Sociedad Colombiana de Matemáticas
XV Congreso Nacional de Matemáticas
2005 **Apuntes**

Lecturas Matemáticas
Volumen Especial (2006), páginas 299–330

Valoración de contratos hipotecarios a través de un modelo de opciones

Nicolás Penagos Forero
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

Abstract. The increase in the number of mortgages in Colombia and the lack of adequate measuring tools has generated a special interest in the study of this type of contracts, from both a financial and mathematical point of view. This research, the first in its type in Colombia, focuses in valuing residential mortgages (in Colombian Pesos) analyzing the two financial options that the law permits to the debtor: default and prepay. The equation that models the price is developed, the stochastic variables are eliminated, the boundary conditions are proposed, and the resulting PDE is solved by means of finite difference. Several possible cases are studied, and an analysis is presented both of the mortgage value and of the regions of the resulting space where one of the two options is exercised. The principal conclusions of this study give evidence that the Colombian interest rates should be lowered.

Key words and phrases. Options, Mortgage valuation, Finite difference, Financial Mathematics, Default, Prepay, Residential mortgages.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 91B28.

Resumen. El incremento en el número de préstamos hipotecarios y la falta de herramientas adecuadas de medición han generado un creciente interés en el estudio de los contratos hipotecarios desde el punto de vista de las matemáticas financieras. Esta investigación, la primera de su tipo en Colombia, se enfoca en valorar contratos hipotecarios residenciales denominados en pesos, tomando en cuenta las dos opciones financieras que tiene por ley un deudor: el *default* y el prepago. Se desarrolla la ecuación que modela el precio de la hipoteca, se eliminan las variables estocásticas, se plantean las condiciones de frontera y finalmente se resuelve la EDP resultante por medio del método de las diferencias finitas. Se examinan varios casos posibles de préstamos y se analiza tanto el valor de la hipoteca para el deudor como las regiones del espacio en cuestión donde se ejerce una o la otra opción. Las conclusiones principales del estudio evidencian que las tasas de colocación deben disminuir en el país.

Introducción

Como con todo activo financiero, debe existir una metodología clara y a la vez precisa para valorar una hipoteca. En Colombia la valoración de hipotecas adquiere un carácter de suma importancia dado que la gran mayoría de los compradores, para acceder a una vivienda propia, debe solicitar un préstamo. En los últimos años hemos sido testigos en nuestro país de la crisis que llevó a la puesta en marcha del sistema de la Unidad de Valor Real (UVR) y a la adopción de medidas para garantizar el buen funcionamiento del sistema hipotecario. Se crearon nuevas herramientas, tales como los títulos hipotecarios, que intentan transferir los riesgos presentes en el contrato hipotecario a inversionistas dispuestos a aceptarlos; en el largo plazo, los bancos ya no tendrán que cobrar las elevadas tasas actuales por asumir ese riesgo, y por consiguiente las tasas de colocación podrán bajar, haciendo que más gente pueda comprar vivienda propia. En este proceso, la valoración de la hipoteca juega un papel vital, al establecer exactamente cuánto vale el contrato, tomando en cuenta todas las posibilidades a futuro.

En la actualidad, en Colombia y aún en otros lugares del mundo, se emplean métodos estadísticos de valoración que solamente se basan en la historia pasada para predecir lo que ocurrirá en el futuro. No obstante, se acepta ampliamente que un contrato hipotecario es un activo sujeto a variables estocásticas, cuyo tratamiento requiere de otros métodos más adecuados. Un modelo de opciones como el presentado en este trabajo, responde a esta necesidad, y sin embargo también es lo suficientemente fácil de implementar y entender.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en la sección 1 se analizan las particularidades financieras y jurídicas del contrato hipotecario en Colombia. En la sección 2, se introducen las dos fuentes de incertidumbre a la que está sujeta una hipoteca, así como también sus respectivos modelos estocásticos. La sección 3 se enfoca en establecer la ecuación diferencial que modela el comportamiento de la hipoteca, al igual que los supuestos hechos en el estudio. Las secciones 4 y 5 exponen un método numérico para resolver la ecuación propuesta, así como su aplicación a ejemplos de casos específicos. Finalmente, las conclusiones se presentan en la sección 6.

1. El contrato hipotecario en Colombia

1.1. El punto de vista del derecho. Según lo estipula el Código Civil Colombiano, "la hipoteca es un derecho de prenda constituido sobre inmuebles que no dejan por eso de permanecer en poder del deudor".[1] Una hipoteca

[1]Código Civil ([4], artículo 2432, Título XXXVII.)

se firma entre dos partes, y se registra en una fechas y con unas condiciones previamente establecidas. Una parte se denomina el deudor y la otra, el acreedor.

En la práctica, una hipoteca se firma entre una entidad bancaria, y una persona, natural o jurídica. En este proyecto, solamente se considerarán las hipotecas firmadas con personas naturales sobre inmuebles residenciales; es decir, se excluyen las hipotecas sobre bodegas, fábricas o inmuebles cuya función sea diferente a la residencial. El contrato hipotecario obliga al deudor a pagarle al acreedor una suma (correspondiente al préstamo más intereses generados) durante un cierto periodo de tiempo, en unas fechas establecidas. El inmueble sirve como garantía, dándole al acreedor el derecho de reclamar su propiedad en caso de que el deudor incumpla con los pagos prometidos.

En Colombia existen numerosos tipos de contratos hipotecarios. Se pueden calificar según el sistema de amortización que usen (régimen que controla la Superintendencia Bancaria); el sistema de cálculo de la tasa; el tiempo total de duración del contrato; y su denominación. El sistema de amortización puede ser de amortización constante, o de cuota fija (tomando en cuenta los intereses); la tasa se puede dejar fija durante la vida del préstamo, o se puede recalcular periódicamente (tomando en cuenta un piso y un techo legal, que establecen un rango dentro del cual se puede mover esta tasa); el tiempo total de duración se establece en meses, y se puede situar entre los 60 (5 años) y 360 (30 años). Finalmente, un préstamo hipotecario puede ser denominado en pesos o en UVR.

El valor de la UVR en el tiempo t, en pesos, se calcula mediante la siguiente fórmula (ver [13]):

$$UVR_t = UVR_{15}(1+i)^{t/d} \tag{1.1}$$

donde t es el número de días calendario transcurridos desde el inicio del periodo de cálculo hasta el día de cálculo ($1 \leq t \leq 31$); UVR_{15} es el valor en pesos de la UVR el día 15 del mes anterior; i es la variación mensual del IPC durante el mes calendario inmediatamente anterior al mes de inicio del periodo de cálculo; y d es el número de días calendario del respectivo periodo de cálculo.

La Ley 546 de 1999, en su Capítulo V, establece el régimen de financiación de vivienda a largo plazo. El Artículo 17 habla sobre las condiciones que rigen un crédito de vivienda individual. Los préstamos deben estar denominados en UVR o en pesos; su tasa remuneratoria será calculada sobre la UVR (o el peso), se cobrará de manera vencida, y no se podrá capitalizar; su plazo de amortización no podrá ser inferior a 5 años ni superior a 30 años; deben tener un monto máximo que no exceda el porcentaje establecido por el Gobierno Nacional sobre el respectivo inmueble; y finalmente, lo que constituye uno de los pilares del presente proyecto, se estipula que el deudor podrá prepagar parcial o totalmente en cualquier momento y sin ninguna penalidad.

Las siguientes definiciones se basan en el trabajo de la Titularizadora Colombiana S.A. (ver [25]):

Definición 1 (Prepago total)**.** Se define el evento de prepago total cuando el saldo de un crédito hipotecario disminuye a cero y esto ocurre antes del último pago programado. Además, el crédito no puede haber sido declarado como siniestrado.

Definición 2 (Siniestralidad)**.** Se define el evento de crédito hipotecario siniestrado, cuando se ha llegado a una mora superior a los 12 meses. Según los datos históricos de préstamos hipotecarios, después de este periodo de tiempo la probabilidad de curación es menor al 4%. En este proyecto, no se considerará el periodo de mora, y se supondrá que la siniestralidad ocurre inmediatamente un deudor decide dejar de pagar. En adelante, este evento se denominará *default*.

1.2. **El punto de vista de las finanzas.** Ahora que ha quedado en claro la normativa hipotecaria colombiana, analicemos el contrato desde un punto de vista financiero. Un contrato en UVR queda especificado si se acuerda una tasa efectiva anual, un tiempo de duración, el valor inicial de la vivienda, y una relación LTV que se define a continuación.

Definición 3 (LTV)**.**

$$\mathrm{LTV} = \frac{\text{Préstamo}}{\text{Precio de la vivienda}}$$

La relación LTV corresponde a *loan-to-value*, es decir, cuánto vale el préstamo si se le compara con el valor del inmueble.

Aunque el enfoque propuesto para este trabajo es el de opciones financieras, la hipoteca no se puede considerar en sí misma como una opción. Mientras que una hipoteca es un tipo especial de contrato de préstamo, una opción es un contrato para comprar o vender algo en un momento dado. Sin embargo, sí se puede pensar que es un contrato que incluye dos opciones implícitas para el deudor.

La primera opción que tiene el deudor es la de prepagar la deuda. Como se explicó en la sección anterior, la Ley 546 permite que el deudor pague anticipadamente una parte o la totalidad de lo que adeuda. Este prepago no conlleva ningún tipo de sanción, y se puede realizar en cualquier momento. Por lo tanto, esta opción de prepago se entiende como una opción americana (que se puede ejercer en cualquier momento) sin primas en el momento de ejercicio. Además, esta opción es *call*, pues da al deudor el derecho de "comprar" una vivienda sin deudas, a un precio más favorable que lo que debe pagar originalmente por el préstamo que pidió.

La segunda opción es la que permite al deudor entregar su vivienda como dación de pago. En este caso, se considera que el préstamo ha sido saldado completamente. Cabe mencionar que si bien los flujos de caja del deudor se detienen en el momento en que ejerce esta opción (de siniestralidad o *default*), no ocurre lo mismo con los flujos del acreedor, ya que tendrá que incurrir en gastos generados por la tenencia y posterior venta del inmueble. En la práctica, una persona no entrega de un momento a otro su casa; generalmente, el deudor empieza a incurrir en mora, y después de un cierto periodo especificado en el contrato, se le inicia un proceso para despojarlo de su propiedad. Sin embargo, en este proyecto se considerará solamente que el deudor entregará racionalmente su casa, sin incurrir en mora (ver sección 3.1).

