Sociedad Colombiana de Matemáticas
XV Congreso Nacional de Matemáticas
2005 **Apuntes**

Lecturas Matemáticas
Volumen Especial (2006), páginas 371–383

Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica

Leonor Camargo, Carmen Samper & Patricia Perry
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

Abstract. We present an ample conception of demonstrative activity that includes, besides the proper actions of justification in Mathematics, heuristic actions such as visualisation and exploration that lead towards the formulation of conjectures and the verification of these. With this perspective and through examples, we show how dynamic geometry provides a context rich in expressive possibilities that supports demonstrative activity since it provides students with powerful tools that enable the practice of validation.

Key words and phrases. Dynamic geometry, Demonstrative activity, Conjectures, Proofs.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 97C50, 97D40.

Resumen. En este artículo se presenta una concepción amplia de la actividad demostrativa que incluye, además de las acciones propias de la justificación en matemáticas, acciones heurísticas tales como la visualización y la exploración, encaminadas a la producción de conjeturas y la verificación de las mismas. Bajo esta perspectiva y a partir de algunos ejemplos, se muestra cómo un programa de geometría dinámica provee un contexto rico en posibilidades de expresión que apoya la actividad demostrativa de los estudiantes al proporcionarles herramientas potentes para que se puedan involucrar en la práctica de la validación.

1. Introducción

En el contexto educativo, la enseñanza de la demostración es tema permanente de debate, como lo demuestran diversas publicaciones realizadas desde la década de los ochenta del siglo pasado o antes. En algunas de ellas, se cuestiona la pertinencia de enseñar a demostrar en el ámbito de la enseñanza obligatoria en la escuela y se alude al rotundo fracaso que ha tenido este objetivo educativo en diversas latitudes. En otras, se defiende la necesidad de enseñar a demostrar, por ser ésta una práctica que distingue a la matemática de otras disciplinas. Quienes afirmamos que la escuela debe acercar a los estudiantes a las actividades propias de la comunidad matemática estamos convencidos de que la demostración debe ocupar un lugar prominente en el currículo de matemáticas. Sin embargo, coincidimos con las críticas sobre la poca efectividad que se ha tenido en su enseñanza. Por ello, el grupo de investigación "Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría" de la Universidad Pedagógica Nacional, ha dirigido sus esfuerzos a buscar alternativas para que la demostración tenga un papel significativo en la enseñanza, se use para promover la comprensión matemática y ayude a los estudiantes a entender los diferentes roles de la demostración en las matemáticas.

En busca de alternativas para una enseñanza más efectiva de la demostración, hemos dirigido nuestra mirada hacia los programas de geometría dinámica, desarrollados al comienzo de los años noventa para apoyar la enseñanza. Reconocemos en estos programas, como lo señalan diversos investigadores [1], [2] y [3], su potencial como instrumentos de mediación para apoyar la participación real de los estudiantes en la actividad demostrativa. Con facilidad y rapidez, en la pantalla de una calculadora o de un computador, los estudiantes pueden hacer construcciones geométricas, realizar mediciones, constatar propiedades, y transformar las construcciones hechas, disponiendo de un gran número de ejemplos tan variados como se quiera. Esto les da la posibilidad de realizar exploraciones con el objetivo de entender la situación propuesta en un problema, formular conjeturas, verificarlas, descubrir propiedades, estudiar la dependencia entre propiedades y disponer de herramientas para desarrollar ideas útiles para hacer las correspondientes demostraciones.

Los programas de geometría dinámica permiten vincular la exploración con la demostración, en el ámbito de la geometría euclidiana. Aportan elementos importantes para ligar el mundo empírico —que se vivencia con las acciones realizadas sobre y con los objetos geométricos que el software permite construir— con el mundo teórico de la geometría euclidiana —que surge cuando los hechos descubiertos de manera empírica se transforman en enunciados que hacen parte de un sistema axiomático. Esto ocurre porque la geometría dinámica provee un modelo de la geometría euclidiana —con algunas diferencias— en el que se mantienen las relaciones geométricas usadas para construir una figura; en consecuencia, la figura construida es realmente representante de una determinada clase y esto permite que las propiedades implicadas por las condiciones esenciales de la figura se evidencien y se favorezca entonces la formulación de conjeturas.

