Sociedad Colombiana de Matemáticas
XV Congreso Nacional de Matemáticas
2005 **Apuntes**

Lecturas Matemáticas
Volumen Especial (2006), páginas 361–369

Uso de un *software* como propuesta metodológica para la enseñanza de ecuaciones diferenciales

Hugo A. Escorcia, Luis M. Villada, Mauricio Toro & Carlos E. Mejía
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

Abstract. We present an educational software to be used in partial differential equations courses in Engineering and Sciences. The software allows for the computation of analytical and numerical solutions of boundary value problems associated with linear diffusion equations in one and two dimensions. It addresses aspects such as existence, uniqueness, initial and boundary conditions, stability and convergence. For the numerical solution several finite difference schemes are implemented. The software was developed by the authors in MATLAB. It contains graphical user interfaces for data input and analysis of results and several routines for the processing module.

Key words and phrases. Scientific computation, differential equations, educational software.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. Primary: 97U40. Secondary: 65M06.

Resumen. Presentamos un *software* didáctico que sirve para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales parciales en cursos de ingeniería y ciencias básicas. El *software* permite obtener soluciones analíticas y numéricas de problemas con valores en la frontera asociados con ecuaciones lineales de difusión, en una y dos dimensiones. Se resaltan aspectos como existencia, unicidad, condiciones iniciales y de frontera, estabilidad y convergencia. Para la solución numérica se plantean varios esquemas de diferencias finitas. El *software* fue desarrollado por los autores en plataforma MATLAB. Contiene interfaces gráficas para entrada de datos y para análisis de resultados y gran variedad de rutinas para el módulo de procesamiento.

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales son expresiones matemáticas utilizadas para describir fenómenos de medios continuos como el transporte por difusión de un contaminante, la difusión de calor, las redes de flujo en términos de la función de potencial de velocidades o de la función de corriente, el flujo en medios porosos y el potencial eléctrico, entre otros. Nos concentramos en ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico. La más sencilla de estas ecuaciones, conocida como la ecuación lineal del calor, se escribe así:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 \theta \tag{1.1}$$

donde θ representa la concentración del contaminante, o la temperatura, o las funciones de corriente y potencial o el potencial eléctrico o el potencial hidráulico en el flujo en medios porosos, t es la coordenada temporal, α^2 es un coeficiente de difusión que toma significados diferentes de acuerdo al fenómeno que se esté trabajando y ∇^2 es el operador laplaciano.

En este artículo se presenta el *software*, desarrollado por los autores en MATLAB ([**?**]), para resolver problemas con valores en la frontera asociados a ecuaciones del tipo (**??**) y a otras que se plantean para la representación de fenómenos de flujo y difusión. El software es amigable pues dispone de ayudas en línea para los distintos procesos. Algunos de los mensajes de ayuda son pequeñas tutorías sobre el método que se esté explicando. Generalmente van acompañados de referencias sugeridas para mayor información. El *software* consta de tres módulos: un primer módulo de pre-procesamiento de información, donde se definen la geometría, las condiciones iniciales en tiempo si las hay, las condiciones de borde y los parámetros numéricos; un segundo módulo, de procesamiento, en el que se calculan la solución analítica en los casos más sencillos y la solución numérica por medio de métodos de diferencias finitas para varias combinaciones de condiciones de frontera, incluyendo algunas no desarrolladas para las soluciones analíticas. El tercer módulo, el de pos-procesamiento, permite la visualización de las soluciones obtenidas en el segundo módulo y el análisis de los resultados.

El *software* desarrollado se propone para cursos de pregrado y posgrado en ingeniería, física, química y matemáticas. De este modo se facilita el estudio de soluciones analíticas, soluciones numéricas, aspectos físicos de la ecuación y su injerencia en la solución, etc.

2. Descripción del *software*

Este *software* es una herramienta versátil que permite el análisis de aspectos teóricos y físicos de las ecuaciones planteadas. Se concentra en los problemas más tratados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y en particular en aquellos que tienen que ver con difusión. Tiene la posibilidad de considerar problemas unidimensionales y bidimensionales y cuenta con algoritmos para aproximar soluciones analíticas lo mismo que algoritmos de diferencias finitas para soluciones numéricas con las combinaciones más comunes de condiciones de frontera. El *software* consta de tres módulos que describimos brevemente:

2.1. Módulo pre-procesador. Corresponde al planteamiento del problema e ingreso de datos al *software* . Este procedimiento se realiza en dos ventanas muy fáciles de usar.

