Sociedad Colombiana de Matemáticas
XV Congreso Nacional de Matemáticas
2005 **Apuntes**

Lecturas Matemáticas
Volumen Especial (2006), páginas 137–159

Panorama de cuestiones de teoría de modelos

Enrique Casanovas
Universidad de Barcelona, España

Abstract. We present the basic fundamental tools and notions of model theory and some of its interactions with general mathematics.

Key words and phrases. Model theory, Stability, Simple theories, o-minimality.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 03C.

Resumen. Presentamos las herramientas básicas fundamentales de la teoría de modelos y algunas de sus interacciones con las matemáticas en general.

1. **Algunos libros y artículos recomendados**

La teoría de modelos es la parte de la lógica matemática que investiga las estructuras matemáticas (modelos) con ayuda de los lenguajes formales de la lógica, con especial atención a su clasificación y al análisis de sus conjuntos y relaciones definibles. En sus orígenes trataba de la semántica de los lenguajes lógicos y se interesaba por estructuras cualesquiera, de manera que llegó a ser definida como la suma del álgebra universal con la lógica. Sin embargo las aplicaciones a estructuras matemáticas naturales — grupos y cuerpos principalmente — han ido ganando peso progresivamente y hoy día constituyen un componente esencial. La teoría de modelos aspira a influir en el resto de la matemática proporcionando nuevos conocimientos en temas principalmente algebraicos haciendo uso de sus propias herramientas.

Al lector interesado en conocer más a fondo esta disciplina le recomendamos el artículo expositorio [15] de A. Pillay y también el libro [3] editado por E. Bouscaren. En éste último los más prestigiosos especialistas presentan los fundamentos necesarios para poder comprender las aplicaciones de la teoría de modelos a la conjetura de Mordell-Lang y a la conjetura de Manin-Mumford realizadas por E. Hrushovski.

Siempre es difícil determinar cuándo nace una determinada disciplina. En el caso de la teoría de modelos el lector puede documentarse con el libro [1] de C. BADESA y con el artículo [10] de D. LASCAR. Creo que hay acuerdo unánime acerca de que la figura más importante de la teoría de modelos es A. TARSKI. La lectura de su biografía [4] escrita por A. B. FEFERMAN y S. FEFERMAN puede resultar muy útil para comprender el pasado más reciente de la teoría de modelos.

La teoría de modelos misma se encuentra en los manuales y en los artículos de investigación. Quien quiera conocer más a fondo la temática debe dirigirse a ellos. El texto introductorio por excelencia ha sido durante muchos años el libro [5] de C. C. CHANG y H. J. KEISLER. Únicamente le hizo una cierta competencia el elegante manual [17] de G. SACKS, un especialista de la teoría de la recursión y no precisamente de la teoría de modelos. Posteriormente aparecieron diversos textos introductorios a la teoría de la estabilidad y entre ellos el libro [16] de B. POIZAT, que tiene también el carácter de introducción a la teoría de modelos en general. Está redactado con un agudo sentido del humor y ha tenido notable influencia. W. HODGES escribió [6], un voluminoso tratado en el que se estudian temas centrales y otros más variopintos, y posteriormente [7], una versión abreviada del primero. Los libros de HODGES incorporan muchos temas que simplemente no existían cuando CHANG y KEISLER redactaron su texto. No queremos dejar de mencionar los maravillosos textos [23] y [22] de M. ZIEGLER. Lamentablemente no han sido publicados y sólo están disponibles en versión alemana en la página web del autor en la dirección

`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/Ziegler.html`

Finalmente, el libro [12] de D. MARKER es la introducción más actualizada de que disponemos actualmente y es probable que se consolide como texto de referencia.

2. **Estructuras, fórmulas, satisfacción y consecuencia**

La noción más fundamental de la teoría de modelos es la de *satisfacción*. Hay dos versiones de ella. Por un lado es una relación entre estructuras y enunciados del lenguaje formal de primer orden, la relación en la que está un enunciado σ con una estructura M cuando σ es verdadero en M. Se dice entonces que M satisface σ o que M es un *modelo* de σ y esta situación se representa por

$$M \models \sigma.$$

Por otro lado la relación de satisfacción se da también entre estructuras M, sucesiones finitas $a_1, \ldots, a_n$ del universo de las estructuras y fórmulas abiertas $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Se dice que $a_1, \ldots, a_n$ satisface en M la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ si la fórmula se convierte en un enunciado verdadero en M cuando interpretamos cada variable x_i como nombre del correspondiente elemento a_i. Para expresarlo se utiliza la notación

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

No son realmente dos nociones distintas pues la primera puede entenderse como un caso particular de la segunda si se admite la sucesión vacía. Sin embargo es útil mantener esta distinción a efectos de entender dos de las principales tareas de la teoría de modelos: clasificar estructuras y clases de estructuras por los enunciados que satisfacen y analizar las relaciones definibles dentro de una estructura dada. La primera labor tiene que ver con la relación $M \models \sigma$ y la segunda con $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Para ser más precisos deberíamos concretar qué es una estructura y qué es una fórmula. Las *estructuras* son objetos matemáticos de la forma

$$(M, R_1, R_2, \ldots, f_1, f_2 \ldots, a_1, a_2, \ldots)$$

donde M es el *universo* de la estructura, un conjunto no vacío, cada R_i es una relación n_i-ádica entre elementos del universo, es decir $R_i \subseteq M^{n_i}$, cada f_i es una operación m_i-ádica del universo en el universo, es decir $f_i : M^{m_i} \to M$, y cada a_i es un elemento distinguido del universo. Los números n_i y m_i deben especificarse de antemano. El *lenguaje* de una estructura es el conjunto de símbolos que se fijan para referirse a sus relaciones, operaciones e individuos distinguidos. Para sus relaciones R_i se dispone de correspondientes símbolos de relación n_i-ádicos, para sus funciones f_i se dispone de correspondientes símbolos de función m_i-ádicos y para sus elementos distinguidos a_i se dispone de correspondientes constantes individuales. Confiando en que el contexto evite las posibles confusiones, usamos a menudo la misma notación para designar una estructura que para designar su universo.

Con los números reales como universo es posible obtener muy diversas estructuras según las relaciones, operaciones y elementos distinguidos que se tengan en cuenta. Por ejemplo si nos interesa únicamente el orden trataremos con la estructura $(\mathbb{R}, <)$, si queremos estudiar el grupo aditivo fijaremos la estructura $(\mathbb{R}, +, 0)$, si el grupo aditivo ordenado tomaremos $(\mathbb{R}, <, +, 0)$ y para estudiar el cuerpo real suele tomarse la estructura de anillo $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$. Para el orden de los racionales tomaremos la estructura $(\mathbb{Q}, <)$, para el grupo de los enteros tomaremos $(\mathbb{Z}, +, 0)$, para el cuerpo complejo $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ y para la aritmética de los números naturales $(\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$.

El siguiente componente que debemos entender es el lenguaje formal de primer orden que nos proporciona la lógica. Debemos fijar un conjunto de símbolos (de relación de función y constantes individuales) así como los correspondientes números ádicos de los símbolos de relación y de función. Este conjunto de símbolos se denomina *lenguaje*, *vocabulario* o *tipo de semejanza*. Para construir los términos y las fórmulas a partir de estos símbolos básicos podemos recurrir a ciertos símbolos lógicos: el símbolo de igualdad $=$, los conectores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, los cuantificadores $\forall$, $\exists$, las variables $x, y, z, \ldots$ y los paréntesis izquierdo y derecho.