El objetivo del artículo es presentar la concepción amplia de actividad demostrativa que hemos desarrollado en el marco de un proyecto de investigación [4]. Tal concepción, incluye además de las acciones propias de la justificación en matemáticas, acciones heurísticas como la visualización y la exploración, encaminadas hacia la producción de conjeturas y la verificación de las mismas. Bajo esta perspectiva y a partir de algunos ejemplos, se muestra cómo un programa de geometría dinámica e interactiva, provee un contexto rico en posibilidades de expresión que apoya la actividad demostrativa de los estudiantes al proporcionarles herramientas potentes para que se puedan involucrar en la práctica de la validación.

2. La actividad demostrativa en el ámbito de la educación matemática

El grupo de investigación ha propuesto que el constructo *actividad demostrativa* englobe dos procesos, no necesariamente independientes o separados: el conformado por acciones destinadas a producir una conjetura y el conformado por acciones tendientes a producir una justificación. De esta manera, atendemos a dos funciones primordiales de la demostración matemática en el ámbito educativo: de un lado, promover la comprensión del contenido matemático implicado tanto en los enunciados de los teoremas como en sus justificaciones y, de otro lado, apuntar a la validación de dichos enunciados, en el marco de un sistema teórico en construcción.

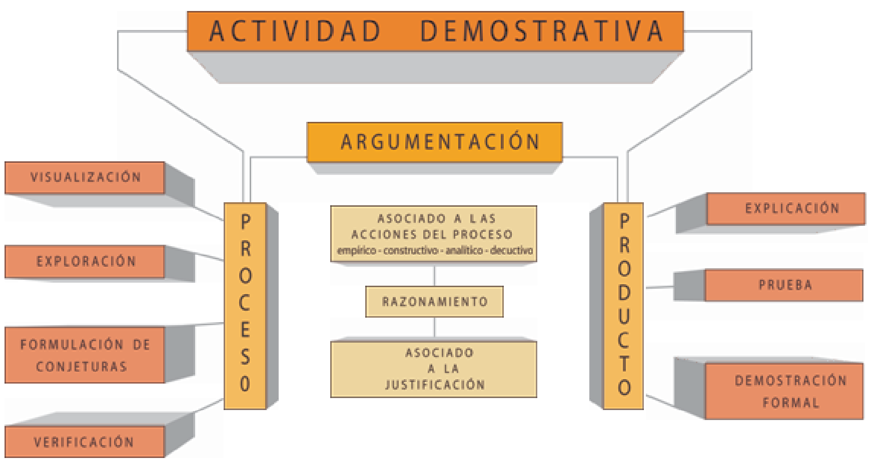

Figura 1. La actividad demostrativa en la educación matemática

Así, la actividad demostrativa se concreta en una serie de acciones de índole heurística como son la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas y la verificación de conjeturas (Figura 1). La *visualización* tiene como propósito detectar, percibir o evocar propiedades geométricas presentes en una representación gráfica; con la *exploración* se busca descubrir propiedades o relaciones entre propiedades; la *formulación de conjeturas* consiste en explicitar en términos matemáticos y de manera general un hecho geométrico que se ha reconocido a través de casos particulares —que usando la geometría dinámica pueden ser un sinnúmero; la *verificación* de conjeturas tiene como propósito poner a prueba el resultado obtenido si sobre él ha recaído alguna suerte de duda. La actividad demostrativa también incluye acciones tendientes a la construcción de un discurso argumentativo, de carácter deductivo, que valida, dentro del sistema axiomático, la conjetura. Reconocemos tres acciones distintas de justificación. La *explicación* es la acción de aludir a una figura para mostrar resultados, de manera empírica, después de una exploración previa de un hecho geométrico. En la *prueba* se proporcionan afirmaciones con sus correspondientes razones para validar los resultados obtenidos, pero es un desarrollo deductivo incompleto porque faltan pasos o se cometen algunos errores de índole nominativo o se hace uso de elementos teóricos que no han sido validados. Por último, está la *demostración formal*; ésta es una justificación elaborada en la cual, a medida que se van deduciendo afirmaciones, se dan las correspondientes razones, ciñéndose al sistema axiomático establecido. El razonamiento está inmerso en todos los momentos de la actividad demostrativa y liga las acciones de ambos procesos (ver [4] para una ampliación de la explicación del diagrama de la Figura 1).