En una primera ventana después de haber realizado el planteamiento del problema en forma matemática, se procede al ingreso de la información. Las primeras opciones que se seleccionan del menú son el tipo de ecuación, ya sea homogénea o no homogénea, y el estado en que se quiere estudiar el problema, teniendo como posibilidades el estado transitorio y el estado permanente. Después el usuario debe escribir un nombre para la variable de su problema, como por ejemplo, temperatura, concentración de contaminante, etc, que será utilizado en el pos-procesador para la visualización de los resultados. También debe escribir la condición inicial del problema correspondiente a un tiempo $t = t_0$, la función de forzamiento que se tiene en caso de ser un problema no homogéneo, parámetros geométricos del dominio y los parámetros físicos que corresponden solamente al coeficiente de difusión en la mayoría de los casos. Por último se seleccionan las condiciones de frontera entre condiciones de tipo Dirichlet, de tipo Neumann y mixtas. Toda la información se debe ingresar en un sistema compatible de unidades.

En la segunda ventana se selecciona el tipo de solución que se desea obtener. Aquí se tienen en cuenta las soluciones numéricas o analíticas.

En la utilización de los métodos numéricos el usuario tiene la posibilidad de escoger entre un método explícito, uno completamente implícito y el de Crank-Nicolson. Para las condiciones de frontera tipo Neumann y mixtas, el usuario debe seleccionar un tipo de discretización de la derivada en la frontera. Las opciones son: discretizaciones regresivas, progresivas y centrales.

Si se desea calcular la solución para el estado transitorio, el usuario deberá ingresar, para la solución analítica o la solución numérica, según el caso, un valor de paso en la longitud (Δx), en el tiempo (Δt) y un tiempo de simulación, correspondiente al último instante de tiempo que desea utilizar en los cálculos. Si el usuario ha seleccionado realizar la solución para el estado permanente solamente, deberá ingresar el valor para el paso en la longitud, definiendo así los puntos de la malla espacial donde realizará los cálculos.

En esta ventana termina todo lo referente a ingreso de datos y entrada de toda la información que se requiere para la solución del problema por medio del *software* . El usuario también selecciona un nombre para el archivo en el cual se guardarán todos los datos ingresados del problema en conjunto con los resultados que se obtengan al calcular la solución.

2.2. Módulo procesador. Después de ingresar toda la información con la cual se plantea el problema y de haber seleccionado un método de solución, con sus parámetros correspondientes, se procede a calcular la solución.

En esta parte del *software* se calcula la solución siguiendo los esquemas y procedimientos que se describen en el módulo de ayuda que se implementó en el *software* . En este módulo el usuario encuentra una base teórica corta donde se explican los algoritmos utilizados y se presenta una lista de referencias a las cuales puede acudir para ampliar la información.

2.3. Módulo pos-procesador. Aquí el usuario podrá realizar la visualización de los resultados obtenidos de cualquier solución realizada con anterioridad. En este módulo, el *software* ofrece dos ventanas, en las cuales se pueden realizar la visualización de resultados en forma gráfica o tabulada, y el cálculo de la diferencia entre dos soluciones. Cuando una de estas soluciones es la solución de referencia, a esta diferencia se le denomina *error*.

Para la visualización de resultados en forma gráfica, el usuario abre el archivo en donde haya decidido guardar cualquier problema resuelto con anterioridad e inmediatamente el *software* le mostrará en una ventana toda la información que corresponde a los datos ingresados en el pre-procesador para el archivo seleccionado. En esta ventana, el usuario no podrá realizar el ingreso de ninguna información que modifique los datos y los resultados de un problema que haya sido resuelto, solamente podrá observarlos. Posteriormente el usuario deberá seleccionar tiempos o posiciones, o ambas, para observar los resultados ya sea de forma gráfica o tabulada de la solución seleccionada. Los resultados podrán analizarse teniendo la variación a lo largo del tiempo en posiciones definidas, o la variación en todo el dominio en los tiempos seleccionados. También se cuenta con la opción de visualizar en un mismo gráfico dos soluciones distintas para un mismo problema. Esto lo hace muy útil en el momento de comparar diferencias en el comportamiento de las soluciones, por ejemplo, cuando se tiene un mismo problema resuelto por dos métodos numéricos distintos.