La opción de *default*, se puede representar financieramente como una opción Bermuda, que es un intermedio entre la opción europea (que solamente se puede ejercer al final de su vida) y la opción americana. Este tipo de opciones se puede ejercer en varios momentos de su vida, pero solamente en tiempos especificados con anterioridad. En este caso, se puede ejercer solamente cada mes, en los momentos de un pago programado (más adelante se justificará esta elección). Esta opción es *put*, pues le da al deudor el derecho de "vender" su vivienda al acreedor por el monto del préstamo restante.

Estas dos opciones hacen que los flujos de caja que recibe el acreedor sean inciertos. De hecho ni siquiera se puede conocer con anterioridad cuándo se terminará de pagar la deuda. Además de este riesgo, existe un riesgo de modelo (ver [28]) que corresponde a la dificultad de establecer un modelo correcto que explique las fluctuaciones en estos flujos. Este proyecto pretende aportarle una herramienta al mercado para controlar estos dos riesgos.

Evidentemente, existen únicamente tres posibilidades, mutuamente excluyentes para lo que puede pasar en cada momento del tiempo con un contrato hipotecario: el deudor puede continuar pagando normalmente; puede ejercer su opción de prepago; o puede entregar su vivienda en dación de pago, ejerciendo su opción de *default*.

En el Gráfico 1 observamos lo que se podría inferir acerca de las condiciones del contrato. El deudor recibe una cantidad de dinero al inicio del ejercicio, y paga mensualmente una cuota de amortización y los intereses generados en el periodo. La hipoteca se terminaría de pagar en el mes N. Tanto en éste como en el Gráfico 2, los abonos a capital se presentan en negro, mientras que los pagos de interés se muestran en gris.

Sin embargo, lo que realmente sucede es que la hipoteca no recibirá flujos en los últimos meses, pues en general, el deudor habrá para ese momento ejercido una de los dos opciones que posee. Esto se traduce en que, para él, después de un periodo donde hace todos los pagos programados de capital e interés, haya un mes (M) donde amortiza totalmente la deuda, sea por un prepago (donde se entrega todo el capital que no haya sido amortizado), o por *default* (donde se entrega el valor de la vivienda). Esto se puede observar en el Gráfico 2.

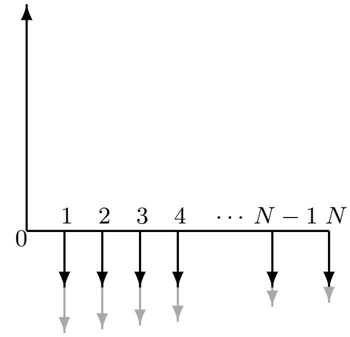

GRÁFICO 1. Diagrama de flujos programados de una hipoteca

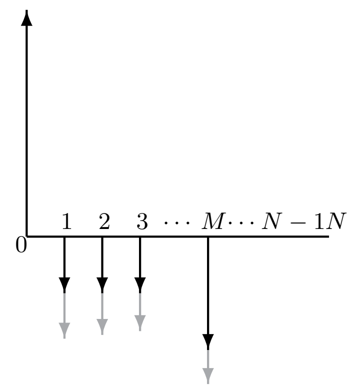

GRÁFICO 2. Diagrama de flujos reales de una hipoteca

2. **Modelos estocásticos**

El valor de un contrato hipotecario residencial depende de dos variables, las cuales son estocásticas. Por una parte, el precio de la vivienda que sirve como activo subyacente no se conoce con certeza. Éste afecta el valor de la hipoteca, pues un deudor podría decidir entregar su casa si su valor cae por debajo del de los pagos que tendrá que realizar por el préstamo. El proceso usual que se usa para modelar su comportamiento es el de un proceso lognormal:

$$\frac{dB}{B} = \alpha dt + \sigma dW_1 \tag{2.1}$$

Aquí, W_1 representa un movimiento Browniano o proceso de Wiener.

Por otro lado, las tasas de interés influyen en el precio al proporcionar la posibilidad de refinanciar si se vuelven favorables para el deudor; igualmente, los flujos que se presenten en el futuro serán descontados a la tasa actual, y es por esto que un movimiento en las tasas causará cambios en el valor presente de la hipoteca. El suponer que la tasa de interés se mantiene constante no tiene sentido para valorar contratos, que, como las hipotecas, tienen una vida de varios años.

Numerosos modelos se han propuesto para el modelaje de las tasas de interés. Sin embargo, uno de los más aceptados y usados en la literatura concerniente a la valoración de hipotecas es el modelo de Cox, Ingersoll y Ross de 1985 (ver [6]). Basándose en supuestos sobre el estado de la economía, proponen un modelo de equilibrio para las tasas de interés que se resume con la siguiente ecuación:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dz \tag{2.2}$$

donde dz es un movimiento Browniano; θ se interpreta como la posición central o valor en el largo plazo, y κ como la velocidad del ajuste (reversión a la media). La razón para escoger este modelo, radica en las cuatro condiciones siguientes:

(1) El proceso corresponde a un proceso continuo autorregresivo de primer orden AR(1).
(2) No existe la posibilidad de que la tasa de interés tome un valor negativo.
(3) Si la tasa de interés se vuelve cero, puede volver a ser positiva.
(4) La varianza de la tasa de interés aumenta cuando la tasa de interés aumenta.

Para mayor explicación sobre estas condiciones, al igual que demostraciones rigurosas usando teoría estocástica, el lector se puede referir a [6] y [29].

Como se hace en [1], el modelo se puede escribir de la forma

$$r_{t+1} = (1 - \varphi)\theta + \varphi r_t + \sigma_r \sqrt{r} \epsilon_{t+1}\,, \tag{2.3}$$

donde el término ϵ se refiere al error. La media de r es θ. El parámetro φ controla la reversión a la media; si es igual a 1, entonces estamos en presencia de una caminata aleatoria pura. Por lo tanto, $0 < \varphi < 1$. Además la primera autocorrelación es φ, las autocorrelaciones de orden superior son potencias de φ, y

$$var(r_{t+1}) = \sigma_r^2 r_t\,. \tag{2.4}$$

Esto muestra el porqué de la condición 1 y de la condición 4. La condición 2 es válida porque la varianza condicional calculada en la anterior ecuación garantiza que, si la tasa se vuelve muy pequeña, su varianza también lo será, reduciendo la probabilidad de que tome un valor negativo. De hecho ésta y la condición 3 pueden ser mejoradas: la tasa de interés en este modelo siempre es positiva. Esto se puede afirmar siempre y cuando se cumpla lo que se conoce como la condición de Feller.

Teorema 1 (Condición de Feller)**.** *Si $r(0) > 0$ y $\kappa\theta > \sigma_r^2/2$, entonces para todo t, $r(t) > 0$.*

Para conocer mayor información acerca de este teorema, refiérase a [11]. Por otro lado, con el fin de conocer si los datos presentaban heteroscedasticidad, se utilizó el programa SAS para hacer la prueba de Durbin Watson. La hipótesis nula de esta prueba es que no existe autocorrelación de primer orden. La hipótesis no se rechaza si el estadístico calculado es cercano a 2. A partir de los datos de las tasas de interés de colocación de viviendas no VIS del año 2004, el estadístico de Durbin Watson calculado mediante el **proc reg**, resultó ser 0.342, por lo que se puede rechazar la hipótesis nula; es decir, existe evidencia estadística suficiente para afirmar que el proceso dado por la ecuación 2.2 es un AR(1), como se ha explicado en la condición número 1.

3. Análisis y planteamiento de las ecuaciones

3.1. **Los supuestos.** Antes de continuar, es importante establecer los supuestos que se tendrán en cuenta en el análisis:

- *El modelo se hace desde el punto de vista del deudor*: Aunque se podría pensar que el flujo de caja que recibe el banco es exactamente el que el deudor le entrega, esto no siempre es así. En caso de que el deudor ejerza su opción de *default*, el banco incurrirá en gastos relacionados con el manejo y posterior venta del inmueble. Como no estamos considerando estos gastos, pero aún más, como se acepta que las opciones las posee el deudor, el modelaje se realiza desde el punto de vista de este último.
- *Las personas intentan maximizar su riqueza*: En este caso, el deudor tomará racionalmente las decisiones que minimicen el valor de su hipoteca. En este punto hay que aclarar que en este estudio se está suponiendo que el deudor es totalmente racional, y que si financieramente es mejor entrar en *default* o prepagar, lo hará de seguro.
- *Los procesos subyacentes son los descritos en la Sección 2*: Aunque es posible relajar este supuesto sin mayores complicaciones (en especial en lo que concierne a las tasas de interés, donde como se dijo anteriormente, se conocen numerosos modelos), para este trabajo se considerará que las variables B y r siguen estos procesos.
- *No existen oportunidades de arbitraje*: Si bien es conocido que en la vida real estas oportunidades existen, no duran mucho, pues al ser detectadas, el mercado mismo se corregirá. Se supone en este trabajo, como es usual en los análisis financieros, que en el mercado no existen oportunidades de arbitraje; es decir, si se consideran dos portafolios libres de riesgo, los dos deben ganar exactamente la misma cantidad. De lo contrario, sería posible ir en corto en uno, e invertir en el otro, generando una ganancia infinita. La explicación de esta condición

proviene del hecho que los precios de riesgo neutral (aquellos que no se ven afectados por preferencias de riesgo individuales) siguen una martingala.