Los términos y las fórmulas (de primer orden) se construyen mediante símbolos del lenguaje de la estructura como se indica:

- Los *términos* son las variables $x, y, \ldots$, las constantes individuales y los sucesiones de símbolos obtenidas mediante composición $F(t_1, \ldots, t_n)$ de un símbolo de función n-ádico F con los términos $t_1, \ldots, t_n$ previamente construidos.
- Las fórmulas más elementales se llaman *fórmulas atómicas* y son las *ecuaciones* $t_1 = t_2$ entre términos t_1, t_2 y las expresiones de la forma $R(t_1, \ldots, t_n)$ obtenidas al colocar a continuación de un símbolo de relación n-ádico R la sucesión de términos $t_1, t_2 \ldots, t_n$. A partir de ellas se construyen las restantes fórmulas con los siguientes procesos:
  - Uso de conectores lógicos: $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ se obtienen de las fórmulas φ, ψ.
  - Cuantificación: $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$ se obtienen de la fórmula φ cuantificando la variable x.

Los *enunciados* o *sentencias* son las fórmulas en las que todas las variables han sido cuantificadas. Las fórmulas con variables no cuantificadas —se llaman *variables libres*— se denominan *fórmulas abiertas*. Para designar una fórmula cuyas variables libres estén en la lista $x_1, \ldots, x_n$ suele usarse la notación $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Hay diversas simplificaciones que suelen efectuarse en la práctica para adaptar el lenguaje formal a las convenciones matemáticas habituales. Por ejemplo, para trabajar con la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$, si no existe confusión posible se usan los mismos símbolos $+, \cdot, <, 0, 1$ para designar las relaciones, operaciones y elementos distinguidos de la estructura que para designar los símbolos correspondientes del lenguaje formal. Por tanto consideramos a $+$ y a $\cdot$ como símbolos diádicos de función. En ese caso se usa la notación más cómoda $x + y$, $x \cdot y$ en vez de $+(x, y)$ y $\cdot(x, y)$ para los términos construidos con ellos y con las variables x, y. Se usa también la notación habitual $x < y$ en vez de la obligada $< xy$. Con estas salvedades hechas, el lector no tendrá dificultad en comprobar que el enunciado $\forall x(0 < x \to 0 < x \cdot x)$ expresa que el cuadrado de números reales positivos es positivo y por tanto es verdadero, esto es,

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1) \models \forall x(0 < x \to 0 < x \cdot x)$$

Pero si sustituímos el orden $<$ por su inverso $>$ en la estructura y mantenemos los símbolos del lenguaje formal que usábamos, en la estructura resultante $(\mathbb{R}, +, \cdot, >, 0, 1)$ tenemos el símbolo $<$ para la relación $>$ con lo cual el mismo enunciado $\forall x(0 < x \to 0 < x \cdot x)$ expresa ahora que el cuadrado de reales negativos es negativo y por tanto es falso. Para tener un ejemplo del uso de fórmulas abiertas, considérese las fórmulas $x + x = x \cdot x$ y $\exists y\, y \cdot y = x$. La primera sólo la satisface en $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ el número cero y la segunda la satisfacen el cero y los reales positivos. En $(\mathbb{Z}, +)$ la fórmula $\exists y\, y + y = x$ es satisfecha por los enteros pares y sólo por ellos.

A. TARSKI proporcionó un análisis matemático de las relaciones $M \models \sigma$ y $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Consiguió definir de modo matemáticamente impecable la relación de satisfacción. Este logro no es tanto una ayuda para entender con precisión las afirmaciones de tal tipo que se puedan hacer en casos concretos —habitualmente ello es bien claro y no hay necesidad de explicitarlo más— como el punto de partida de una teoría que aspira a demostrar resultados generales sobre satisfacción de fórmulas y enunciados en estructuras arbitrarias.

La relación de satisfacción es útil para explicar uno de los conceptos más básicos y fundamentales de la lógica matemática: la noción de *consecuencia lógica*. Se dice que un enunciado σ es consecuencia lógica del conjunto de enunciados Σ si todo modelo de Σ (es decir toda estructura que satisfaga todas las sentencias de Σ) es también modelo de σ. Por el teorema de completud de Gödel sabemos que ello es equivalente a la existencia de una deducción formal de σ en el cálculo lógico efectuada con premisas en el conjunto Σ. Suele usarse la notación $\Sigma \vdash \sigma$ para indicar que existe una deducción formal de σ a partir de Σ. Para la consecuencia lógica se usa la notación $\Sigma \models \sigma$, empleando pues el mismo símbolo $\models$ que se usa para la relación de satisfacción. El contexto habitualmente aclara cuál es la noción a la que nos referimos. El teorema de completud de Gödel establece entonces que

$$\Sigma \vdash \sigma \text{ si y sólo si } \Sigma \models \sigma.$$

3. Equivalencia elemental y extensiones elementales

El adjetivo *elemental* se usa frecuentemente en la teoría de modelos. Al emplearlo no se pretende expresar que las nociones a las que se aplica sean sencillas o básicas sino que son nociones de la lógica elemental, es decir, de la lógica de primer orden, la lógica en la que la cuantificación se efectúa sobre elementos del universo de la estructura y no sobre subconjuntos del universo.

Se dice que dos estructuras M, N son *elementalmente equivalentes* si satisfacen los mismos enunciados. Para indicar que ello es así se usa la notación

$$M \equiv N.$$

Para estructuras finitas la equivalencia elemental es simplemente la relación de ser isomorfo. Pero para estructuras infinitas la situación es muy distinta: toda estructura infinita es elementalmente equivalente a otras no isomorfas a ella. En casos particulares puede ser muy difícil resolver la cuestión de si dos estructuras son o no elementalmente equivalentes. Para ello se han desarrollado diversas técnicas de las que hablaremos después. Por ejemplo, tanto los enteros ordenados $(\mathbb{Z},<)$ como los naturales ordenados $(\mathbb{N},<)$ son no elementalmente equivalentes entre sí pero cada uno de ellos es elementalmente equivalente a la estructura ordenada que se obtiene añadiendole a la derecha una copia isomorfa de los enteros. Usando la notación habitual para suma de órdenes tenemos que

$$(\mathbb{Z},<) \equiv (\mathbb{Z},<) + (\mathbb{Z},<) \text{ y } (\mathbb{N},<) \equiv (\mathbb{N},<) + (\mathbb{Z},<).$$

Sin embargo $(\mathbb{N},<) \not\equiv (\mathbb{N},<) + (\mathbb{N},<)$.

Otro de los conceptos básicos de la teoría de modelos es el de extensión elemental. Se dice que M es una *subestructura* de N o que N es una *extensión* de M y se escribe $M \subseteq N$ si el universo de M es un subconjunto del de N, los objetos distinguidos de M son los de N, las operaciones de M coinciden con las de N para tuplas de M y las relaciones de M son la restricción a M de las correspondientes relaciones de N. Se dice que M es una *subestructura elemental* de N o que N es una *extensión elemental* de M y se escribe

$$M \preceq N$$

si $M \subseteq N$ y las tuplas de elementos de M satisfacen en M las mismas fórmulas que en N: para cada n, cada $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in M$,

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ si y sólo si } N \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

Por ejemplo, $(\mathbb{N}, <) \subseteq (\mathbb{Z}, <)$ pero $(\mathbb{N}, <) \not\preceq (\mathbb{Z}, <)$, pues $(\mathbb{N}, <) \not\equiv (\mathbb{Z}, <)$. Por otro lado, si $\mathbb{N}^+$ son los naturales positivos $(\mathbb{N}^+, <) \subseteq (\mathbb{N}, <)$ y $(\mathbb{N}^+, <) \equiv (\mathbb{N}, <)$ pero $(\mathbb{N}^+, <) \not\preceq (\mathbb{N}, <)$ pues las propiedades del número uno expresables en la lógica de primer orden son distintas en una y en otra estructura. Un ejemplo positivo nos lo proporcionan los grupos aditivos ordenados real y racional:

$$(\mathbb{Q}, +, <, 0) \preceq (\mathbb{R}, +, <, 0).$$

Pero al añadir el producto se pierde incluso la equivalencia elemental

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot) \not\equiv (\mathbb{R}, +, \cdot)$$