3. Aspectos matemáticos y numéricos

Este *software* permite resolver problemas de valor inicial y de frontera asociados a la ecuación diferencial lineal de difusión, tanto en una como en dos dimensiones. Contiene una colección de ejemplos previamente trabajados de los cuales se conoce una solución de referencia la cual, en algunos casos, requiere algún tipo de aproximación. Las principales fuentes utilizadas para la selección de ejemplos y almacenamiento de soluciones de referencia, son [**?**] y [**?**].

Aunque la mayoría de los usuarios utilizarán solamente los ejemplos propuestos, el *software* permite agregar ejemplos con mínimo esfuerzo pues ofrece la posibilidad de entrada de datos. Lo único que se debe tener en cuenta es que la entrada de datos se haga respetando las reglas de sintaxis de MATLAB.

Sin duda el *software* tiene una gran riqueza pedagógica pues incluye una adecuada variedad de condiciones de borde para las ecuaciones y varios métodos numéricos para los cuales se ofrece mensajes de ayuda que son verdaderos tutoriales. Las principales referencias seguidas para la programación de los métodos numéricos son [**?**] y [**?**].

En ocasiones, los resultados obtenidos por los usuarios no son satisfactorios. Las razones pueden ser varias, por ejemplo, selección inadecuada de método numérico o de parámetros de discretización. Esta última razón merece destacarse pues, en el caso de esquemas explícitos, se pueden generar inestabilidad y llevar a soluciones inaceptables. Los mensajes de ayuda aclaran este punto pero de todas maneras invitamos a los usuarios a consultar [**?**] y [**?**] para afianzar sus ideas sobre el tema.

El problema unidimensional que más se utiliza en este *software* es

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = G(x,t),\ \text{para}\ t > t_0,\ 0 < x < L \tag{3.1}$$

$$u\,(x,t_0) = f(x),\ 0 < x < L \tag{3.2}$$

$$\alpha_1 u\,(0,t) - \beta_1 u_x\,(0,t) = 0,\ \text{para}\ t > t_0 \tag{3.3}$$

$$\alpha_2 u\,(L,t) - \beta_2 u_x\,(L,t) = 0,\ \text{para}\ t > t_0. \tag{3.4}$$

Se trata de una ecuación lineal de difusión con parámetros físicos ρ, c y κ, los cuales tienen significados adecuados a la situación particular. Por ejemplo, si se trata de conducción de calor en una barra de longitud L e interesa conocer la distribución de temperatura $u\,(x,t)$ en la barra, entonces κ es el coeficiente de difusión, ρ es la densidad del material y c es el calor específico.

La línea (**??**) es la condición inicial, es decir, la distribución de temperatura en la barra cuando $t = t_0$.

Las líneas (**??**) y (**??**) son condiciones de borde. Indican la forma como interactúa la barra con el medio. Escritas así, incluyen como casos particulares las condiciones de borde de tipo Dirichlet, que se presentan cuando se conoce de antemano la temperatura en el borde y las condiciones de borde de tipo Neumann, que consisten en conocer en el borde la derivada normal de la temperatura. En problemas unidimensionales, la derivada normal de u es $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Similarmente, cuando estamos interesados en dos dimensiones espaciales trabajamos en una región rectangular

$$R = \{(x,y) \quad / \quad a < x < b, \quad c < y < d\}$$

y consideramos dos ecuaciones, una elíptica y una parabólica. La ecuación elíptica es la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(x,y),\ \text{para}\ (x,y) \in R \tag{3.5}$$

$$u\,(x,y) = f(x,y)\ \text{en la frontera de}\ R. \tag{3.6}$$

La ecuación parabólica es la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 u\,(x, y, t) \;\text{ para }\; (x, y) \in R, \quad t > t_0 \tag{3.7}$$

$$u\,(x, y, t_0) = u_0\,(x, y) \;\text{ en } R \tag{3.8}$$

$$u\,(x, y, t) = f(x, y, t) \text{ en la frontera de } R. \tag{3.9}$$

Para la ecuación elíptica (**??**-**??**) también se ofrecen condiciones tipo Neumann en la frontera. Para la ecuación parabólica (**??**-**??**-**??**) se incluyen dos métodos numéricos de solución en diferencias finitas. El primero es un esquema explícito con diferencias centrales en espacio y el segundo es un esquema ADI (*Alternating Direction Implicit*).