- *Valoración indiferente a riesgo*: Este simple argumento es vital en la valoración de derivados. El valor de los activos no depende de parámetros que se vean afectados por preferencias de riesgo. Por lo tanto se puede concluir que el precio de un activo en un mundo donde todas las personas son indiferentes al riesgo debe ser el mismo que el del activo en el mundo real, y por lo tanto se puede suponer en el modelo que las personas son indiferentes al riesgo. Esta simplificación es útil, pues podemos decir ahora que el retorno esperado de cualquier activo es la tasa libre de riesgo, y que, para obtener su valor presente, se pueden descontar sus flujos futuros a la tasa libre de riesgo.
- *No hay costos de transacción*: No existen costos asociados a refinanciamiento, como penalidades o costos de trámites. También se supone que, de elegir ejercer la opción de *default*, el deudor no incurrirá en costos asociados a su reputación con el sistema financiero. El usar este supuesto hace que el modelaje sea más simple. Sin embargo, puede ser relajado sin demasiadas complicaciones. Cabe mencionar que se considera que existe un costo de transacción en el argumento de la eliminación del riesgo del portafolio (ecuación 3.9).
- *Todas las terminaciones al contrato son por motivos financieros*: El deudor puede decidir terminar el contrato por motivos no financieros. Por ejemplo, puede entregar su casa si por algún motivo ya no quiere seguir viviendo en ella; o puede prepagar si tuvo un excedente en sus ingresos. Sin embargo, en este modelo se supone que todos las terminaciones suceden por motivos financieros, es decir, pueden explicarse por medio de la ecuación 3.12.
- *No se consideran periodos de mora*: Por definición (ver Definición 2), una hipoteca se considera siniestrada después de un periodo de mora de doce meses. Al excluir la posibilidad de entrar en mora, se supone entonces que si el deudor considera que debe ejercer la opción, lo hace inmediatamente; en Colombia se ha comprobado sin embargo que algunas personas dejan de pagar durante algunos meses, esperando condiciones más favorables, que pueden incluir una renegociación del préstamo. Este último caso no será tenido en cuenta.
- *Todas las terminaciones por prepago son totales*: Existe la posibilidad para el deudor de prepagar parcialmente su deuda. Por ejemplo, si tiene un pequeño excedente en sus ingresos, que no le permite prepagar totalmente el préstamo, pero sí abonar un poco más de dinero con el fin de reducir sus pagos futuros de interés, el deudor está en la capacidad de hacerlo. Esto es frecuente sobre todo al final de la vida de la deuda. Sin embargo, todas las terminaciones consideradas en este proyecto son totales.

- *Supuestos de especificación*: El modelo presentado supone que el préstamo es en UVR, que se pacta a una cierta tasa efectiva anual, y que el tiempo total del préstamo es un entero. El sistema de amortización es constante (en capital) así como también es constante la tasa de interés. Además, la tasa de colocación del banco está totalmente correlacionada con la tasa libre de riesgo, lo cual implica, entre otras cosas, que derivar el valor de la hipoteca con respecto a la tasa de colocación es equivalente a hacerlo con respecto a la tasa libre de riesgo.

3.2. **La ecuación.** Sean

- n el tiempo en meses de la hipoteca
- $\tau(i)$ el tiempo del i-ésimo mes ($\tau(i) = i/12$)
- B el valor de la vivienda
- r la tasa de interés de colocación
- $S(r, t; i)$ el valor de los pagos programados (en el tiempo t) de los meses i al n
- $D(r, B, t; i)$ el valor de la opción de *default* en el tiempo t cuando el siguiente pago se debe hacer en el tiempo $\tau(i)$
- $F(r, B, t; i)$ el valor de la opción de prepago en el tiempo t cuando el siguiente pago se debe hacer en el tiempo $\tau(i)$
- $G(r, B, t; i) = F(r, B, t; i) + D(r, B, t; i)$ el valor de la opción combinada de dar por terminado el contrato en el tiempo t cuando el siguiente pago se debe hacer en el tiempo $\tau(i)$
- $W(B, r, t; i) = S(r, t; i) - G(B, r, t; i)$ el valor de la hipoteca en el tiempo t cuando el siguiente pago se debe hacer en el tiempo $\tau(i)$

Supongamos que el precio de la vivienda sigue el movimiento Browniano geométrico de la ecuación 2.1, y que la tasa de colocación sigue un proceso de reversión a la media, como el presentado en la ecuación 2.2.

Cada uno de los dos factores de incertidumbre contienen un proceso de Wiener, cuya correlación es ρ ($E[dz\ dX] = \rho dt$).

Usando el Lema de Itô se concluye que

$$\begin{aligned} dW =& \frac{\partial W}{\partial t} dt + \frac{\partial W}{\partial B} dB + \frac{\partial W}{\partial r} dr \\ &+ \frac{1}{2}\left(\sigma_B^2 B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial B^2} + 2\rho\sigma_B B \sigma_r \sqrt{r} \frac{\partial^2 W}{\partial B \partial r} + \sigma_r^2 r \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right) dt \end{aligned} \tag{3.1}$$

El argumento que se usa para eliminar el término estocástico sigue los mismos lineamientos de otras valoraciones financieras, y se basa en los teoremas de Feynman-Kac. Se construye un portafolio Π con una hipoteca; se toman Δ_1 posiciones en corto del activo subyacente, en este caso, la vivienda B; y Δ_2 posiciones en corto en un activo Z que dependa solamente del tiempo y de la tasa de interés (este activo puede ser, por ejemplo, un bono cero cupón). Por lo tanto,

$$\Pi = W - \Delta_1 B - \Delta_2 Z\,, \tag{3.2}$$

donde Z corresponde al valor del bono. Ahora,

$$d\Pi = dW - \Delta_1 dB - \Delta_2 dZ\,. \tag{3.3}$$

Como $Z = Z(r,t)$, entonces, por el Lema de Itô,

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial t}dt + \frac{\partial Z}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}dt \tag{3.4}$$

y se puede concluir que

$$\begin{aligned} d\Pi =& \frac{\partial W}{\partial t}dt + \frac{\partial W}{\partial B}dB + \frac{\partial W}{\partial r}dr \\ &+ \frac{1}{2}\left(\sigma_B^2 B^2\frac{\partial^2 W}{\partial B^2} + 2\rho\sigma_B B\sigma_r\sqrt{r}\frac{\partial^2 W}{\partial B\partial r} + \sigma_r^2 r\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)dt \\ &- \Delta_1 dB - \Delta_2\left(\frac{\partial Z}{\partial t}dt + \frac{\partial Z}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}dt\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si tomamos

$$\Delta_1 = \frac{\partial W}{\partial B} \tag{3.6}$$

y

$$\Delta_2 = \frac{\frac{\partial W}{\partial r}}{\frac{\partial Z}{\partial r}}\,, \tag{3.7}$$

se elimina el riesgo del portafolio (la ecuación queda en términos únicamente de variables determinísticas).

$$\begin{aligned} d\Pi =& \frac{\partial W}{\partial t}dt \\ &+ \frac{1}{2}\left(\sigma_B^2 B^2\frac{\partial^2 W}{\partial B^2} + 2\rho\sigma_B B\sigma_r\sqrt{r}\frac{\partial^2 W}{\partial B\partial r} + \sigma_r^2 r\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)dt \\ &- \frac{\frac{\partial W}{\partial r}}{\frac{\partial Z}{\partial r}}\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\right)dt\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como se está suponiendo que no hay oportunidades de arbitraje, y que se hace una valoración neutra al riesgo (ver sección 3.1), el portafolio debe ganar exactamente la tasa libre de riesgo (denotada como r_{TES}), salvo por B; el vender Δ_1 unidades del inmueble conlleva un costo, ya que se dejarían de recibir los dividendos obtenidos bien sea por el arrendamiento o por el hecho de vivir en la casa. La elección más natural para tomar en cuenta este costo, es asociar a B la tasa de colocación r, que es superior a la tasa libre de riesgo. Entonces,

$$d\Pi = r_{TES}(W - \Delta_2 Z)dt - \Delta_1\,, rBdt \tag{3.9}$$

o, reemplazando las ecuaciones anteriores,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\left(\sigma_B^2 B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial B^2} + 2\rho\sigma_B B\sigma_r\sqrt{r}\frac{\partial^2 W}{\partial B\partial r} + \sigma_r^2 r\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)dt \\
&-\frac{\frac{\partial W}{\partial r}}{\frac{\partial Z}{\partial r}}\left(\frac{\partial Z}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}dt\right) = r_{TES}\left(W - \frac{\frac{\partial W}{\partial r}}{\frac{\partial Z}{\partial r}}Z\right)dt - r\frac{\partial W}{\partial B}Bdt\,.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Si ahora dejamos todos los términos que dependen de Z a la izquierda, llegamos a

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} - r_{TES}Z\right)dt}{\partial Z/\partial r} \\
&= \frac{\left(-r_{TES}W + rB\frac{\partial W}{\partial B} + \sigma_B^2 B^2\frac{\partial^2 W}{\partial B^2} + 2\rho\sigma_B B\sigma_r\sqrt{r}\frac{\partial^2 W}{\partial B\partial r} + \sigma_r^2 r\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)dt}{\partial W/\partial r}\,.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Como se escogió el Z de manera arbitraria, la ecuación 3.11 no puede depender de este activo. El lado izquierdo se puede escribir como una función de r y t; el argumento estándar es tomar el negativo de la tendencia del proceso de r, es decir, $-\kappa(\theta - r)$.

La ecuación resultante es

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_B^2 B^2\frac{\partial^2 W}{\partial B^2} + \rho\sigma_r\sigma_B\sqrt{r}B\frac{\partial^2 W}{\partial B\partial r} \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_r^2 r\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + rB\frac{\partial W}{\partial B} + \kappa(\theta - r)\frac{\partial W}{\partial r} - r_{TES}W = 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Cabe resaltar que *cualquier* activo u opción que dependa de los dos procesos subyacentes supuestos en este problema, debe satisfacer la ecuación 3.12. Para diferenciar a la hipoteca de estos otros activos financieros, es necesario, junto con la ecuación diferencial parcial, especificar condiciones conocidas y determinísticas sobre las fronteras. La siguiente sección se encarga de este asunto.

3.3. **Las condiciones de frontera.** El dominio de la función en la cual estamos interesados es $[0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,T]$ donde T es el tiempo total de la hipoteca.