Es un hecho bien conocido y relativamente fácil de justificar que dos estructuras son elementalmente equivalentes si y sólo si tienen extensiones elementales isomorfas. Es un resultado útil para ciertos propósitos, pero no sirve para proporcionar una caracterización de la equivalencia elemental que no use nociones lógicas pues la noción de extensión elemental se define apelando a fórmulas y satisfacción. Pero existe un cierto tipo particular de extensión elemental, las ultrapotencias, que se definen exclusivamente en términos algebraicos. Una *ultrapotencia* de una estructura M es un cierto cociente de una potencia de M. La potencia es un caso particular de producto directo de estructuras. El cociente se construye a partir de un ultrafiltro en el conjunto de índices usado para la potencia. Identificando M con su imagen natural en la ultrapotencia se puede admitir que se trata de una extensión de M. Las extensiones mediante ultrapotencias siempre son elementales. Pues bien, las ultrapotencias proporcionan una caracterización algebraica de la equivalencia elemental:

Teorema 3.1 (KEISLER-SHELAH). *$M \equiv N$ si y sólo M y N tienen ultrapotencias isomorfas.*

Este teorema no tiene muchos efectos prácticos en casos particulares pues tanto la elección del ultrafiltro adecuado para obtener la ultrapotencia necesaria como la verificación de que las ultrapotencias son isomorfas suelen ser tareas muy complejas. Existe otra caracterización algebraica de la equivalencia elemental mucho más útil. Se enuncia en términos de juegos, los llamados *juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé*.

Sean M, N estructuras en un lenguaje que sólo tiene un número finito de símbolos. Un *isomorfismo parcial* entre M y N es una aplicación de un subconjunto de M en un subconjunto de N que cumple las condiciones de isomorfismo si se relativizan a su dominio.

Fijado un número natural n, consideramos un juego entre los jugadores I y II. El juego consta de n jugadas. En la jugada i, I escoge o bien un elemento $a_i \in M$ o bien un elemento $b_i \in N$. II responde con un elemento $b_i \in N$ en el primer caso y con un elemento $a_i \in M$ en el segundo. Al finalizar la partida se han obtenido n pares $(a_i, b_i) : i = 1, \ldots, n$. II gana si los n pares forman el grafo de una aplicación $a_i \mapsto b_i$ que es un isomorfismo parcial entre M y N. En otro caso gana I.

Teorema 3.2 (Ehrenfeucht-Fraïssé). *Si M y N son estructuras de lenguaje finito, $M \equiv N$ si y sólo si para cada n, II tiene una estrategia ganadora en el correspondiente juego.*

La limitación del teorema es que las estructuras deben tener lenguaje finito. Esta no es una restricción grave pues para estructuras de lenguaje arbitrario resulta que $M \equiv N$ si y sólo si todas las restricciones de M y N a sublenguajes finitos son elementalmente equivalentes.

4. Teorías y modelos

Una *teoría* es un conjunto de enunciados que contiene a todas sus consecuencias lógicas. Hay algo de arbitrario en la exigencia de que las teorías contengan a sus consecuencias y en ocasiones se definen las teorías como simples conjuntos de enunciados. Introduciendo la noción de conjunto de axiomas se puede soslayar esta ligera incomodidad de la rigidez de la definición. Un conjunto de *axiomas* Σ para una teoría T es un conjunto de enunciados de T que genera T como el conjunto de sus consecuencias lógicas: $T = \{\sigma : \Sigma \models \sigma\}$. Si T es una teoría, la clase de los modelos de T es

$$Mod(T) = \{M : M \models T\}$$

Normalmente estamos interesados en teorías satisfacibles, también llamadas consistentes. Es fácil ver que en cada lenguaje hay una única teoría insatisfacible, la teoría que consta de todas las sentencias del lenguaje en cuestión.

Un manera natural de obtener teorías es, como se ha visto, especificando un conjunto de axiomas para ella. Otra manera consiste en comenzar con una clase de estructuras K y definir su teoría como el conjunto de los enunciados verdaderos en todas las estructuras de K:

$$Th(K) = \{\sigma : M \models \sigma \text{ para cada } M \in K\}$$

En el caso particular de que K contenga una sola estructura M, obtenemos la teoría del modelo M: $Th(M) = Th(K) = \{\sigma : M \models \sigma\}$. Por tanto la teoría de un modelo M es el conjunto $Th(M)$ de los enunciados verdaderos en M.

Diremos que la clase K es *elemental* si hay una teoría T tal que $K = Mod(T)$. La terminología tradicional correcta sería la de Δ-elemental pues se reserva la denominación de elemental para el caso particular de que la teoría T tenga un único axioma. Es un ejercicio entretenido el verificar que las aplicaciones $K \mapsto Th(K)$ y $T \mapsto Mod(T)$ determinan una correspondencia de Galois entre clases elementales y teorías.

Ejemplos de clases elementales son los grupos, los grupos abelianos, los anillos, los cuerpos, los cuerpos algebraicamente cerrados y las álgebras de Boole. Ejemplos de clases no elementales son los grupos finitamente generados, los cuerpos arquimedianos, los anillos finitos y las álgebras de Boole numerables.

Cuando una teoría es insuficiente para caracterizar la clase de modelos en que estamos interesados, podemos pensar en mejorarla añadiendo nuevos axiomas. Pero en ocasiones eso ya no es posible porque la teoría ya es completa y cualquier nuevo axioma la volvería contradictoria. Una teoría T es *completa* si para cada sentencia σ o bien $T \models \sigma$ o bien $T \models \neg\sigma$. Resulta que una teoría (consistente) T es completa si y sólo si hay una estructura M tal que $T = Th(M)$. Eso no quiere decir, naturalmente, que M sea el único modelo de T, la clase de modelos de T puede ser muy amplia pero basta verificar en M si un enunciado es o no un enunciado de la teoría. Cualquier otro modelo de T sirve para lo mismo pues todos son elementalmente equivalentes cuando T es completa.

Observación 4.1. T es completa si y sólo si todos los modelos de T son elementalmente equivalentes.

Los problemas típicos a los que en la práctica nos enfrentamos en estos temas de la teoría de modelos son de los siguientes tipos:

- Dada una teoría T, describir todas sus completaciones. Por ejemplo, esto se ha realizado con éxito cuando T es la teoría de las álgebras de Boole y también cuando T es la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados.
- Dada una clase de estructuras K, resolver si K es o no elemental y, en caso afirmativo, encontrar un conjunto de axiomas lo más simple posible para su teoría $Th(K)$. Un célebre problema planteado por TARSKI en 1945 es el de averiguar si la clase de los grupos libres en dos o más generadores es elemental. Z. SELA ha anunciado recientemente que ha resuelto el problema de modo afirmativo.
- Dada una teoría completa T, describir los distintos modelos no isomorfos de $Mod(T)$. En particular, dada una estructura M, describir

$$Mod(Th(M)) = \{N : M \equiv N\}.$$

Este problema es muy complejo y se sabe que en ocasiones no tiene solución. Pero en otros casos tenemos una descripción muy satisfactoria, por ejemplo para los cuerpos algebraicamente cerrados en una característica fijada o para los espacios vectoriales sobre un cuerpo fijado.

Un caso de especial relevancia es el de la aritmética completa, la teoría del modelo $(\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. La *aritmética de Peano* (PA) es la teoría axiomatizada mediante la siguiente lista de enunciados:

- $\forall x \, \neg S(x) = 0$
- $\forall xy (S(x) = S(y) \to x = y)$
- $\forall x \, x + 0 = x$
- $\forall xy \, x + S(y) = S(x + y)$
- $\forall x \, x \cdot 0 = 0$
- $\forall xy \, x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
- $\forall x_1 \dots, x_n (\varphi(0, x_1 \dots, x_n) \land \forall y (\varphi(y, x_1 \dots, x_n) \to \varphi(S(y), x_1 \dots, x_n)) \to \forall y \varphi(y, x_1 \dots, x_n))$ para cada n y cada fórmula $\varphi(y, x_1 \dots, x_n)$

Los axiomas de PA son verdaderos (en $(\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$) y durante cierto tiempo todos los enunciados aritméticos verdaderos analizados pudieron ser demostrados en PA. La pregunta natural es entonces si PA es la aritmética completa o, en todo caso, si mediante la adición de algunos axiomas más a la lista es posible axiomatizar la aritmética completa. K. Gödel demostró en 1931 que esto no es así, que PA es incompleta y que ninguna adición efectiva de axiomas la puede completar.