4. Ejemplo de aplicación

Con el objeto de ilustrar algunos de los usos que puede tener el *software* en el apoyo académico, se presentan un ejemplo y un taller alusivo dirigido a estudiantes de posgrado de áreas de ingenierías o ciencias. El ejemplo se tomó de [**?**].

4.1. Planteamiento del problema. Consideremos una barra de hierro, de 50 cm de longitud, con calor específico $c = 0{,}437$ $J/(gK)$, densidad $\rho = 7{,}88$ g/cm^3, y conductividad térmica $k = 0836$ $W/(cmK)$. La barra se calienta a una temperatura constante de 4 grados centígrados, un extremo ($x = 0$) está sumergido en hielo (0 grados centígrados), mientras el otro extremo se mantiene a 4 grados centígrados. La temperatura inicial está dada por

$$\psi(x) = 4 - \frac{4}{0{,}5}x, \tag{4.1}$$

donde $\psi(x)$ está dado en grados centígrados. Finalmente, suponemos que, en el tiempo $t = 0$, los extremos de la barra se encuentran sumergidos en hielo (0 grados centígrados). Se desea aproximar la distribución de temperatura después de 20, 60, y 300 segundos. ¿Cuál es la distribución de temperatura después de 5 minutos?

El sistema que se debe resolver es

$$\begin{aligned}
\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \;\text{ para } t > 0,\; 0 < x < 50 \\
u\,(x, 0) &= \psi(x), \;\; 0 < x < 50 \\
u\,(0, t) &= 0, \;\text{ para } t > 0 \\
u\,(50, t) &= 0, \;\text{ para } t > 0.
\end{aligned}$$

Taller

1. Utilice el método explícito, el método completamente implícito y el método de Crank-Nicolson para obtener aproximaciones de la distribución de temperatura. Utilice varios parámetros de discretización $k = \Delta t$ y $h = \Delta x$ de manera que $r = 0{,}3$, $r = 0{,}5$ y $r = 0{,}7$, donde $r = \alpha \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.
2. Realice un análisis de sensibilidad del tamaño espacial de la malla de cálculo. Es decir, establezca relaciones entre el esquema numérico seleccionado y el tamaño de la malla. Calcule errores y tome una decisión.
3. Verifique tasas de convergencia de cada uno de los esquemas numéricos. Cuando la teoría predice que el error cometido se comporta asintóticamente como $\mathrm{O}(h^q)$, es conveniente preparar tablas con cocientes $\frac{error}{h^q}$. Si la teoría predice un comportamiento asintótico que incluye tanto potencias de h como potencias de k, entonces es útil tomar $k = ch^m$, con c y m dados por el usuario y preparar una tabla similar a la anterior.
4. Realice un análisis de sensibilidad del tamaño del intervalo temporal de cálculo. Utilice como referencia la solución analítica.
5. Evalúe los posibles efectos de difusión numérica que presentan los diferentes esquemas numéricos empleados.
6. En el caso de usted querer implementar un experimento en el laboratorio, dónde instrumentaría la barra del problema?. Justifique su respuesta.
7. Analice la posibilidad de aplicar el principio de superposición para la solución considerando condiciones de borde tipo Dirichlet.
8. Proponga un caso de la vida real en el cual usted utilice la ecuación no homogénea, es decir, una función no nula $G(x,t)$ en (**??**) y resuélvalo por cualquier método. Explique el comportamiento de la solución.
9. Considere el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1,\ 0 < t \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0 & 0 < t, \\ u(1,t) = 0 & 0 < t. \end{cases}$$

   a) Aproxime la solución en $t = 0{,}7$, utilizando el método explícito con $h = 0{,}1$ y los siguientes valores de k : 0,004, 0,005, 0,007. Comente los resultados.
   b) Repita la parte (a) utilizando el método de Crank-Nicolson.
   c) Establezca el sistema matricial que se obtiene con el método explícito (Ver ayuda).
   d) Utilice interpolación para aproximar $u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0{,}7\right)$.