- $W(B,r,T) = 0$, porque en el tiempo T se habrá amortizado completamente el préstamo.
- $W(B,r,t) \leq B$. De pasar lo contrario, un deudor racional entregaría su vivienda, haciendo que $D(B,r,t) = S(r,t) - B$ y $W(B,r,t) = B$. Es importante enfatizar que esta condición solamente es válida en un momento de pago mensual programado. *No tiene sentido entregar la casa en un momento que no sea de pago programado, pues aunque su valor sea 0, se podrá seguir viviendo en ella hasta el momento del pago.*

- $W(B, r, t) \leq V(r, t)$ donde V es el valor presente del prepago que se ocasiona por refinanciar la deuda, conservando el mismo plazo, pero con una tasa de interés menor. De nuevo, el caso contrario no puede pasar, porque un deudor racional escogería el préstamo más barato para él.

En cada momento del tiempo, se tienen además condiciones de frontera sobre el espacio bidimensional $B \times r$:

- $B = 0$:
Si el precio de la vivienda cae hasta 0, y se está en un momento de pago mensual programado, el deudor entregará su casa. Es decir, $D(0, r, t) = S(r, t)$, $F(0, r, t) = 0$ y $W(0, r, t) = 0$. De presentarse el caso en que la vivienda ya no tiene valor, pero no se está en el momento de un pago, el valor de la vivienda será simplemente el valor presente del préstamo original.
- $B \to \infty$:
Cuando el precio de la vivienda crece mucho, el deudor de seguro no entregará su casa (no entrará en *default*); es decir, en cualquier escenario, $D(B, r, t) = 0$. Sin embargo, se tendrá que escoger entre seguir pagando con base en el contrato inicial, o refinanciar, dependiendo del nivel actual de las tasas de interés. Por lo tanto, si $V(r, t) < S(r, t)$ entonces se decidirá por el prepago y $F(B, r, t) = S(r, t) - V(r, t)$, y $W(B, r, t) = V(r, t)$. De lo contrario, se decidirá por seguir pagando el contrato de la manera que se había programado, y $F(B, r, t) = 0$ y $W(B, r, t) = S(r, t)$. Estas dos últimas condiciones se pueden resumir en
$$F(B, r, t) = \max(S - V, 0)$$
$$W(B, r, t) = S - \max(S - V, 0) = \min(V, S)$$
- $r = 0$:
Cuando las tasas de interés caen hasta cero, será atractivo para el deudor prepagar, pues conseguirá un préstamo sin intereses. Sin embargo, puede que decida no hacerlo, si el precio de su vivienda es incluso menor que el valor presente del nuevo préstamo y se encuentra en el momento de un pago programado. Si $V(r, t) < B$ entonces $F(B, 0, t) = S(0, t) - V(0, t)$, $D(B, 0, t) = 0$ y $W(B, 0, t) = V(0, t)$. De lo contrario, si la vivienda tiene menor valor que el refinanciamiento, se entregará, haciendo que $D(B, 0, t) = S(0, t) - B$, $F(B, 0, t) = 0$ y $W(B, 0, t) = B$. Si no se está en el momento de un pago programado, no tiene sentido entrar en *default* y por lo tanto de seguro se tomará la decisión de prepagar.
- $r \to \infty$:
Como estamos suponiendo que la tasa de colocación y la tasa libre de riesgo difieren apenas en una constante, cuando la primera tiende a

infinito, la segunda también lo hará. Al traer a valor presente los flujos futuros, descontándolos con una tasa de interés muy grande, su valor tiende a cero. Es decir, $W(B, r, t) = 0$.

Resumiendo esto último, es útil observar las condiciones de frontera en el diagrama 3. En negro aparecen las condiciones que valen en todos los momentos donde no haya pago. Las condiciones de las fronteras $r = 0$ y $B = 0$ cambian cuando se está en un momento de pago mensual programado; estos cambios se muestran subrayados, entre paréntesis.

En cuanto a S, y llamando $L(i)$ al pago programado en el mes i, podemos decir que

$$S(\tau(i); i) = L(i) + S(\tau(i); i + 1)$$

es decir, el valor justo antes y justo después de cada mes difiere solamente en $L(i)$.

Como el deudor puede continuar usando el inmueble hasta el momento de pago, no tiene sentido entrar en *default* sino solamente en estos momentos. Por otro lado, es posible ejercer la opción de prepago en cualquier momento; el tratamiento de esta última requiere por tanto la observación de una frontera en cada momento del tiempo, que delimita la región donde el valor de la vivienda es lo suficiente alto, y las tasas de interés lo suficientemente bajas para que el refinanciamiento sea óptimo.

4. Método numérico de solución: diferencias finitas

El método de las diferencias finitas resuelve (en los puntos de discretización) la ecuación 3.12. Tiene una ventaja interesante sobre otros métodos que se podrían intentar para solucionar este problema: se puede conocer el valor de la hipoteca y la decisión del deudor en cada momento del tiempo, tomando en cuenta lo que pueda pasar en el futuro. Después de solucionar la ecuación, se puede determinar en cada momento del tiempo dónde está la frontera que marca el prepago, y en cada mes, dónde está la frontera que marca el *default*.

Antes de empezar, cabe recordar que la ecuación diferencial que se está intentando solucionar tiene dominio

$$[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, T]$$

Al discretizar este dominio, se usarán pasos δB, δr y δt para B, r y t respectivamente. El valor de la hipoteca en el punto $(i\delta B, j\delta r, T - k\delta t)$ se denotará como $W^k_{i,j}$. Note que la ecuación se resolverá hacia atrás en el tiempo, es decir, $k = 0$ implica $t = T$.

Observemos cómo aproximar la derivada de W con respecto al tiempo. Sabemos que

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \lim_{h \to 0} \frac{W(B, r, t + h) - W(B, r, t)}{h} . \tag{4.1}$$

Por lo tanto, podemos sugerir que una aproximación de este término, tomando en cuenta que en el procedimiento el índice relacionado con el tiempo (k) avanza mientras que el tiempo real retrocede, es:

$$\frac{\partial W}{\partial t} \approx \frac{W_{i,j}^{k} - W_{i,j}^{k+1}}{\delta t}.$$

A continuación se muestran las aproximaciones usadas para cada una de las derivadas presentes en la ecuación:

$$\frac{\partial W}{\partial t} \approx \frac{W_{i,j}^{k} - W_{i,j}^{k+1}}{\delta t} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial B} \approx \frac{W_{i+1,j}^{k} - W_{i,j}^{k}}{\delta B} \tag{4.3}$$

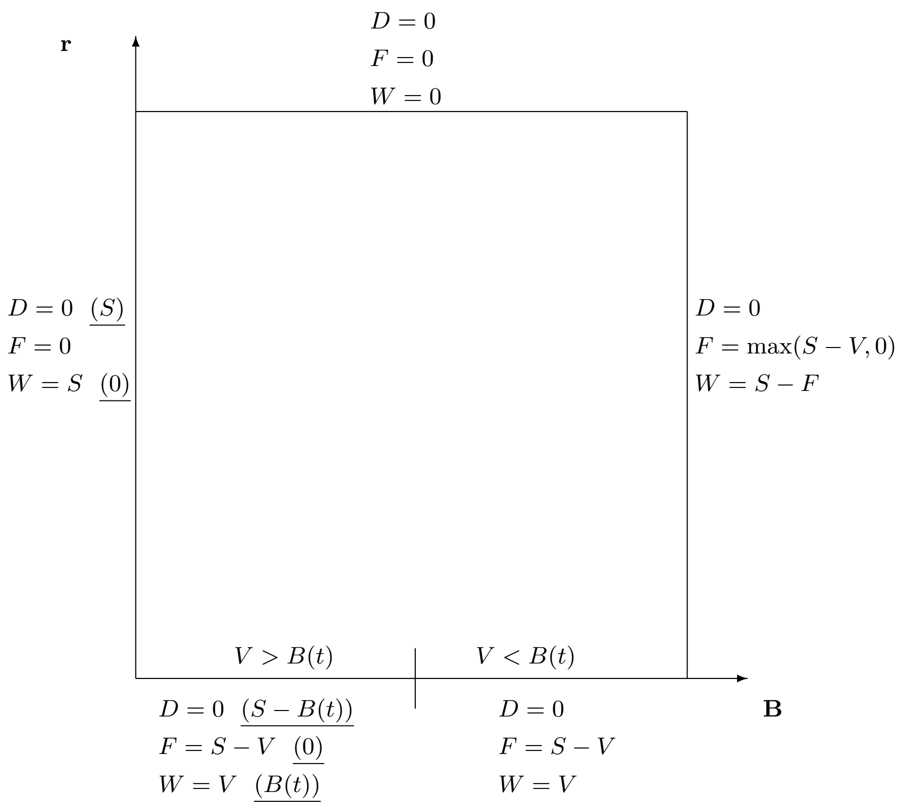

Gráfico 3. Condiciones de frontera

$$\frac{\partial W}{\partial r} \approx \frac{W^k_{i,j+1} - W^k_{i,j}}{\delta r} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial B^2} \approx \frac{W^k_{i+1,j} - 2W^k_{i,j} + W^k_{i-1,j}}{\delta B^2} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \approx \frac{W^k_{i,j+1} - 2W^k_{i,j} + W^k_{i,j-1}}{\delta r^2} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial B \partial r} \approx \frac{W^k_{i+1,j+1} - W^k_{i+1,j-1} - W^k_{i-1,j+1} + W^k_{i-1,j-1}}{4\delta B \delta r} \tag{4.7}$$