3. **Geometría dinámica y acciones tendientes a producir una conjetura**

A continuación ilustraremos la forma como es posible aprovechar el programa de geometría dinámica para favorecer la producción de conjeturas. Consideremos el siguiente problema:

> El cuadrilátero $ABCD$ es un rombo. E, F, G y H son puntos medios de los lados del rombo. ¿Qué se puede decir del cuadrilátero $EFGH$? Justificar la respuesta.

Hemos dicho que dentro de las acciones de índole heurística tendientes a producir una conjetura está la visualización, cuyo propósito es detectar, percibir o evocar propiedades geométricas en una representación gráfica. Una construcción del rombo en mención, y del cuadrilátero construido a partir de los puntos medios del rombo, nos servirá de representación gráfica sobre la cual visualizar relaciones y propiedades (Figura 2).

La visualización de la figura, desde el punto de vista matemático, requiere como mínimo, identificar y caracterizar unidades figurales de dimensión igual o menor que las de la figura inicial. Se intenta encontrar relaciones geométricas subyacentes que posteriormente posibiliten la identificación de relaciones de causa – efecto entre unas propiedades y otras, sembrando la semilla de la inferencia. En este caso, al examinar la representación gráfica se reconocen los cuadriláteros $ABCD$ y $EFGH$; además es posible percibir cuatro triángulos isósceles y anticipar que el cuadrilátero $EFGH$ podría ser un rectángulo.

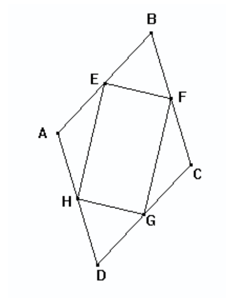

Figura 2. Rombo $ABCD$ y cuadrilátero $EFGH$

En estrecha conexión con la visualización está la exploración, acción de búsqueda de propiedades o relaciones entre las partes constitutivas de la figura. Se trata de hacer una investigación empírica sobre la figura a través de acciones como medir, calcular y hacer construcciones. En el entorno de los programas de geometría dinámica, se dispone de una herramienta particular de exploración: el arrastre. Mediante esta opción, se pueden modificar las imágenes en la pantalla para transformarlas en otras (asociadas a la misma figura geométrica), haciendo que la imagen se convierta en una sucesión casi continua de representaciones. Esto permite estudiar qué propiedades permanecen invariantes y cuáles se modifican. En el caso que nos ocupa, se puede apreciar que el cuadrilátero $EFGH$ conserva la forma de rectángulo, al arrastrar los vértices del rombo para obtener otras representaciones. Incluso se puede ver que, en algún momento, el rombo construido toma la forma de un cuadrado, lo que lleva a reconocer que de haberse partido de la representación gráfica del rombo como cuadrado, al hacer la construcción inicial, la situación se percibiría más restringida de lo que es (Figura 3).