10. Para el sistema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1,\ 0 < t \\ u(x,0) = x & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0 & 0 < t, \\ u_x(1,t) = 0 & 0 < t. \end{cases}$$

se pide:

a) Utilizar la solución analítica para aproximar la solución de la EDP en $t = 0{,}5$.

b) Utilizar el método completamente implícito y diferentes discretizaciones de $u_x(1,t) = 0$, para dar la solución en $t = 0{,}5$, (ver ayuda del *software*).

c) Comparar gráficamente las soluciones obtenidas en a. y b. en el tiempo dado.

d) Determinar el error de aproximación en $x = 1$, $t = 1$, comparando los resultados obtenidos en a. con los obtenidos en b.

e) Obtener el error cuadrático medio global en cada aproximación tomando una malla adecuada en los tres casos.

f) ¿Qué conclusiones se puede sacar de aproximar $u_x(1,t)$ mediante el método de diferencias centradas? (ver ayuda del *software*).

11. En el problema

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}u_{xx} & 0 < x < 2,\ 0 < t \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 < x < 2, \\ u(0,t) = 0 & 0 < t, \\ u_x(2,t) = -u(2,t) & 0 < t. \end{cases}$$

se pide:

a) Utilizando la solución analítica aproximar $u(2,t)$ para $0 < t < 1$.

b) Aproximarla ahora utilizando el método de Crank-Nicolson y cada una de las diferentes discretizaciones en la derivada, (ver ayuda del *software*).

c) Hallar el error de aproximación comparando las soluciones numéricas con la solución analítica solamente para $u(2,t)$ con $0 < t < 1$, ¿Qué conclusiones se pueden sacar?

12. En el problema

$$\begin{array}{cc} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1,\ 0 < t \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) = 0 & 0 < t, \\ u_x(1,t) = 0 & 0 < t. \end{array}$$

utilizando el método totalmente implícito, comente los resultados de las siguientes soluciones numéricas:

a) Diferencia progresiva en $x = 0$ y diferencia regresiva en $x = 1$.

b) Diferencia regresiva en $x = 0$ y diferencia progresiva en $x = 1$.

c) Diferencia centrada en $x = 0$ y diferencia centrada en $x = 1$.

5. Comentarios finales

La opción de realizar el análisis de aspectos matemáticos y físicos de un problema, que se pueda resolver por medio de las ecuaciones diferenciales parciales aquí presentadas, convierten al *software* en una herramienta importante para la enseñanza.

Tomando como ejemplo el taller propuesto en este artículo, al utilizar el *software* para responder las preguntas propuestas, muchas de ellas tendrán respuestas inmediatas, simplemente con el uso del pos-procesador. Algunas preguntas requieren de algo más de creatividad por parte del usuario, haciendo necesario que realice más de una solución del problema, utilizando diferentes métodos o diferentes parámetros. En algunos otros casos se le hace necesario al usuario realizar un análisis de los resultados obtenidos, donde las respuestas a las preguntas no se obtendrán directamente del pos-procesador del *software* .

La posibilidad de comparar diferentes soluciones después de la utilización de diferentes métodos, la observación gráfica o tabulada de resultados y el cálculo del error entre soluciones, es lo que hace que el uso del *software* como herramienta en la enseñanza, nos permita responder las preguntas planteadas en el taller. Para más detalles sobre el uso del *software* se puede consultar [**?**]

Agradecimientos: Los autores manifiestan su agradecimiento a COLCIENCIAS por el apoyo al proyecto de investigación código 1118-11-16705.

Bibliografía

[1] W. F. AMES, *Numerical methods for partial differential equations*, 3th. ed., Academic Press, (1992).
[2] H. ESCORCIA, *Implementación de un software para la solución de ecuaciones de flujo y difusión.* Tesis de Maestría en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2006.
[3] M. S. GOCKENBACH, *Partial differential equations, analytical and numerical methods*, SIAM, (2002).
[4] D. KINCAID & W. CHENEY, *Análisis numérico, las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. (1994). s, (1982).
[5] MATLAB, *MATLAB*, http: //www.mathworks.com/.
[6] G. D. SMITH, *Numerical solution of partial differential equations: Finite diffrence methods*, 3th ed., Oxford University Press, (1993).
[7] E. ZAUDERER, . *Partial differential equations of applied mathematics.*, 2nd. ed., Jhon Wiley and sons, Inc., (1998).

(Recibido en abril de 2006. Aceptado en septiembre de 2006)

DEPARTMENTO OF MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
MEDELLÍN, COLOMBIA
e-mail: `cemejia@unal.edu.co`