5. Decidibilidad

La cuestión de la incompletud de la aritmética de Peano nos lleva a hacer una disgresión sobre la decidibilidad de la aritmética y sobre la cuestión general de la decidibilidad de teorías. Éste es un terreno de interacción entre la teoría de modelos y la teoría de la computabilidad que ha resultado ser muy fructífero desde los mismos inicios de la teoría de modelos.

Una teoría es *decidible* si hay un algoritmo que decide si un enuciado de su lenguaje pertenece o no a la teoría. La teoría es *efectivamente axiomatizable* si existe un algoritmo que produce una lista de axiomas para la teoría. Si una teoría tiene una lista finita de axiomas es claramente efectivamente axiomatizable. Se dice en ese caso que es *finitamente axiomatizable*. Para teorías completas, tener un procedimiento de decisión y tener un procedimiento efectivo de axiomatización son dos cosas equivalentes:

Observación 5.1. Una teoría completa es efectivamente axiomatizable si y sólo si es decidible.

Las teorías completas de las estructuras $(\mathbb{N}, +, S, 0)$ y $(\mathbb{N}, \cdot, 0)$ son efectivamente axiomatizables y por tanto son decidibles.

Teorema 5.1 (GÖDEL)**.** *La aritmética de Peano es incompleta y cualquier extensión consistente suya que sea efectivamente axiomatizable es también incompleta. En consecuencia la teoría completa de* $(\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$ *no es efectivamente axiomatizable y es indecidible.*

También son indecidibles las teorías de $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$ y de $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$. Sin embargo sí son decidibles las teorías del cuerpo complejo $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ y del cuerpo real $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$. Estos dos últimos casos de decidibilidad se deben a TARSKI.

La teoría de $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ se axiomatiza mediante la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero. La *teoría de cuerpos* se formula en el lenguaje de anillos: $+, -, \cdot, 0, 1$. Sus axiomas son los obvios, simplemente definen un cuerpo. La *teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados* ACF se obtiene añadiendo a la teoría de cuerpos para cada $n \geq 1$ el axioma

$$\forall x_0 \ldots x_{n-1} \exists y \; y^n + \sum_{i=0}^{n-1} x_i y^i = 0$$

que garantiza que todo polinomio no constante tiene una raíz. La *teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica prima* p, ACF_p, se obtiene añadiendo a ACF el axioma

$$\varphi_p = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p \text{ veces}} = 0.$$

Por último, la *teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero*, ACF_0, se obtiene añadiendo a ACF los axiomas $\neg\varphi_p$ para cada primo p.

Teorema 5.2 (TARSKI)**.** *Tanto* ACF_0 *como* ACF_p *son teorías completas. Por tanto* ACF_0 *es la teoría del cuerpo complejo* $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ *y es decidible y para cada primo* p, ACF_p *es la teoría del cuerpo* $(\widetilde{\mathbb{F}_p}, +, -, \cdot, 0, 1)$ *y es decidible.*

Si estamos interesados en el cuerpo real $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ necesitamos la *teoría de los cuerpos real cerrados* RCF. Se obtiene añadiendo a la teoría de cuerpos los axiomas que expresan que -1 no es suma de cuadrados, que existen raíces cuadradas y que todo polinomio de grado impar tiene una raíz. Son por tanto los siguientes axiomas:

- $\forall x_1 \ldots x_n \, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq -1$ para cada $n \geq 1$.
- $\forall x \exists y (y^2 = x \vee y^2 = -x)$
- $\forall x_0 \ldots x_{2n} \exists y \; y^{2n+1} + \sum_{i=0}^{2n} x_i y^i = 0$ para cada $n \geq 0$.

Teorema 5.3 (TARSKI)**.** *La teoría de los cuerpos real cerrados* RCF *es completa. Por tanto, es la teoría del cuerpo real* $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ *y es decidible.*

Si queremos introducir adicionalmente el orden en el cuerpo real basta con añadir el axioma

$$\forall xy (x < y \leftrightarrow \exists z (z \neq 0 \wedge x + z^2 = y))$$

La teoría RCF complementada con este nuevo axioma es la teoría del cuerpo ordenado real $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$. También es, por tanto, completa y decidible.

6. Compacidad, Löwenheim-Skolem y $\aleph_1$-categoricidad

Los dos resultados más básicos de la teoría de modelos son los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem. Se exponen en el inicio de todos lo manuales y son resultados que se utilizan constantemente. Tienen numerosas aplicaciones, a menudo sorprendentes. En ambos casos lo que subyace es la incapacidad de los lenguajes de primer orden para expresar la infinitud. Esta incapacidad se convierte, sin embargo, en una virtud a la vista del uso que de ello se hace en teoría de modelos.

Teorema 6.1 (Compacidad). *Un conjunto de enunciados tiene un modelo si todos sus subconjuntos finitos lo tienen.*

El nombre del teorema proviene de un determinado espacio topológico asociado de modo canónico a la lógica de primer orden. La compacidad de ese espacio es precisamente equivalente a nuestro teorema.

Una sencilla aplicación del teorema de compacidad permite demostrar que cualquier enunciado que sea verdadero en cuerpos algebraicamente cerrados de característica p para infinitos primos p, es verdadero en un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y por tanto en el cuerpo complejo. Otra aplicación justifica que existen cuerpos no arquimedianos elementalmente equivalentes al cuerpo ordenado real.

El *análisis no estándar* surge precisamente del uso del teorema de compacidad en conexión con el cuerpo real. Los infinitesimales existen en ciertos modelos de la teoría de los cuerpos real cerrados y en particular en extensiones elementales del cuerpo real. Esto fue explotado por A. Robinson para justificar lógicamente el análisis matemático presentado en términos de infinitesimales. éste fue uno de los primeros impactos de la teoría de modelos en el seno de la matemática clásica.

Usando el teorema de compacidad es fácil justificar que si una clase de estructuras es elemental y su complemento también lo es, la clase en cuestión es finitamente axiomatizable. También, que si una teoría tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, tiene necesariamente modelos infinitos. Por ejemplo así surgen los cuerpos pseudofinitos, los cuerpos que satisfacen todos los enunciados verdaderos en todos los cuerpos finitos.

Teorema 6.2 (Löwenheim-Skolem). *Si una teoría T tiene modelos infinitos, entonces T tiene al menos un modelo en cada cardinal infinito mayor o igual que la cardinalidad $|T|$ de su lenguaje.*

Este resultado indica que la lógica de primer orden no puede distinguir entre los diversos cardinales infinitos a efectos de caracterizar un modelo o una clase de modelos. La tarea de clasificar $Mod(T)$ debe relativizarse entonces a cada cardinal infinito κ. A lo único que se puede aspirar es a clasificar

$$\{M \in Mod(T) : |M| = \kappa\}.$$

Decimos que T es *κ-categórica* si en esa clase hay salvo isomorfía una única estructura.

$\aleph_0$ es el primer cardinal infinito. Se designa también con ω. Es el cardinal correspondiente a los números naturales, a los números enteros y a los números racionales. El siguiente cardinal infinito es $\aleph_1$, el primer cardinal no numerable.