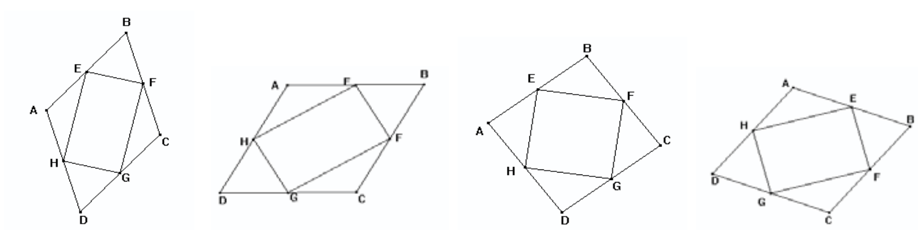

Figura 3. Diferentes representaciones de la situación explorada, obtenidas al usar el arrastre

La exploración mediada por la función de arrastre se puede enriquecer para favorecer la visualización de otras propiedades, si se agregan construcciones auxiliares. Si construimos las diagonales del cuadrilátero $EFGH$ (Figura 4), podemos visualizar más unidades figurales, como los paralelogramos $ABFH$, $EBCG$, $FCDH$ y otros cuadriláteros que también parecen paralelogramos como

$AEOH$ y $FCGO$. La toma de medidas y el arrastre nos permitirán confirmar si lo son o no.

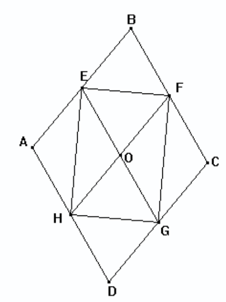

Figura 4. Construcción auxiliar para buscar relaciones geométricas

Pero si en lugar de dibujar las diagonales del cuadrilátero $EFGH$, trazamos las diagonales del cuadrilátero $ABCD$, podremos visualizar otras unidades figurales (Figura 5) como los ΔABC y ΔBDC, que son semejantes con los ΔEBF y ΔFGC, respectivamente.

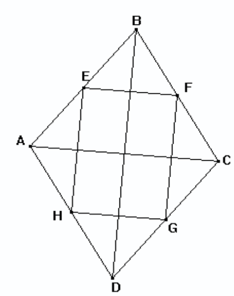

Figura 5. Otra construcción auxiliar

La exploración en busca de propiedades y la visualización de relaciones geométricas lleva a la formulación de una conjetura que ratifica la anticipación hecha: el cuadrilátero $EFGH$ es un rectángulo. De esta manera explicitamos un hecho geométrico, que puede ser verificado, constatando con medidas que efectivamente es rectángulo (Figura 6). Aquí entra en juego la verificación de propiedades geométricas con el propósito de poner a prueba un resultado sobre el que aún no se tiene la certeza absoluta, la cual sólo se consigue mediante la demostración.

La actividad matemática no se termina en el momento en que se formula la conjetura. Es importante resaltar el hecho de que, si bien los estudiantes podrían quedar satisfechos con la verificación, el profesor debe impulsar la construcción de un discurso argumentativo, de carácter deductivo, que valide la conjetura dentro del sistema axiomático que se ha construido.

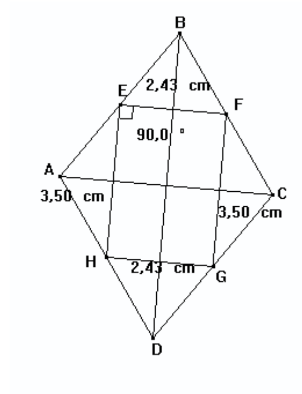

Figura 6. Verificación de la conjetura

El profesor puede explotar la motivación que se logra con el descubrimiento de hechos y la comprensión alcanzada acerca de la conjetura, mediante la exploración, para favorecer la elaboración de respuestas al por qué de los hechos encontrados. Sobre este aspecto nos referiremos en la siguiente sección.

4. **Geometría dinámica y acciones tendientes a producir una demostración**

Construir una demostración formal, según los cánones establecidos por la comunidad de matemáticos, y que sea cercana al mundo de los estudiantes, es una tarea en extremo compleja. Supone la aceptación por parte de los estudiantes de que en la matemática, a diferencia de las ciencias experimentales, se aspira llegar a un grado de certeza que sólo es posible obtener gracias a la construcción de una demostración formal. La constitución de una comunidad de práctica de indagación que impulse a los estudiantes a evolucionar en la producción de sus argumentos, poco a poco, a partir de la comprensión que van logrando al involucrarse en la actividad demostrativa es un camino que quizá podría sortear dificultades que se han tenido en la enseñanza de la demostración.