La ecuación 3.12 toma entonces la forma

$$\begin{aligned}
\frac{W^k_{ij} - W^{k+1}_{ij}}{\delta t} &+ \frac{1}{2}B^2\sigma_B^2 \frac{W^k_{i+1,j} - 2W^k_{i,j} + W^k_{i-1,j}}{\delta B^2} + rB\frac{W^k_{i+1,j} - W^k_{i,j}}{\delta B} \\
&- r_{TES}W^k_{ij} + \frac{1}{2}r\sigma_r^2 \frac{W^k_{i,j+1} - 2W^k_{i,j} + W^k_{i,j-1}}{\delta r^2} \\
&+ \rho\sigma_B\sigma_r B\sqrt{r}\frac{W^k_{i+1,j+1} - W^k_{i+1,j-1} - W^k_{i-1,j+1} + W^k_{i-1,j-1}}{4\delta B \delta r} \\
&+ \kappa(\theta - r)\frac{W^k_{i,j+1} - W^k_{i,j}}{\delta r} = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

o, más convenientemente,

$$\begin{aligned}
W^{k+1}_{ij} = W^k_{ij} + \delta t \Bigg(&\frac{1}{2}B^2\sigma_B^2 \frac{W^k_{i+1,j} - 2W^k_{i,j} + W^k_{i-1,j}}{\delta B^2} \\
&+ rB\frac{W^k_{i+1,j} - W^k_{i,j}}{\delta B} - r_{TES}W^k_{ij} + \frac{1}{2}r\sigma_r^2 \frac{W^k_{i,j+1} - 2W^k_{i,j} + W^k_{i,j-1}}{\delta r^2} \\
&+ \rho\sigma_B\sigma_r B\sqrt{r}\frac{W^k_{i+1,j+1} - W^k_{i+1,j-1} - W^k_{i-1,j+1} + W^k_{i-1,j-1}}{4\delta B \delta r} \\
&+ \kappa(\theta - r)\frac{W^k_{i,j+1} - W^k_{i,j}}{\delta r} \Bigg)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Para poder manejar el procedimiento, el dominio que en la dirección de B y de r llega hasta ∞ debe recortarse. Wilmott en [35] propone establecer máximos para estos dos ejes, y trabajar hasta allí, estableciendo las condiciones de frontera en estos valores.

El gráfico 4 muestra, en cada paso, los puntos que se usan para calcular W^k_{ij}; en negro, los puntos que se usan siempre, y en gris aquellos que se utilizan solamente cuando el coeficiente de correlación ρ es distinto de 0. El método trabaja hacia atrás; como se analizó en el capítulo anterior, se conocen condiciones de frontera para valores extremos de B y r en cada momento del tiempo, y además se tienen condiciones terminales, es decir en $t = T$. Este programa se programó también en Visual Basic, y se basa en las indicaciones que sugiere Wilmott en [35] para valorar bonos convertibles, sujetos a riesgos de tasa de interés y de fluctuaciones en el precio de una acción.

En cada momento del tiempo, y para cada punto del espacio discretizado $B \times r$ se calculan las aproximaciones a las derivadas vistas en la página 313. El valor de la función en el punto en cuestión se actualiza por medio de la ecuación 4.9. Se actualizan también las condiciones de frontera, como se describió en la sección 3.3. Se revisa si el valor calculado es menor que el valor del prepago; en caso contrario, el valor calculado se iguala al valor del prepago. Si se está en un momento de pago mensual programado, se hace el mismo procedimiento con el valor de la vivienda. Lo que se hace en estas dos comparaciones, es truncar el valor de la hipoteca de ser necesario. Este procedimiento se repite tantas veces como puntos haya en el espacio discretizado t.

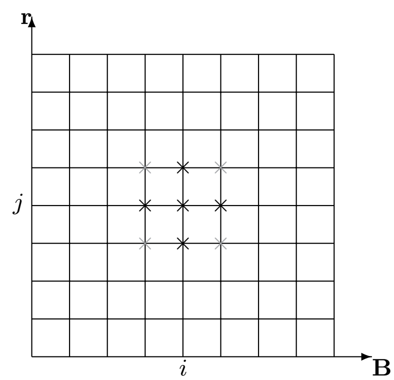

GRÁFICO 4. Puntos usados para calcular W_{ij}^k en cada instante del tiempo

Si bien se acepta que los métodos numéricos implícitos son más rápidos y estables, para este problema es conveniente usar el esquema explícito, como se explica en [23]. Esto se debe a varias razones; la primera de ellas es que al aumentar las dimensiones del dominio, se incrementan los problemas de implentación de un algoritmo implícito. Además, los términos de las segundas derivadas se mantienen pequeños en el espacio recortado considerado, y las fronteras de las regiones de prepago y *default* se pueden determinar fácilmente *a posteriori*.

El procedimiento programado es estable, en el sentido que pequeños cambios en los parámetros no afectan significativamente la respuesta obtenida. Cabe mencionar sin embargo, que, para la grilla empleada, el método no converge si se usan menos de 60 pasos de tiempo por mes, es decir, si $\delta t > 1/60$. Como se advierte en [23], es difícil escribir una condición para δt y ni siquiera se ha desarrollado una teoría formal de error para este problema.

5. **Aplicación a casos concretos**

El procedimiento numérico propuesto se aplicó a un caso concreto. Aunque la hipoteca más común es la de 15 años, también existen contratos a 5 o 10 años. Por razones computacionales, se optó por analizar una hipoteca de 5 años (60 meses). Se consideró el siguiente escenario, que es el más común en Colombia: un préstamo pactado a una tasa efectiva anual del 12.5%, con un precio inicial de vivienda de 100 y una relación LTV (*loan-to-value*) de 70%. Como se explicó en la sección 3.1, todo el modelo está calibrado en UVR. Es decir, en este caso la tasa del préstamo se refiere a UVR al igual que el precio de la vivienda. Las amortizaciones son constantes (también en UVR) y la tasa es fija.

5.1. **Estimación de los parámetros.** La ecuación 3.12 contiene parámetros que hay que estimar para el caso colombiano. Primero se trataron los parámetros relacionados con el proceso de B. La volatilidad de los precios de vivienda, σ_B, sí se tiene que estudiar pues hace parte del modelo. La estimación de este parámetro se realizó utilizando datos calculados por la Titularizadora Colombiana S.A. de cifras de la Dirección Nacional de Planeación. Como la UVR recoge todos los efectos de la inflación, la serie analizada está en pesos constantes de 1994. Esta serie contiene información mensual de los precios de vivienda usada en la ciudad de Bogotá.

A partir de estos datos, se procedió a determinar la variación logarítmica mes a mes, tomando el logaritmo natural del cociente de datos sucesivos. Para ser consecuente con la estimación de la volatilidad de la tasa de interés (σ_r), estas variaciones mensuales se transformaron a efectivas anuales, utilizando la fórmula

$$i_e = (i_m + 1)^{12} - 1$$

donde i_e es la tasa efectiva anual, e i_m es la tasa mensual. La desviación estándar, que corresponde al parámetro buscado fue calculada de estos datos transformados.

Los parámetros relacionados a la tasa de interés, κ, θ y σ_r se calcularon usando el procedimiento **model** de la versión 8 de SAS. El código usado se basa en la forma del proceso de reversión a la media, teniendo en cuenta que el mismo es un AR(1) con presencia de heteroscedasticidad. Los datos que se emplearon para estimar estos parámetros se obtuvieron del Banco de la República ([8]) y corresponden a información semanal de la tasa de colocación efectiva anual para préstamos en UVR de vivienda no VIS. En las Tablas 1 y 3 se puede observar el resultado obtenido.

Equation	DF Model	DF Error	SSE	MSE	Root MSE	R-Square	Adj R-Sq
r	3	56	0.000179	$3.193E-6$	0.00179	0.6811	0.6697
RESID.r		56	59.0912	1.0552	1.0272		

TABLA 1. Resultados de SAS (1)

Como se puede apreciar en la Tabla 1, el ajuste del modelo es aceptable, como lo sugiere el R^2. En la Tabla 3, se calcula la significancia de los parámetros estimados. En los tres casos, el valor del *p-value* hace que se rechace la hipótesis de que los parámetros no son significativos; es decir, se puede concluir que las tres estimaciones son estadísticamente válidas.

Parámetro	Significado	Valor estimado
σ_B	Volatilidad del Precio de Vivienda	0.182606466
σ_r	Volatilidad de la Tasa de Interés	0.005468
κ	Velocidad de la Reversión a la Media	0.190048
θ	Media de la tasa de interés a largo plazo	0.129048
spread	Diferencia entre $r_{colocacion}$ y r_{TES}	0.0873053

TABLA 2. Parámetros estimados

Por no contar con información suficiente, no fue posible realizar la estimación del parámetro ρ que corresponde al coeficiente de correlación entre los dos procesos. En este punto, el caso colombiano es especialmente particular, ya que se vivió un periodo de altísimas tasas a finales de la década pasada, que desvían cualquier intento por realizar una estimación seria de la correlación con otra variable económica en este periodo. Por lo tanto, este parámetro se asumió en este trabajo como cero (ver los puntos que se usan cuando $\rho = 0$ en el Gráfico 4).

Finalmente, tomando en cuenta el último de los supuestos de la sección 3.1, se calculó la diferencia entre la tasa de colocación y la tasa de los TES, que sirven de referencia como la tasa libre de riesgo en Colombia. La información de la serie de los TES se obtuvo de www.corfinsura.com ([5]). Esta diferencia se calculó usando tasas efectivas anuales en ambos casos. Los datos calculados se resumen en la Tabla 2.

Parameter	Estimate	Approx Std Err	t Value	ApproxPr > $\|t\|$	Label
kappa	0.1905	0.0729	2.61	0.0115	Velocidad de Reversión a la Media
theta	0.121372	0.00121	100.22	$< .0001$	Media a Largo Plazo
sigma	0.004991	0.000459	10.88	$< .0001$	Parte constante de la varianza

TABLA 3. Resultados de SAS (2)

5.2. **Gráficos y análisis.** Usando el programa de diferencias finitas hecho en *Visual Basic*, se corrió el escenario propuesto en la página 316 con los parámetros de la Tabla 2. Se tomó como valor máximo de B el doble del valor inicial, es decir 200. Para r, el máximo se fijó en 50%. En cada momento del tiempo, se empleó una grilla de discretización que contiene 40 puntos en B y la misma cantidad en r. El procedimiento calcula el valor de la hipoteca W_{ij}^k. El primer valor a analizar es el valor mismo de la hipoteca en el tiempo inicial, y con los valores iniciales, es decir, $W(100, 12.5\%, 0)$, o, con la notación discreta, $W_{20,10}^0$.

$$W(100, 12.5\%, 0) = 71.10833526\,. \tag{5.1}$$

Es interesante comparar este valor con el valor que se obtendría si no se consideraran las opciones; es decir, el valor que resultaría si el deudor pagara su deuda tal y como está programado. Para calcular este valor, es necesario calcular los flujos de cada uno de los 60 meses considerados, y traer estos flujos a valor presente, descontándolos con la tasa libre de riesgo inicial. Esto es exactamente lo que se hizo en el primer enfoque, ya que en (100, 12.5%, 0), no se ejerce ninguna de la dos opciones; como se vio en la anterior sección, el valor obtenido fue de 84.41. Esto es evidencia de que las opciones efectivamente disminuyen el valor de la hipoteca para el deudor, y causan incertidumbre en la valoración, por la falta de certeza sobre los flujos futuros. De hecho, si se considerara que la tasa libre de riesgo con la que se descuentan estos flujos fuera constante, y no se moviera con la tasa de colocación, este valor calculado sería una cota superior para todo el ejercicio. Sin embargo, con los supuestos hechos, al bajar la tasa de colocación, también baja la tasa libre de riesgo, haciendo que haya puntos donde el valor supera a esta cota, ya que los flujos no se descuentan de la misma forma.