Ejemplos de teorías $\aleph_1$-categóricas:

- Cuerpos algebraicamente cerrados en una característica fijada. No son teorías $\aleph_0$-categóricas.
- Espacios vectoriales sobre un cuerpo numerable. Si el cuerpo es finito hay que añadir que el espacio debe ser de dimensión infinita. En este último caso la teoría es $\aleph_0$-categórica pero si el cuerpo es infinito no lo es.
- $Th(\mathbb{N}, S, 0)$ y $Th(\mathbb{Z}, S, 0)$. No son $\aleph_0$-categóricas.
- La teoría de los grupos abelianos todos cuyos elementos tienen orden p (p un primo fijado). Es $\aleph_0$-categórica.

Existen también teorías $\aleph_0$-categóricas que no son $\aleph_1$-categóricas —un ejemplo es $Th(\mathbb{Q}, <)$— y teorías que ni son $\aleph_0$-categóricas ni son $\aleph_1$-categóricas, por ejemplo la teoría RCF de los cuerpos real cerrados. Pero en lo que respecta a categoricidad no hay más opciones: no hay teorías de lenguaje numerable que sean categóricas en algún cardinal no numerable y dejen de serlo en otros.

Teorema 6.3 (MORLEY). *Si una teoría T de lenguaje numerable es κ-categórica para algún cardinal $\kappa \geq \aleph_1$, entonces T es κ-categórica para cada cardinal $\kappa \geq \aleph_1$.*

Para demostrar este teorema M. MORLEY en [13] introdujo nuevos conceptos y nuevas técnicas cuya generalización posterior por S. SHELAH condujo a la *teoría de la estabilidad*. Se considera con sobrada razón que el teorema de MORLEY (1965) es un segundo nacimiento para la teoría de modelos.

Se ha mencionado que la teoría de los espacios vectoriales sobre un cuerpo fijado proporciona un ejemplo de teoría $\aleph_1$-categórica. Dada la importancia de este ejemplo, conviene ser un poco preciso respecto a su formulación.

Fijemos un cuerpo K. El lenguaje que elegimos para la *teoría de los K-espacios vectoriales* consta de los símbolos $+, 0$ para el grupo aditivo de los vectores y un símbolo de función monádico λ_a para cada $a \in K$. Los elementos del cuerpo aparecen sólo de esta manera, no podemos cuantificar sobre ellos, sólo se cuantifica sobre vectores. Escribimos ax en vez de $\lambda_a(x)$. Los axiomas de la teoría son los siguientes:

- axiomas de grupo abeliano para $+, 0$

- $\forall xy\, a(x+y) = ax + ay$ para cada $a \in K$.
- $\forall x\, (a+b)x = ax + bx$ para cada $a, b \in K$
- $\forall x\, a(bx) = (a \cdot b)x$ para cada $a, b \in K$
- $\forall x\, 1x = x$

Si K es infinito, la teoría de K-espacios vectoriales es completa y es κ-categórica para cada cardinal $\kappa > |K|$. Si K es un cuerpo finito hay que añadir axiomas que especifiquen la dimensión del espacio para obtener una teoría completa. En el caso de dimensión infinita, es $\aleph_1$-categórica.

Si en vez de un cuerpo K hacemos la anterior construcción con un anillo unitario R, se obtiene una teoría completa pero no necesariamente $\aleph_1$-categórica. Es la *teoría de los R-módulos.* La teoría de modelos de módulos constituye una aplicación algebraica muy importante de la teoría de modelos. Al lector interesado le remitimos al artículo [24] de M. Ziegler para mayor información.

7. Definibilidad y eliminación de cuantificadores

Es hora ya de prestar atención a la otra versión de la relación de satisfacción, entendida como una relación $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ entre estructuras M, fórmulas $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con variables libres y sucesiones finitas de elementos $a_1, \ldots, a_n$. Esta noción nos permite explicar rigurosamente qué son las relaciones definibles en una estructura. éste es otro de los grande capítulos de la teoría de modelos.

La relación $R \subseteq M^n$ es *definible* en la estructura M con parámetros en el conjunto $A \subseteq M$ —también decimos que R *es A-definible en M*— si hay una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en el lenguaje de primer orden de M ampliado con constantes para los elementos de A —a menudo se denominan *parámetros*— tal que

$$R = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n : M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Se dice que una operación es definible si lo es su grafo y que un elemento a es definible si lo es el conjunto $\{a\}$.

Por ejemplo, el número 0 es definible en $(\mathbb{N}, S)$ pero no lo es en $(\mathbb{Z}, S)$. La relación de orden entero $<$ no es definible en $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ pero el orden real $<$ es definible en $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Un ejemplo no tan elemental es el de la definibilidad de la suma $+$ de números naturales en $(\mathbb{N}, \cdot, S)$. Mucho más difícil todavía es verificar que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es definible en el cuerpo racional $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$. Lo demostró J. Robinson y de ese modo pudo transferir los resultados de indecidibilidad de la aritmética a $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$. Sin embargo $\mathbb{N}$ no es definible en $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

El teorema de Lagrange nos permite definir $\mathbb{N}$ en $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$. Sin embargo, $\mathbb{N}$ no es definible en $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$. Un resultado interesante y no enteramente trivial es que $\mathbb{Z}$ es definible en el cuerpo exponencial complejo

$(\mathbb{C}, +, \cdot, e^x, 0, 1)$. Ello permite mostrar la indecidibilidad de la teoría de este cuerpo exponencial.

La noción de relación definible ha sido introducida en términos lógicos, con auxilio de la relación de satisfacción. Es conveniente tener presente que, sin embargo, admite caracterizaciones puramente matemáticas, como la que indicamos a continuación.

Observación 7.1. Sea $M = (M, R_1, R_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots)$ una estructura y $A \subseteq M$. Para cada n, sea $\mathcal{D}_n$ la colección de subconjuntos de M^n caracterizada por las siguientes reglas:

(1) $R_i \in \mathcal{D}_n$ si R_i es n-ádica y $f_i \in \mathcal{D}_{n+1}$ si f_i es n-ádica.
(2) $\{a_i\} \in \mathcal{D}_1$ y $\{a\} \in \mathcal{D}_1$ si $a \in A$.
(3) $\{(a_1, \ldots, a_n) : a_i = a_j\} \in \mathcal{D}_n$ para $1 \leq i, j \leq n$.
(4) $\mathcal{D}_n$ está cerrado bajo intersecciones y bajo complementos respecto a M^n.
(5) Para cada $R \in \mathcal{D}_n$ y $S \in \mathcal{D}_m$, $R \times S \in \mathcal{D}_{n+m}$.
(6) Para cada $R \in \mathcal{D}_{n+1}$, $\pi(R) \in \mathcal{D}_n$, siendo

$$\pi : M^{n+1} \to M^n$$

la proyección $\pi(a_1, \ldots, a_{n+1}) = (a_1, \ldots, a_n)$

Entonces cada $\mathcal{D}_n$ es precisamente la colección de todas las relaciones n-ádicas A-definibles en M.

Uno de los cometidos principales de la teoría de modelos es explicar cuáles son las relaciones definibles en una estructura dada. En principio es una tarea ardua. Pero hay circunstancias que facilitan la labor, particularmente la eliminación de cuantificadores.

Una teoría T admite *eliminación de cuantificadores* si en ella toda fórmula es lógicamente equivalente a otra sin cuantificadores. Las relaciones definibles en una estructura cuya teoría tenga eliminación de cuantificadores son definibles mediante combinaciones booleanas de fórmulas atómicas. En la medida en que el conjunto de fórmulas atómicas sea sencillo, también lo será el conjunto de las relaciones definibles. Ello también es relevante a efectos de decidibilidad. Si el procedimiento de eliminación de cuantificadores es efectivo y las enunciados atómicos son decidibles, también es entonces decidible la teoría en cuestión. No es por tanto de extrañar que, desde sus inicios, la teoría de modelos haya dedicado grandes esfuerzos a investigar la eliminación de cuantificadores tanto en abstracto como en los numerosos casos particulares en que es posible llevarla a cabo.