Los estudiantes podrían ir evolucionando en la construcción de justificaciones. Hemos mencionado ya tres acciones distintas de justificación que ejemplificaremos con el problema del cuadrilátero $EFGH$, cuyos vértices son los puntos medios de los lados del rombo $ABCD$. Interesa justificar por qué es un rectángulo.

Inicialmente, los estudiantes pueden aludir a la figura para mostrar resultados logrados en la exploración, produciendo lo que llamamos una explicación.

Así, por ejemplo, un estudiante de segundo semestre de la Licenciatura en matemáticas, justificó la propiedad tal y como se presenta en el Cuadro 1.

El cuadrilátero $EFGH$ es un paralelogramo porque descubrimos en clase que el cuadrilátero que se obtiene cuando unimos los puntos medios de los lados de un cuadrilátero es un paralelogramo. Como se ve en la figura, el cuadrilátero *EFGH* tiene un ángulo recto. Por lo tanto, el cuadrilátero *EFGH* es un rectángulo. (James)

Cuadro 1. Ejemplo de explicación

Cuando las normas sociomatemáticas que rigen el funcionamiento de la clase impulsan a producir justificaciones en las que se alude sólo a argumentos basados en propiedades geométricas deducidas de otras, tal circunstancia conduce a la producción de pruebas, para validar los resultados obtenidos, en las que las afirmaciones tienen sus correspondientes razones, aunque el desarrollo deductivo no sea completo. En el Cuadro 2 se presenta una justificación (elaborada por una de las integrantes del grupo de investigación), que podría ser aceptada como una prueba. De la prueba a la demostración formal se llega al ir refinando los argumentos y el lenguaje hasta garantizar que se forma una cadena deductiva de afirmaciones que se ciñe al sistema axiomático dentro del que se está trabajando.

Para justificar que $EFGH$ es un rectángulo tenemos que ver que sus lados opuestos son paralelos y que sus ángulos interiores son rectos. Para probar que los lados opuestos son paralelos usamos el hecho de que en el ΔABC, el $\overline{EF}$ es paralelo al $\overline{AC}$, por ser el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo y $\overline{AC}$ el tercer lado del triángulo (Figura 5). Como $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{AC}$ y $\overline{AC}$ es paralelo a $\overline{HG}$, entonces $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{HG}$, y así para los otros dos lados. Para probar que el $\angle FEH$ es recto, usamos el hecho de que las diagonales de un rombo son perpendiculares y que los cuatro cuadriláteros que se forman en el interior del cuadrilátero $EFGH$ son paralelogramos. Esto lleva a considerar que los ángulos opuestos a los ángulos formados por las perpendiculares también son rectos.

Cuadro 2. Ejemplo de prueba

5. **Un ejemplo**

Vamos a ilustrar las acciones de formulación de conjetura y de construcción de una justificación, propias de la actividad demostrativa, a través de un problema propuesto, desde hace dos años, a diferentes grupos de estudiantes de Licenciatura en matemáticas inscritos en el curso Geometría Plana, de segundo semestre. En el momento en que el problema es propuesto, ya se ha culminado el estudio sobre triángulos y cuadriláteros. Generalmente, los estudiantes han usado el programa de geometría dinámica Cabri, instalado en las calculadoras graficadoras, para enfrentarse a la solución de las situaciones problema propuestas; por tanto, se puede afirmar que contaban con experiencia para manejarlo. El problema propuesto fue el siguiente:

> Dado el triángulo ΔABC isósceles, determinar la ubicación del punto P, en la base del triángulo, para el cual la suma de las distancias desde P a los lados congruentes del triángulo sea mínima. Justificar la respuesta.