No obstante, más interesante que este valor resulta el análisis del comportamiento de la función W a lo largo del tiempo. Empecemos con el tiempo inicial, o sea $t = 0$. Como la grilla es tan grande, no vale la pena analizarla directamente; es más útil observar la gráfica de $W(B, r, 0)$ para todos los valores considerados de B y r (en este caso, $0 \leq B \leq 200$ y $0 \leq r \leq 50\%$). El gráfico 5 muestra la superficie que representa la gráfica de la función cuando t es constante (en este caso, 0). Como se observa, la función crece conforme el precio de la vivienda aumenta, pero disminuye si la tasa de interés aumenta. Esto se explica por dos factores: primero, si el precio de la vivienda es alto, y la tasa no es lo suficientemente baja, el deudor no ejercerá ninguna de las dos opciones. Por otro lado, al aumentar la tasa de colocación aumenta también la tasa libre de riesgo, por lo que los flujos futuros son descontados a una tasa mayor, haciendo que el valor disminuya.

El corte transversal que se encuentra en el mismo gráfico, permite visualizar el crecimiento de la función con respecto a B. La superficie aumenta hasta cincuenta de forma lineal, y esto se explica por la opción de *default*: existen puntos donde el cálculo de la función por medio del procedimiento de diferencias finitas produce un valor mayor que el precio de la vivienda, y como se está en un tiempo donde en teoría se podría entrar entregar la casa para terminar la deuda, un deudor racional eligiría ejercer su opción.

Cabe enfatizar sin embargo que en el sentido estricto del contrato, en el tiempo cero, que es cuando se ha firmado el contrato, el único punto posible es el $(100, 12.5\%, 0)$. El resto de puntos correspondería a un cambio súbito de B o r, lo cual, si bien es teóricamente posible, es irrealizable en la práctica.

Conforme avanza el tiempo, el valor de la hipoteca disminuye, puesto que ya se ha amortizado parte del préstamo. En el Gráfico 6 observamos la situación en el mes 3.5. Como se está en un tiempo entre pagos mensuales, el *default* no es teóricamente posible (el deudor puede seguir viviendo en la casa hasta el siguiente pago, es decir, hasta el mes 4). Esto explica el salto que se presenta en las fronteras $B = 0$ y $r = 0$.

Para el mes 10 (Gráfico 7), la situación es parecida a la que se presenta en el tiempo inicial, pues es posible entregar la vivienda. El corte transversal nos permite identificar cómo se ha ido reduciendo el valor de la función sobre todo el espacio bidimensional $B \times r$.

Los meses 30 y 50 (Gráficos 8 y 9 respectivamente) muestran situaciones casi idénticas tanto en el gráfico de superficie como en el corte transversal, pues al suceder en un momento de pago mensual programado, existe la posibilidad de ejercer cualquiera de las dos opciones. Sin embargo, cabe mencionar que el valor de la hipoteca sigue disminuyendo, pues la amortización total sucede a más tardar en el mes 60.

Los cortes transversales permiten apreciar una característica adicional de la función W cuando se analiza dejando t y r constantes. En los primeros meses de vida del préstamo, la función es creciente en la dirección de B y además tiene concavidad negativa. Conforme avanza el tiempo, esta concavidad cambia, haciéndose positiva, lo que se traduce en que las gráficas aparezcan con mayores pendientes. Esto es así porque, en los puntos donde se debe seguir pagando normalmente la hipoteca (región de continuación), el valor de la función es casi idéntico en los primeros meses. Posteriormente, al amortizar la deuda, los valores se vuelven más pequeños y difieren relativamente más.

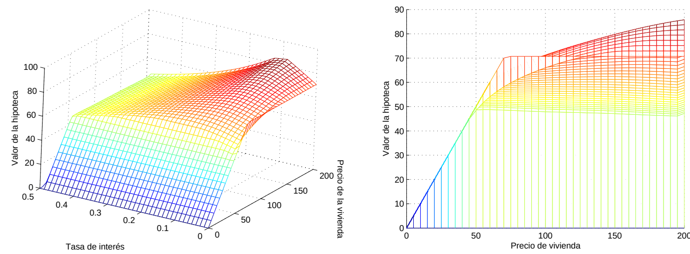

GRÁFICO 5. Valor de la hipoteca en el tiempo inicial y corte transversal

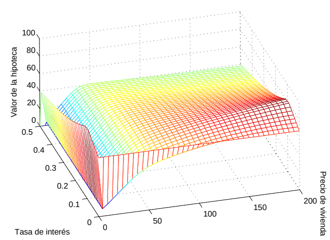

GRÁFICO 6. Valor de la hipoteca en el mes 3.5

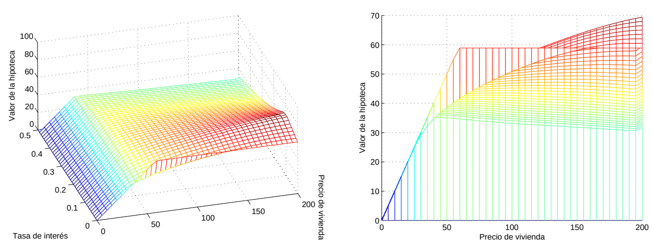

GRÁFICO 7. Valor de la hipoteca en el mes 10 y corte transversal

Para analizar las decisiones que toma el deudor en cada momento del tiempo, o al menos en los mismos momentos cuyas gráficas se mostraron, es útil observar las gráficas del espacio bidimensional $B \times r$. De nuevo, hay que hacer el mismo comentario acerca del tiempo inicial: un cambio súbito no es posible en la vida

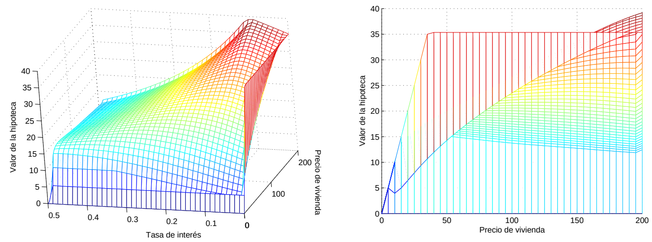

GRÁFICO 8. Valor de la hipoteca en el mes 30 y corte transversal

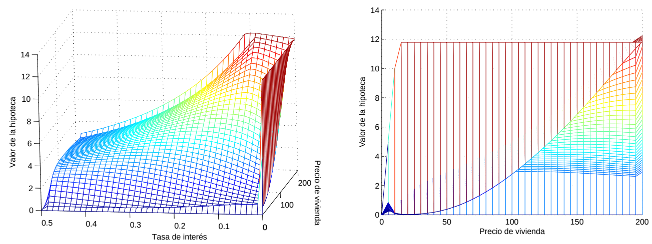

GRÁFICO 9. Valor de la hipoteca en el mes 50 y corte transversal

real, pero teóricamente se puede estudiar; todos los otros casos se analizan normalmente.

La decisión del deudor se puede observar en los Gráficos 10, 11, 12, 13 y 14. La región de continuación se muestra en azul. La región de prepago, que aparece en rojo, es la región más pequeña de todas, en todo momento. Por lo tanto, según el modelo, las terminaciones por prepago solamente ocurrirán si la vivienda aumenta de precio y la tasa de interés cae a niveles muy bajos. Esta región, que ya de por sí empieza con un tamaño muy reducido, se contrae rápidamente, como lo sugiere la sucesión de gráficos. En la práctica, se ha observado sin embargo que es en los últimos meses cuando sucede más prepago. Esto se explica por los supuestos que se hicieron al modelar este problema (ver sección 3.1): todas las terminaciones consideradas son por motivos financieros. Es común que la gente, cuando le quedan pocos meses, quiera usar un excedente en sus ingresos o un ahorro, para terminar prematuramente su deuda; no obstante, esta terminación no tiene justificaciones financieras explicables mediante el modelo considerado.

La región verde representa aquellos puntos donde un deudor racional entregaría su casa para terminar la deuda. La región empieza siendo muy grande, ya que al principio la deuda tiene un mayor valor, y si el precio de la vivienda cae lo suficiente, sería mejor entrar en *default* que continuar pagando. Al igual que la región de prepago, se reduce constantemente, pues el valor de la deuda disminuye porque queda cada vez menos capital por amortizar.

Es interesante analizar lo que pasa en el mes 3.5 (Gráfico 11). Aquí la región verde no aparece. ¿Por qué? Como se ha especificado el modelo, el deudor no entregará su casa a la mitad de un mes, si puede seguir beneficiándose de ella. Sin embargo, sí puede ejercer su opción de prepago. Los puntos con valores altos de B y bajos de r, además de algunos puntos en las fronteras, son factibles para el ejercicio de esta opción.