Ejemplos de teorías que admiten eliminación de cuantificadores son la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados y también sus extensiones completas ACF_0 y ACF_p para cada primo p, la teoría $Th(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ del cuerpo ordenado real, la teoría $Th(\mathbb{N}, 0, S)$ del sucesor en los números naturales, la teoría de un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y la teoría $Th(\mathbb{Q}, <)$ del orden denso sin extremos.

En ocasiones no somos capaces de obtener eliminación de cuantificadores para la teoría en la que estamos interesados pero podemos demostrar la modelo completud. Una teoría T es *modelo completa* si entre modelos de T, toda extensión es elemental, es decir, $M \subseteq N$ implica $M \preceq N$. Es una noción introducida por A. Robinson.

Observación 7.2. T es modelo completa si y sólo si en T toda fórmula es equivalente a otra con un prefijo de cuantificadores existenciales seguidos de una fórmula sin cuantificación.

Naturalmente, toda teoría que admite eliminación de cuantificadores es modelo completa. Pero hay muchos ejemplos naturales de teorías modelo completas sin eliminación de cuantificadores. Por ejemplo, la teoría RCF de los cuerpos real cerrados.

La estructura de las relaciones definibles en un modelo de una teoría tiene a menudo sorprendentes consecuencias respecto a las propiedades de la teoría misma. La modelo completud es un claro ejemplo: si una teoría es modelo completa, entonces puede axiomatizarse mediante un conjunto de sentencias de la forma lógica $\forall\exists$.

8. Espacios de tipos y ω-categoricidad

El análisis lógico de las relaciones de una estructura va más allá del ámbito de las relaciones definibles. El siguiente nivel de complejidad lo forman las intersecciones de relaciones definibles, esto es, las relaciones *tipo definibles*. Un *tipo* es simplemente un conjunto consistente de fórmulas. La consistencia es relativa a la teoría marco en la que se está instalado. Si $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ es un tipo con parámetros en $A \subseteq M$, Σ define en M la relación

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n : M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ para cada } \varphi \in \Sigma\}.$$

El n-tipo es completo si para cada fórmula $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parámetros en A, contiene a φ o contiene a $\neg\varphi$. $S_n(A)$ es el conjunto de todos los n-tipos completos sobre A.

Los conjuntos $[\varphi] = \{p \in S_n(A) : \varphi \in p\}$ asociados a las fórmulas $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parámetros en A forman una base para una topología en $S_n(A)$. Se trata de una base de abierto cerrados. El espacio $S_n(A)$ es un espacio Hausdorff, compacto y totalmente disconexo.

Los espacios $S_n(A)$ dan origen a una muy fecunda interacción entre lógica y topología. El lector familiarizado con las álgebras de Boole sabrá reconocerlos como los espacios de Stone de las álgebras de Boole de las fórmulas, previa identificación de fórmulas equivalentes. Un primer ejemplo paradigmático de esta interacción lo brinda el siguiente resultado, que proporciona una caracterización muy útil de la ω-categoricidad.

Teorema 8.1 (RYLL-NARDZEWSKI). *Cada una de las siguientes condiciones es equivalente a que la teoría T sea ω-categórica:*

(1) *Para cada n, en T no hay más que un número finito de fórmulas $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ no equivalentes entre sí.*
(2) *Para cada conjunto finito A, el espacio $S_1(A)$ es finito.*
(3) *Para cada n, el espacio $S_n(\emptyset)$ es finito.*

Las teorías ω-categóricas tienen una peculiar teoría de modelos. Es frecuente que ciertos problemas tengan una solución sencilla en ellas y que ciertos problemas difíciles sólo estén planteados para ellas. Ya hemos mencionado diversos ejemplos de teorías ω-categóricas como la teoría del orden denso sin extremos y la teoría de los espacios vectoriales de dimensión infinita sobre un cuerpo finito. Otros ejemplos bien conocidos son la teoría de las álgebras de Boole sin átomos y la teoría del grafo aleatorio.

9. **Conjuntos fuertemente minimales**

Sea X un subconjunto de la estructura M. Se dice que X es *minimal* si todos los subconjuntos de X que son definibles con parámetros en M son o bien finitos o bien cofinitos. Una fórmula $\varphi(x)$ es *fuertemente minimal* en M si el conjunto que define en M y en cualquier extensión elemental de M es minimal. Un conjunto es fuertemente minimal si se define mediante una fórmula fuertemente minimal y una estructura es fuertemente minimal si en ella la fórmula $x = x$ es fuertemente minimal.

Las estructuras fuertemente minimales de lenguaje numerable tienen una teoría $\aleph_1$-categórica. Pero no son únicamente un ejemplo de $\aleph_1$-categoricidad, en un cierto sentido toda modelo de una teoría $\aleph_1$-categórica se construye a partir de un conjunto fuertemente minimal. Si T es $\aleph_1$-categórica y $M \models T$, M es *primo* sobre un conjunto definido por una fórmula fuertemente minimal con parámetros en M. Además los parámetros de la fórmula tienen un tipo aislado sobre el conjunto vacío, es decir, un tipo axiomatizado por una sola fórmula. Que un modelo M sea primo sobre un subconjunto $A \subseteq M$ significa que toda aplicación de A en otro modelo $N \equiv M$ que preserve las satisfacción de las fórmulas puede extenderse a una *inmersión elemental* de M en N, es decir, a un isomorfismo entre M y una subestructura elemental de N.

Todos los ejemplos de teorías $\aleph_1$-categóricas que hemos citado son, de hecho, ejemplos de teorías fuertemente minimales.

La importancia de los conjuntos fuertemente minimales no radica en la pobreza de la colección de sus subconjuntos definibles, sino en que en ellos tenemos a nuestra disposición una noción natural de dimensión. Estamos en este caso ante una interacción de la teoría de modelos con la geometría combinatoria.

Una *pregeometría* es un conjunto X con una operación cl que asigna a cada subconjunto de X otro subconjunto de X y cumple las siguientes condiciones:

- $A \subseteq cl(A)$.
- Si $A \subseteq B$, entonces $cl(A) \subseteq cl(B)$.
- $cl(cl(A)) \subseteq cl(A)$.
- Si $a \in cl(A)$, existe $A_0 \subseteq A$ finito tal que $a \in cl(A_0)$.
- Si $a, b \in X$ y $a \in cl(A \cup \{b\}) \smallsetminus cl(A)$, entonces $b \in cl(A \cup \{a\})$.

Supongamos que (X, cl) es una pregeometría. Decimos que $a \in X$ es *independiente* de $A \subseteq X$ si $a \notin cl(A)$. Decimos que $A \subseteq X$ es *independiente* si para cada $a \in A$, a es independiente de $A \smallsetminus \{a\}$. Una *base* de $A \subseteq X$ es un subconjunto independiente maximal de A. En una pregeometría todas las bases de A tienen el mismo tamaño, que se llama *dimensión* de A.

Describimos a continuación cómo se obtienen pregeometrías en conjuntos fuertemente minimales. Sea X un conjunto definido mediante una fórmula $\varphi(x)$ fuertemente minimal en una estructura M. Para simplificar suponemos que no tiene parámetros. La *clausura algebraica* de un subconjunto A de M es el conjunto $acl(A) \subseteq M$ formado por los objetos $b \in M$ que pertenecen a algún conjunto finito definido mediante una fórmula con parámetros en A.

Observación 9.1. En todo conjunto fuertemente minimal X, la operación $cl(A) = acl(A) \cap X$ define una pregeometría.

Si Y es el conjunto definido por $\varphi(x)$, en otro modelo $N \equiv M$, también se obtiene una pregeometría del mismo modo. Si además M es primo sobre X y N lo es sobre Y, entonces cualquier biyección entre bases de X y de Y se extiende a un isomorfismo entre M y N.

Esta situación fue explotada por J. T. BALDWIN y A. H. LACHLAN, quienes en [2] continuaron los trabajos previos de MORLEY y dieron cuenta de la estructura básica de todos los modelos de una teoría $\aleph_1$-categórica.