Los estudiantes comienzan la actividad demostrativa visualizando las relaciones dadas en el enunciado a partir de una figura hecha en el programa de geometría dinámica (Figura 7). Después, se centran en la exploración tomando medidas de los segmentos perpendiculares construidos desde P hasta cada uno de los lados, calculando la suma correspondiente y haciendo el arrastre del punto P sobre la base del triángulo para detectar en qué posición se obtiene el valor mínimo de la suma.

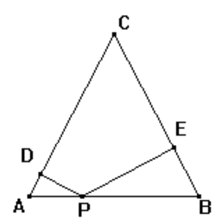

Figura 7. Representación visual del enunciado del problema

El arrastre del punto P les permite, por lo general, llegar muy rápidamente, a la conjetura según la cual, la suma de las distancias de P a los lados del triángulo es constante (Figuras 8a y 8b). Este es un resultado que sorprende e impulsa a los estudiantes a preguntarse por qué esa suma siempre da el mismo resultado.

Una vez establecida la conjetura inicial, otras exploraciones llevan a los estudiantes a precisarla. Por ejemplo, al mover el punto P hasta hacerlo coincidir con A descubren que el $\overline{PE}$ coincide con la altura del triángulo relativa al $\overline{BC}$ (Figura 9). La exploración de "casos límite", como cuando P está en los extremos del segmento o es el punto medio de éste, nos indica que los estudiantes están buscando argumentos con base en situaciones críticas que apoyen la conjetura formulada.

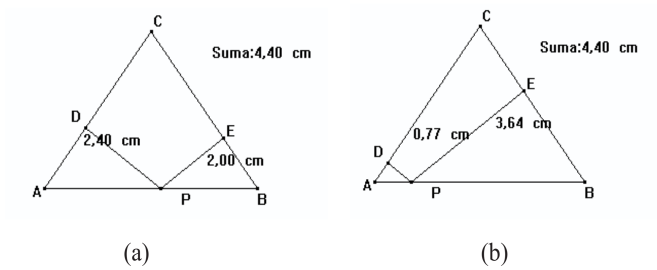

FIGURA 8. Dos representaciones obtenidas al arrastrar el punto P para estudiar el comportamiento de la suma de las distancias

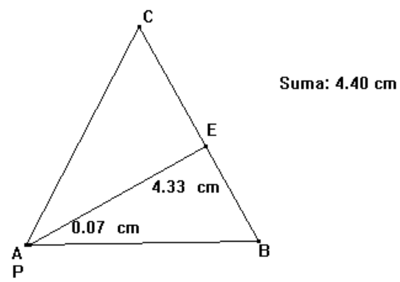

FIGURA 9. Caso límite

Este resultado es clave para elaborar una justificación, pues proporciona una referencia geométrica para el valor obtenido en la suma. Ya no es "un valor constante", sino que la suma de las distancias de P a los lados congruentes del triángulo es igual a la medida de una de las alturas relativas a los lados congruentes de éste. Después de llegar a la conjetura de la invariancia de la suma de las distancias de P a los lados congruentes del triángulo isósceles, los estudiantes se dedican a la construcción de una justificación para el hecho descubierto.

Un ejemplo representativo de una justificación de tipo explicación se presenta en el Cuadro 3. Los estudiantes mencionaron que al mover el punto P a lo largo del $\overline{AB}$, las longitudes de los $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$ varían en relación indirecta; es decir, mientras uno aumenta en una cierta cantidad, el otro disminuye en la misma cantidad y por tanto la suma de las medidas de longitud se mantiene constante. Esta explicación es interesante pues apunta a dar sentido al fenómeno en estudio.

Es que según esto, como son perpendiculares [$\overline{DP} \perp \overline{AC}$ y $\overline{EP} \perp \overline{BC}$, véase la Figura 7], entonces mientras éste baja [señala al punto E], éste [señala $\overline{AD}$] aumenta igual medida. Entonces no va a cambiar la distancia ahí, mientras que si se hubieran trazado dos segmentos cualesquiera ...

