D)$.

Teorema 13. *Sejam $n \geq 2$ e M uma superfície com bordo não vazio ou um toro. Então,*

$$\begin{aligned} C_{n,m-n}M &\simeq B_{m-n+1}^1 M \times B_n D \text{ e} \\ Z_{n,m-n}M &\simeq B_{m-n+1}^1 M \times Z(B_n D). \end{aligned}$$

Continuamos trabalhando para estender a definição de túnel às superfícies não orientáveis, o intuito é que a estrutura algébrica seja um pouco mais fraca,

a saber de grupóide. Esperamos que, com esta definição possamos alcançar resultados similares ao descrito no Teorema 8. Também estamos tentando provar outras propriedades e relacionar outros fatos de grupos de tranças a estes grupos de túnel construídos.

Agradecimentos. Durante o desenvolvimento deste artigo o autor recebeu apoio das seguintes entidades: agência de fomento CNPq, fundação FAPESP projeto número 2008/58122-6 e projeto de cooperação Internacional USP-Cofecub número 105/06. Quero agradecer aos professores DACIBERG LIMA GONÇALVES da Universidade de São Paulo e JOHN GUASCHI da Université de Caen por me orientarem e ajudarem com as dúvidas e questões destas teorias. Agradeço também ao ANDERSON PAIÃO DOS SANTOS pela colaboração na redação deste texto.

Referências

- [1] E. ARTIN, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), 47–72.
- [2] E. ARTIN, *Theory of Braids*, Ann. Math. **48** (1947), 101–126.
- [3] E. ARTIN, *Braids and permutations*, Ann. Math. **48** (1947), 643–649.
- [4] A. J. BERRICK, F. R. COHEN, Y. L. WONG & J. WU, *Configurations, braids and homotopy groups*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 265–326.
- [5] J. BIRMAN, T. BRENDLE, *Braids: a survey*. In *Handbook of knot theory* (ed. W. Menasco and M. Thistlethwaite). Elsevier: Amsterdam, 2005, 19–104.
- [6] J. BIRMAN, *On braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 41–72.
- [7] E. FADELL, *Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac*, Duke Math. Journal **29** (1962), 231–242.
- [8] R. H. FOX, L. NEUWIRTH, *The braid groups*, Math. Scand. **10** (1962), 119–126.
- [9] V. L. HANSEN, *Braids and Coverings: Selected Topics*, Cambridge University Press: Cambridge, 1989.
- [10] K. MURASUGI, B. KURPITA, *A study of braids*. Mathematics and its Applications, no. 484. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1999.
- [11] O. E. OCAMPO, *Subgrupos geométricos e seus comensuradores em grupos de tranças de superfície*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo (Brasil), 2009.
- [12] L. PARIS, D. ROLFSEN, *Geometric subgroups of surface braid groups*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 417–472.
- [13] G. P. SCOTT, *Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface*, Proc. Camb. Phil. Soc. **68** (1970), 605–617.
- [14] V. V. VERSHININ, *On homology of virtual braids and Burau representation*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001), 795–812.

(Recibido en julio de 2009. Aceptado para publicación en diciembre de 2009)

OSCAR EDUARDO OCAMPO URIBE
IME, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SÃO PAULO, BRASIL
e-mail: oecampo@ime.usp.br