Teorema 9.1 (BALDWIN-LACHLAN)**.** *Sea T una teoría $\aleph_1$-categórica de lenguaje numerable. O bien T es ω-categórica o bien T tiene exactamente $\aleph_0$ modelos numerables no isomorfos. Cada uno de ellos queda determinado por la dimensión de una fórmula fuertemente minimal. Estos modelos numerables pueden representarse en la forma*

$$M_0 \preceq M_1 \preceq \ldots \preceq M_n \preceq M_{n+1} \preceq \ldots \preceq M_\omega$$

y M_ω es el único de dimensión infinita.

Más recientemente se ha visto que el estudio de las pregeometrías y su clasificación, tanto en el contexto de los conjuntos fuertemente minimales como en generalizaciones de éste, es un instrumento esencial para la teoría de modelos. B. ZILBER fue pionero en este descubrimiento.

Se dice que una pregeometría es *modular* si para cualesquiera subconjuntos $A = cl(A)$ y $B = cl(B)$ de dimensión finita,

$$\dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

Una pregeometría es *localmente modular* si hay algún punto $a \in X$ para el que la pregeometría definida por $cl_a(A) = cl(A \cup \{a\})$ es modular. Una preometría es *trivial* si para cada A no vacío, $cl(A) = \bigcup_{a \in A} cl(\{a\})$. Las pregeometrías triviales son modulares y las modulares son localmente modulares.

La pregeometría de un puro conjunto infinito y también la de $(\mathbb{N}, 0, S)$ son ejemplos de pregeometrías triviales. La de un espacio vectorial es siempre modular. La pregeometría de un espacio afín es localmente modular pero no modular. La pregeometría de un cuerpo algebraicamente cerrado no es localmente modular. B. ZILBER conjeturó que estos ejemplos son esencialmente los únicos posibles, de manera que básicamente todo conjunto fuertemente minimal es o bien como un conjunto infinito, o como un espacio vectorial o como un cuerpo algebraicamente cerrado.

Conjetura 9.2 (ZILBER). *Si la pregeometría de un conjunto fuertemente minimal no es localmente modular, entonces se puede interpretar un cuerpo infinito en la teoría.*

Esta conjetura ha resultado ser falsa. En [8] E. HRUSHOVSKI obtuvo una refutación a la conjetura de ZILBER. Construyó una estructura fuertemente minimal mediante un método de amalgamación de estructuras finitas. La estructura no es localmente modular ni puede interpretar un cuerpo infinito. El método de HRUSHOVSKI se ha utilizado en contextos diversos para construir complicadas estructuras y es un campo muy activo de trabajo en la actualidad.

10. **Estabilidad y teorías simples**

Un ingrediente fundamental en la demostración del teorema de MORLEY es el análisis topológico de los espacios de tipos $S_n(A)$ mediante la derivada de Cantor-Bendixson. Fijamos una teoría completa T de lenguaje numerable y consideramos subconjuntos de un modelo de T suficientemente grande y rico en elementos (el modelo monstruo de T). Se dice que T es *totalmente trascendente* si para cada conjunto A y cada n, todo punto del espacio topológico $S_n(A)$ tiene rango de Cantor-Bendixson, es decir, el espacio es disperso. Se dice que T es *ω-estable* si para cada conjunto numerable A, $S_1(A)$ es numerable. En el caso de teorías de lenguaje numerable la noción de teoría totalmente trascendente coincide con la de ω-estabilidad, por tanto las identificaremos en la discusión subsiguiente. M. MORLEY introdujo estos tipos de teorías para poder estudiar en un contexto más amplio y cómodo las teorías $\aleph_1$-categóricas. Ellas son un ejemplo prototípico de teorías ω-estables.

Las teorías ω-estables también pueden caracterizarse en términos del *rango de Morley*, que es un rango que mide la complejidad de los conjuntos y relaciones definibles.

El rango de Morley $RM(D)$ de una relación definible D es un ordinal (o bien es ∞) y queda definido por las siguientes reglas:

(1) $RM(D) \geq 0$ si y sólo si $D \neq \emptyset$.
(2) $RM(D) \geq \alpha$ si y sólo si $RM(D) \geq \beta$ para cada $\beta < \alpha$, si α es un ordinal límite.
(3) $RM(D) \geq \alpha + 1$ si y sólo si hay una familia $(D_i : i < \omega)$ de relaciones definibles $D_i \subseteq D$ disjuntas dos a dos y tales que $RM(D_i) \geq \alpha$ para cada $i < \omega$.

Resulta entonces que T es ω-estable si y sólo si $RM(x = x) < \infty$. Ello implica que el rango de Morley de cualquier relación definible es un ordinal. En el caso particular de las teorías $\aleph_1$-categóricas J. T. Baldwin demostró que el rango es incluso finito, es decir, es un número natural. A. Macintyre desveló una profunda interrelación entre la hipótesis modelo teorética de ω-estabilidad y la noción de clausura algebraica en teoría de cuerpos.

Teorema 10.1 (Macintyre)**.** *Si* $(K, +, -, \cdot, 0, 1, \ldots)$ *es un cuerpo infinito (quizás con estructura adicional) cuya teoría es* ω*-estable, entonces* $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$ *es un cuerpo algebraicamente cerrado.*

Hay una teoría de cuerpos ω-estable pero no $\aleph_1$-categórica de gran importancia: la *teoría de los cuerpos diferencialmente cerrados*. Es indudable que en este campo la teoría de modelos ha sido de gran ayuda para la pura teoría algebraica, en particular al garantizar la existencia de modelos primos sobre cualquier conjunto de parámetros.

Otro ámbito donde el rango de Morley ha sido especialmente fructífero es en la teoría de grupos. Un *grupo de rango de Morley finito* es una estructura que cuenta con una operación de grupo y posiblemente adicionales relaciones y operaciones y cuya teoría tiene rango de Morley finito. G. Cherlin conjeturó que tales grupos debían ser algebraicos.

Conjetura 10.2 (Cherlin)**.** *Si* $(G, \circ, e, \ldots)$ *es un grupo de rango de Morley finito, entonces* $(G, \circ, e)$ *es isomorfo a un grupo algebraico sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.*

La conjetura de Cherlin sigue abierta a pesar del extenso volumen de trabajo que los especialistas han dedicado a intentar demostrarla.

La noción de teoría ω-estable fue generalizada de manera decisiva por S. Shelah y esa generalización condujo a la creación de la teoría de la estabilidad. En vez de considerar todas las fórmulas posibles con parámetros en A, fijamos primero $\varphi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ (sin parámetros) y consideramos únicamente las fórmulas de la forma $\varphi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ y $\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$.

Se llaman *φ-fórmulas* con parámetros en A. Un *φ-tipo sobre A* es un conjunto consistente de φ-fórmulas con parámetros en A. $S_\varphi(A)$ es el conjunto de todos los φ-tipos sobre A que son completos respecto a φ-fórmulas. $S_\varphi(A)$ es de modo natural un espacio topológico de Hausdorff, compacto y totalmente disconexo.

Decimos que la teoría T es λ-estable si y sólo para cada A y cada $n < \omega$, si $|A| \leq \lambda$, entonces $|S_n(A)| \leq \lambda$. Y es *estable* si es λ-estable para algún cardinal infinito λ. Una definición equivalente de estabilidad consiste en exigir que para cada A, $S_\varphi(A)$ sea un espacio disperso, es decir, el rango de Cantor-Bendixson de cada φ-tipo completo $p \in S_\varphi(A)$ sea un ordinal.

En los modelos M de las teorías estables no es posible definir ningún orden parcial no trivial de M^n. En particular, $Th(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ no es estable. Las teorías ω-estables son estables. En particular, $Th(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ es estable. Todas las teorías de módulos son estables. Existen teorías de cuerpos —los cuerpos separablemente cerrados son un ejemplo— que son estables pero no ω-estables.