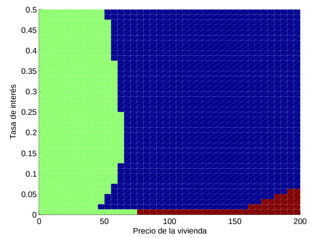

GRÁFICO 10. Decisión del deudor en el tiempo inicial

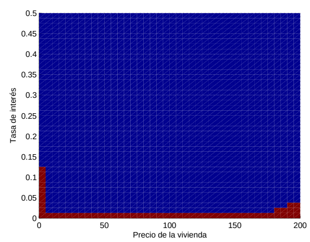

GRÁFICO 11. Decisión del deudor en el mes 3.5

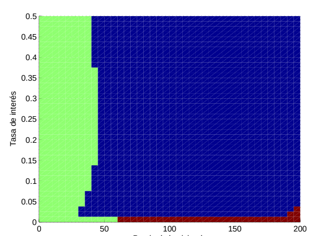

GRÁFICO 12. Decisión del deudor en el mes 10

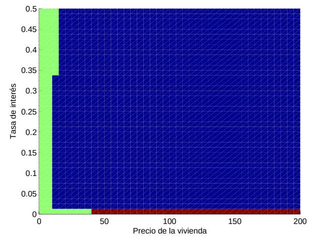

Gráfico 13. Decisión del deudor en el mes 30

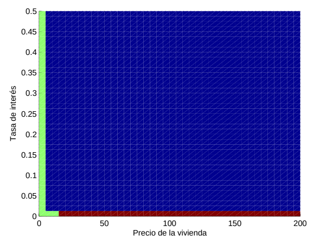

Gráfico 14. Decisión del deudor en el mes 50

5.3. **Variaciones.** Además de analizar lo que ocurre con la hipoteca en el escenario de la página 316, se corrió el modelo con dos modificaciones, hechas por aparte, pero conservando los mismos parámetros resumidos en la Tabla 2.

La primera variación considerada fue cambiar la tasa inicial de interés, es decir, la tasa efectiva anual a la que se firma el contrato. Esta tasa se subió de 12.5% a 25%. Si bien el valor de la hipoteca $W(100, 25\%, 0)$ aumentó a 74.95652114, no se puede decir que su valor se haya incrementado demasiado. Esto se puede explicar porque como el préstamo se vuelve más caro, aumenta la posibilidad de ejercicio de alguna de las dos opciones, como lo sugiere el siguiente gráfico. De nuevo, la región de prepago sigue siendo pequeña, y la región de *default* aparece mucho más grande. Para el resto de tiempos, las regiones aparecen muy parecidas a las que se mostraron cuando la tasa era de 12.5%, y por eso no se incluyen.

Por otro lado, se cambió el LTV del préstamo (manteniendo la tasa de colocación en 12.5%) de 70% a 95%. En la práctica, este nivel de endeudamiento se presenta como altamente riesgoso, y de hecho en la última actualización de la regulación, para el tipo de préstamo considerado, el LTV se ha fijado en un máximo de 70%. Esto es porque será más difícil para el deudor realizar los pagos programados; el riesgo asociado a una hipoteca de este tipo es el crediticio. En nuestro lenguaje, esto quiere decir que el deudor será más propenso a entregar su casa para terminar el préstamo.

Observemos primero lo que sucede con el valor de la hipoteca. Una vez más, el valor en el momento de la firma del contrato, y con las condiciones iniciales, aumenta. Ahora, $W(100, 12.5\%, 0) = 94.89775581$ y esto se representa en gran medida en que ahora se le pidió al banco un préstamo por \$95. Este aumento de valor sucede por supuesto con la hipoteca en todos los puntos del espacio $B \times r \times t$. Sin embargo, el valor presente de la hipoteca es menor que el valor del préstamo, aún para el deudor. Para el acreedor, que, de presentarse un evento de siniestralidad, recibirá aproximadamente el 75% del valor total de la casa en el momento de la venta (la cual sucede generalmente después de dos años de haberse registrado el *default*), los flujos serán ostensiblemente menores. Esto indica que con los supuestos hechos, un banco *no* debe otorgar un préstamo a una persona que registre un LTV tan alto. A continuación, se puede ver esta situación en los Gráficos 16 y 17, donde se muestra tanto la superficie como su corte transversal. Cabe mencionar que para observar el cambio en el valor de W con respecto al escenario inicial, es suficiente considerar los meses 3.5 y 10, pues de ellos se puede inferir cómo serán los otros.

Lo más interesante de este ejercicio fue observar cómo se aumentaba la región de *default*. Tal y como se había pronosticado, con un préstamo tan oneroso, el deudor usará con mayor probabilidad su opción put. La región de prepago, que

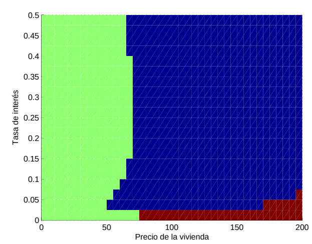

GRÁFICO 15. Decisión del deudor en tiempo inicial con tasa de interés de 25%

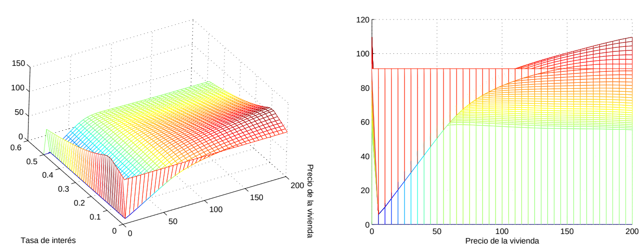

GRÁFICO 16. Valor de la hipoteca (con LTV de 95%) en el mes 3.5 y corte transversal

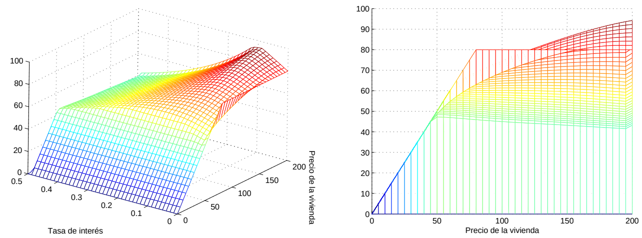

Gráfico 17. Valor de la hipoteca (con LTV de 95%) en el mes 10 y corte transversal

en el caso original llegaba máximo hasta 60 en el tiempo inicial (en los puntos interiores), ahora ocupa un área que llega hasta 90 en los mismos puntos. La región de prepago no presenta mayores alteraciones. Observemos esta situación en los siguientes gráficos.

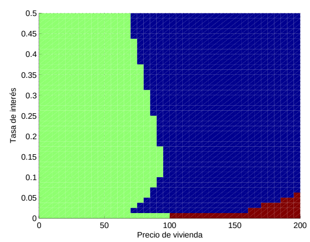

Gráfico 18. Decisión del deudor en tiempo inicial con LTV de 95%

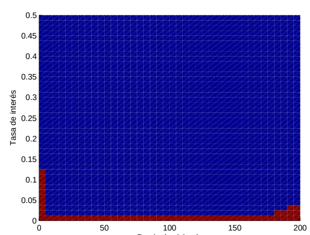

Gráfico 19. Decisión del deudor en el mes 3.5 con LTV de 95%

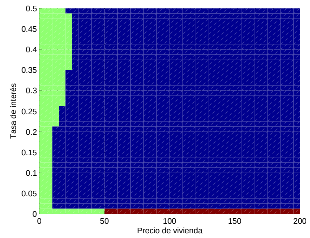

GRÁFICO 20. Decisión del deudor en el mes 30 con LTV de 95%

6. Conclusiones

6.1. **Trabajo a futuro.** Este proyecto pretende ser un primer paso en la dirección de la valoración de contratos hipotecarios colombianos. Como tal, está sujeto a mejoras y cambios, los cuales servirían para continuar el análisis de este tipo de préstamos.

Las modificaciones iniciales podrían incluir la relajación o el cambio de ciertos supuestos. Existen diversos procesos que sirven para modelar la tasa de interés r y las fluctuaciones en los precios de un activo B, que se podrían estudiar. Esto requeriría modificar también la ecuación diferencial a solucionar, pero conservando el procedimiento financiero típico de eliminación del riesgo. Igualmente, al obtener más datos (y más precisos), se podrían obtener mejores estimaciones de los parámetros necesarios; incluso se podría estimar el parámetro ρ, cuyo cálculo no fue posible de realizar en esta tesis por no contar con suficientes datos, y constituye una de las mayores limitaciones del modelo presentado. Cabe mencionar sin embargo, que el código programado es lo suficientemente general como para tomar en cuenta esta correlación.

Desde el punto de vista del procedimiento numérico, si bien se acepta que para solucionar ecuaciones del tipo de la ecuación 3.12 no se pueden emplear métodos analíticos para llegar a una respuesta exacta, se podrían intentar otros métodos de discretización. Entre ellos, uno que resulta muy intuitivo es el de los árboles binomiales, que en este caso tendría que ser un árbol binomial bivariado, por las dos fuentes de incertidumbre consideradas. Para mayor información acerca de cómo usar este método en un problema del mismo tipo del que se ha considerado, se puede ver [2], [14] y [15]. Otro enfoque que podría ser útil por la cantidad de variables de la función W, sería utilizar simulaciones.

Sin embargo, si se opta por el esquema de diferencias finitas, también resultaría interesante estudiar otros métodos implícitos de solución, cuya convergencia fuera más rápida. De todas maneras, hay que anotar que por la naturaleza misma de la ecuación 3.12, la implementación de mejores métodos es bastante complicada, como se argumentó en la página 315. Algo que sí podría mejorarse, es ensayar programar el procedimiento en otro lenguaje de programación para que el tiempo de ejecución se reduzca.

Finalmente, sería interesante hacer más variaciones al problema inicial, incluyendo diferentes tasas de interés y niveles de LTV. Las modificaciones podrían incluir también el cambio del escenario inicial supuesto, analizando hipotecas denominadas en pesos, con sistemas de amortización no constantes o con tasa de interés variable. Un modelo más completo incluiría también otros activos de la economía, para analizar cómo influyen en el comportamiento del valor de la hipoteca.

6.2. **Conclusiones finales.** Si bien el uso de fuertes supuestos y la falta de datos hacen que el modelo no sea del todo completo, se puede afirmar que se respondió satisfactoriamente al objetivo de aportar una herramienta al sistema financiero y a la comunidad en general para valorar contratos hipotecarios en Colombia. Sin embargo, los esfuerzos en este sentido no deben detenerse con este trabajo.