S. SHELAH ingenió instrumentos muy poderosos para trabajar con las teorías estables. Su propósito era desarrollar una teoría de la clasificación que permitiera distinguir entre teorías con y sin invariantes para determinar los tipos de isomorfía de sus modelos. Su obra magna es [18]. En ella generaliza el teorema de MORLEY a teorías cuyo lenguaje tenga una cardinalidad arbitraria y llega a demostrar que existe una línea divisoria—enunciada en términos de propiedades estructurales de los modelos— entre las teorías clasificables y las que no lo son.

En las teorías estables se dispone de una noción de independencia. SHELAH la introdujo a partir de la teoría de la bifurcación (*forking* en inglés). Coincide con la independencia lineal en espacios vectoriales y con la independencia algebraica en cuerpos algebraicamente cerrados. Generaliza también a la noción de independencia que de modo natural proporciona el rango de Morley en las teorías ω-estables.

Para ampliar conocimientos sobre teoría de la estabilidad recomendamos el libro [14] de A. PILLAY y las notas todavía por publicar [21] de M. ZIEGLER.

Más recientemente B. KIM y A. PILLAY han descubierto que hay un contexto más amplio que el de las teorías estables donde la mayor parte de las construcciones realizadas en estabilidad y que dependen de argumentos de independencia pueden también llevarse a cabo. Se trata de las *teorías simples*, un campo muy activo de trabajo en la actualidad.

Ninguna estructura ordenada tiene una teoría simple. Los cuerpos pseudofinitos, los cuerpos con un automorfismo genérico ($ACFA$) y los espacios vectoriales con una forma bilineal alternada no degenerada son ejemplos de teorías simples no estables.

A un nivel más elemental, el grafo aleatorio es una estructura simple no estable. Al lector interesado en estos temas le recomendamos la lectura del artículo [9] de B. Kim y A. Pillay y la lectura del texto [20] de F. O. Wagner.

11. O-Minimalidad

Los métodos de la estabilidad han comenzado a extenderse al terreno de las estructuras ordenadas. Se ha buscado un análogo de la noción de conjunto fuertemente minimal que tenga sentido en un contexto ordenado y se ha encontrado. L. van den Dries, A. Pillay, C. Steinhorn y J. Knight son los que iniciaron el estudio de la *o-minimalidad*.

Una estructura ordenada es *o-minimal* si en ella los únicos conjuntos definibles con parámetros son uniones finitas de intervalos (incluyendo semirectas) y puntos. Si una estructura es o-minimal, todas las elementalmente equivalentes a ella también lo son y se dice que su teoría completa es o-minimal. Un ejemplo de teoría o-minimal es $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ mientras que $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ es un ejemplo que no lo es.

En una estructura o-minimal se obtiene una pregeometría del mismo modo que en el caso de los conjuntos fuertemente minimales, usando la clausura algebraica. De hecho en el contexto o-minimal la clausura algebraica $acl(A)$ coincide con la clausura definible $dcl(A)$, que es el conjunto de elementos que son definibles mediante una fórmula con parámetros en A. En una estructura o-minimal existe una descripción muy razonable de las relaciones definibles n-ádicas, expresadas como uniones finitas de ciertas relaciones básicas llamadas *células*.

La o-minimalidad ha cobrado una vital importancia en los últimos años en relación con el cuerpo exponencial real $(\mathbb{R}, +, \cdot, e^x, -, <, 0, 1)$. Tras mostrar la decidibilidad de la teoría del cuerpo real, A. Tarski planteó la pregunta de si también es decidible la teoría del cuerpo exponencial real. Recientemente ha habido mucho progreso en esa dirección. Sea T_{exp} su teoría completa.

L. Van den Dries demostró que T_{exp} no admite eliminación de cuantificadores. A. Wilkie demostró que T_{exp} es modelo completa y o–minimal. A. Macintyre y A. Wilkie han demostrado que si la conjetura de Schanuel es cierta, entonces T_{exp} es decidible.

Conjetura 11.1 (Schanuel)**.** *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$ tiene grado de trascendencia al menos n sobre $\mathbb{Q}$.*

Para más información sobre o-minimalidad y el cuerpo exponencial real remitimos al artículo [11] de D. Marker y al texto [19] de L. van den Dries

Agradecimientos: La visita a Bogotá que originó este trabajo estuvo financiada por Icetex y por la Universidad de los Andes. Quisiera manifestar mi agradecimiento a la generosa hospitalidad y amable y estimulante colaboración científica que en numerosas ocasiones me han brindado el grupo de lógicos de las universidades de los Andes y Nacional, en particular los profesores X. CAICEDO, L. J. CORREDOR, A. BERENSTEIN, C. MONTENEGRO, A. ONSHUUS y A. VILLAVECES.

Bibliografía

[1] C. BADESA, *The Birth of Model Theory*, Princeton U.P. 2004.
[2] J.T. BALDWIN & A. H. LACHLAN, *On strongly minimal sets*, The Journal of Symbolic Logic, **36** (1971),79–96.
[3] E. BOUSCAREN (ED), *Model Theory and Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, **1696** Springer 1998.
[4] A. B. FEFERMAN & S. FEFERMAN, *Alfred Tarski, Life and Logic*, Cambridge U.P. 2004.
[5] C. C. CHANG & H.J. KEISLER, *Model Theory*, North Holland P.C., Amsterdam, 1973.
[6] W. HODGES, *Model Theory*, Cambridge U.P., Cambridge, 1993.
[7] W. HODGES, *A Shorter Model Theory*, Cambridge U.P., Cambridge, 1997.
[8] E. HRUSHOVSKI, *A new strongly minimal set*, Annals of Pure and Applied Logic, **62** (1993), 147–166.
[9] B.KIM & A. PILLAY, *From stability to simplicity*, The Bulletin of Symbolic Logic, **4** (1998), 17–36.
[10] D. LASCAR, *Perspective historique sur les rapports entre la théorie des modèles et l'algebrè*, Revue d'Histoire des Mathématiques, **4** (1998), 237–260.
[11] D. MARKER, *Model theory and exponentiation*, Notices of the American Mathematical Society **43** (1996),753–759.
[12] D. MARKER, *Model Theory: an Introduction*, Springer, New York, 2002.
[13] M. MORLEY, *Categoricity in power*, Transactions of the American Mathematical Society, **114** (1965), 514–538.
[14] A. PILLAY, *Geometric Stability Theory*, Oxford University Press, 1996.
[15] A. PILLAY, *Model Theory*, Notices of the AMS, **47** (2000), 1373-1381.
[16] B. POIZAT, *Cours de Théorie des Modèles*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 82, rue Racine 69100 Villeurbanne, France, 1985. Diffusé par OFFILIB.
[17] G. E. SACKS, *Saturated Model Theory*, W. A. Benjamin, Inc., Reading, MA, 1972.
[18] S. SHELAH, *Classification Theory*, North Holland P.C., Amsterdam, 1978.
[19] L. VAN DEN DRIES, *Tame Topology and O-minimal Structures*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge U.P., Cambridge, 1998.
[20] F. O. WAGNER, *Simple Theories*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
[21] M. ZIEGLER, *Stabilitätstheorie*, Freiburger Vorlesung gehalten im Wintersemester 1988/1989, Oktober 1991.
[22] M. ZIEGLER, *Modelltheorie I*, Freiburger Vorlesung gehalten im Wintersemester 1997/98, Januar 1997.
[23] M. ZIEGLER, *Modelltheorie II*, Freiburger Vorlesung gehalten im Sommersemester 1996, Juli 1996.
[24] M. ZIEGLER, *Decidable modules*, in B. T. Hart, A. H. Lachlan, & M. A. Valeriote, editors, *Algebraic Model Theory*, NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 1997, 255–274.

(Recibido en mayo de 2006. Aceptado para publicación en julio de 2006)

Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Barcelona
Barcelona, España
e-mail: e.casanovas@ub.edu