Los modelos sugeridos, al igual que la ecuación diferencial que se deriva de ellos, resultaron en un modelo consistente con la realidad colombiana. Esto se puede ver por los valores encontrados después de aplicar el procedimiento numérico. Igualmente, el método de las diferencias finitas explícitas, si bien necesita un paso en el tiempo lo suficientemente pequeño (que se traduce en una gran cantidad de iteraciones), sirvió para encontrar la solución del problema.

La aplicación al caso visto en la Sección 5 permitió no sólo calcular el valor de la hipoteca para el deudor en el momento en que se origina el préstamo, sino también en otros puntos del espacio discretizado $B \times r \times t$. El valor para el deudor resultó ser menor que el del valor presente de los pagos programados, evidenciando la importancia de las dos opciones implícitas. El método además permite ver cómo el valor de la hipoteca decrece con el tiempo.

En cuanto a la decisión del deudor, se comprobó que las áreas, tanto de la región de prepago como de la de *default*, decrecen a medida que avanza la vida del crédito. Esto tiene sentido si se considera que el modelo solamente toma en cuenta razones financieras, porque hacia el final de la vida del crédito, cuando se ha amortizado ya una gran parte del préstamo, el total de los pagos programados restantes disminuye, y por lo tanto también lo hace el valor de las opciones.

En cuanto a las variaciones del escenario inicial, se puede decir que este tipo de contratos es más sensible a movimientos en la relación LTV que a fluctuaciones de la tasa de interés inicial del crédito. De hecho, según los resultados obtenidos, no existe mucha sensibilidad al mover la tasa de interés. Esto se presenta porque al aumentar la tasa de interés, aumenta también la probabilidad de que los deudores ejerzan sus opciones. Esta conclusión debería servir para que los bancos reduzcan sus tasas de interés, pues si bien a una tasa de interés mayor reciben, en teoría, mayores flujos de dinero, no se ha tomado en cuenta que también más deudores usarán alguna de las dos opciones. En cuanto a las variaciones del LTV, el modelo comprueba lo que se ha propuesto con la nueva legislación: hay que limitar el LTV máximo de un préstamo (actualmente en 70%) pues a niveles superiores solamente se incrementa la posibilidad de ejercicio de las opciones, especialmente de *default*, pues el deudor no estará en capacidad de pagar un préstamo tan oneroso.

Agradecimientos. Al Laboratorio de Matemáticas Aplicadas de la Universidad de los Andes, por poner sus recursos a disposición de este trabajo; a RENÉ MEZIAT, por sus importantes aportes; a mi familia, por su infinita paciencia durante la ejecución de este proyecto; a MAURICIO AMADOR, ÓSCAR LEIVA, JAVIER SÁNCHEZ y MARÍA ALEXANDRA SÁNCHEZ de la Titularizadora Colombiana S.A. por la colaboración que me brindaron en todo momento; y, finalmente, a ANDRÉS SARMIENTO por la valiosa ayuda que me prestó.

Bibliografía

[1] BACKUS ET AL, DAVID. *Discrete Time Models of Bond Pricing.* National Bureau of Economic Research, Septiembre, 1998.

[2] BRENNAN & EDUARDO S. SCHWARTZ, MICHAEL J.. *Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: a synthesis.* Journal of financial and quantitative analysis, Septiembre, 1978.

[3] BROWN & PHILIP H. DYBVIG, STEPHEN J. *The empirical implications of the Cox, Ingersoll, Ross theory of term structure of interest rates.* The Journal of finance, **41**, No. 3, 1985.

[4] CONTRERAS RESTREPO ET AL, GUSTAVO. *Código Civil Colombiano.* Leyer, 2004.

[5] CORFINSURA. *Indiciadores Económicos: Mercado Secundario de Deuda Pública.* Abril, 2005, http://www.corfinsura.com/espanol/indicadores/economicosHijos.asp?id=163.

[6] COX, JONATHAN C. INGERSOLL & STEPHEN A. ROSS, JOHN C. *A theory of term structure of interest rates.* Econometrica, **53**, No. 2, 1985.

[7] CONGRESO DE LA REPÚBLICA DE COLOMBIA. *Ley 546.* Diario Oficial, 1999.

[8] BANCO DE LA REPÚBLICA. *Tasas de Colocación: información semanal.*, Abril, 2005, http://www.banrep.gov.co/economia/tasas_colo4.htm

[9] DENG, JOHN M. QUIGLEY & ROBERT VAN ORDER, YONGHENG. *Mortgage terminations, heterogeneity and the exercise of mortgage options.* Econometrica, **68**, No. 2, 2000, Marzo, 275–307

[10] DOWNING, RICHARD STANTON & NANCY WALLACE, CHRIS. *An Empirical Test of a Two-Factor Mortgage Valuation Model: How Much Do House Prices Matter?.* Research Program in Finance, Institute for Business and Economic Research, UC Berkeley, (Federal Reserve), Noviembre, 2002.

[11] DUFFIE, DARRELL. *Credit Risk Modeling with Affine Processes.* Stanford University and Scuola Normale Superiore, Pisa, 2004.

[12] FABOZZI & FRANCO MODIGLIANI, FRANK J.. *Capital Markets.* Prentice Hall, 2003.

[13] FUNDACIÓN PARA LA EDUCACIÓN SUPERIOR Y EL DESARROLLO, FEDESARROLLO. *Del UPAC a la UVR.* Coyuntura Económica, **XXIX**, No. 4, diciembre, 1999, 61–72.

[14] HILLIARD, ADAM L. SCHWARTZ & ALLAN L. TUCKER, JIMMY E. *Binomial Options Pricing Technique with Generalized Interest Rate Processes.* The Journal of Financial Research, **XIX**, No. 4, 1996, 585–602

[15] HILLIARD, JAMES B. KAU & CARLOS SLAWSON, JIMMY E. *Valuing Prepayment and Default in a Fixed Rate Mortgage: A Bivariate Binomial Options Pricing Technique.* Journal of Real Estate Economics, **26**, No. 3, 1998, 431–468.

[16] HULL & ALLAN WHITE, JOHN. *Valuing derivative securities using the explicite finite difference method.* The Journal of Financial and Quantitative Analysis, **25**, No. 1, marzo, 1990, 87–100.

[17] HULL, JOHN. *Options, Futures, and Other Derivative Securities.* Prentice Hall, 1993.

[18] KALOTAY, DEANE YANG & FRANK J. FABOZZI, ANDREW. *An option-theoretic prepayment model for mortgages and mortgage-backed securities.* www.kalotay.com, 2004.

[19] KARATZAS & STEVEN E. SHREVE, IOANNIS. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, 1997.

[20] KAU & DONALD C. KEENAN, JAMES B. *An overview of option-theoretic pricing of mortgages.* Journal of Housing Research, **6**, No. 2, 1995.

[21] KAU, DONALD C. KEENAN, WALTER J. MULLER & JAMES F. EPPERSON, JAMES B. *The valuation and securitization of commercial and multifamily mortgages.* Journal of Banking and Finance, **11**, 1987, 525–546.

[22] KAU ET AL, JAMES B.. *A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residential Mortgages.* Journal of Money, Credit and Banking, **(24)**, No. 3, 1992, 279–99.

[23] KAU ET AL, JAMES B.. *The Valuation at Origination of Fixed-Rate Mortgages with Default and Prepayment.* The Journal of Real Estate Finance and Economics.**11**, No. 1, 1995, 5–36.

[24] LAWLER, GREGORY F. *Introduction to stochastic processes.*Chapman & Hall, 1996.

[25] LEIVA, MARÍA ALEXANDRA SÁNCHEZ & JAVIER SÁNCHEZ, ÓSCAR. *Estimación de ecuaciones de siniestralidad y prepago para portafolios de créditos hipotecarios denominados en UVR.* Titularizadora Colombiana, Septiembre, 2004.

[26] NORSTAD, JOHN. *Random Walks.* homepage.mac.com/j.norstad, Febrero, 2005.

[27] RESNICK, SIDNEY. *Adventures in stochastic processes.* Birkhäuser, 1992.

[28] REVEIZ, DAVID MERCHÁN & ROBERTO DE BEAUFORT, ALEJANDRO. *Títulos hipotecarios de los Estados Unidos: Estudio de las características del mercado e instrumentos.* Banco de la República, Octubre, 2002.

[29] SCHLÖGL & LÜTZ SCHLÖGL, ERIK. *A Square-Root Interest Rate Model Fitting Discrete Initial Term Structure Data.* Taylor and Francis Journals, **7**, No. 3, diciembre, 1999, 183–209.

[30] SCHWARTZ & WALTER TOROUS, EDUARDO S.. *Prepayment, default, and the valuation of mortgage pass-through securities.* The Journal of Business, **65**, No. 2, 1992, Abril, 221–239.

[31] SHREVE, STEVEN E. *Stochastic Calculus for Finance II – Continuous-Time Models.* Springer, 2004.

[32] SAS SUPPORT. *Heteroscedastic Modeling of the Fed Funds Rate.* Noviembre, 2002, http://support.sas.com/rnd/app/examples/ets/hetmod/

[33] SVENSTRUP, MIKKEL. *Valuation of Path-Dependent Interest Rate Derivatives in a Finite Difference Setup.* The Aarhus School of Business, Noviembre, 2002.

[34] TITMAN & WALTER TOROUS, SHERIDAN. *Valuing commercial mortgages: an empirical investigation of the contingent-claims approach to pricing risky debt.* The Journal of Finance, **44**, No. 2, 1989, Junio, 345–373.

[35] WILMOTT, PAUL. *Paul Wilmott on quantitative finance.* John Wiley & Sons Ltd. **1 & 2**, 2000.

[36] WILMOTT, JEFF DEWYNNE & SAM HOWISON, PAUL. *Option Pricing.* Oxford Financial Press, 1993.

(Recibido en junio de 2005. Aceptado para publicación en abril de 2007)

Departmento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia
e-mail: penagosnicolas@gmail.com