CUADRO 3. Ejemplo de explicación

Como ejemplo de prueba, vamos a considerar el trabajo realizado por una estudiante, quien intentó elaborar una prueba para la misma conjetura, aprovechando el resultado obtenido en la exploración, relacionado con la equivalencia de la longitud de la altura sobre uno de los lados congruentes del triángulo, y el valor de la suma de las distancias de P a los lados del triángulo. Hizo algunas construcciones auxiliares procurando encontrar relaciones geométricas que le sirvieran para argumentar; construyó la altura sin ocultar los segmentos construidos inicialmente (Figura 10a) y luego el cuadrilátero $BFPD$ (Figura 10b), tratando de ligarlo al tema de estudio del momento, los paralelogramos.

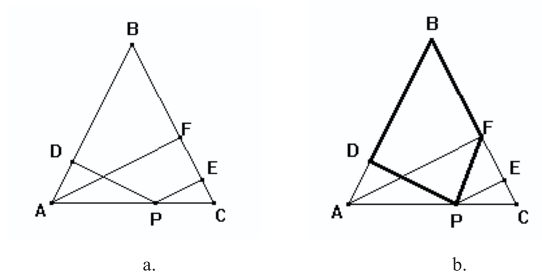

Figura 10. Construcciones auxiliares en busca de ideas para la justificación

Finalmente, al percibir que $BFPD$ no es un paralelogramo, se le ocurrió construir el $\overline{GP}$ perpendicular a la altura $\overline{AF}$ (Figura 11). De esta forma, el cuadrilátero $GFEP$ es un rectángulo, con lo cual pudo afirmar que el $\overline{GF}$ es congruente al $\overline{PE}$. Como el ΔABC es isósceles, $\angle BAC \cong \angle BCA$ y $\angle BCA \cong \angle GPA$ por ser ángulos correspondientes entre rectas paralelas. Así, $\angle GPA \cong \angle BAC$ y $\angle ADP \cong \angle PGA$ (ambos son rectos), lo cual lleva a la congruencia de ΔADP y ΔPGA (criterio LAA). Así, $\overline{GA} \cong \overline{DP}$, pudiendo establecer que $AF = EP + PD$.

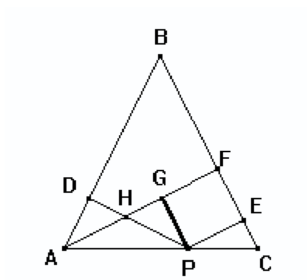

Figura 11. Construcción que da la clave de la prueba

6. **Conclusiones**

Se ha argumentado en algunos círculos académicos, que los programas de geometría dinámica son un obstáculo para que los estudiantes entiendan la necesidad de la demostración deductiva y aprendan a demostrar. Se menciona que con las evidencias que se presentan al explorar, los estudiantes pueden llegar a la convicción de hechos geométricos considerando inútil la demostración. Nosotras creemos, y lo hemos pretendido ilustrar con esta comunicación, que esto sucede si los profesores enfatizan en la función de validación de la demostración y no en la función de buscar comprensión. Si además de saber que una propiedad se cumple estamos interesados en saber por qué se cumple, se da rienda suelta a la actividad demostrativa hasta lograr un argumento convincente.

Aunque somos conscientes de la necesidad de avanzar aun más en la búsqueda de nexos entre la actividad realizada con el programa de geometría dinámica y la elaboración de pruebas o demostraciones formales, consideramos que los ejemplos presentados recogen el sentido de las experiencias que queremos favorecer en los estudiantes. Muestran cómo la actividad demostrativa, en su conjunto, es el motor para llegar comprensivamente a una demostración formal de los hechos descubiertos.

Es importante recalcar que el uso de los programas de geometría dinámica, por sí solo, no favorece la práctica de la justificación. Es únicamente mediante diseños de situaciones de aprendizaje, gestionadas por el profesor, cuya meta apunte a la práctica de la justificación, a la construcción colectiva de un sistema teórico, y a la constitución de una comunidad de práctica de indagación, como se puede aprovechar el potencial del software en esa vía. Para lograrlo, el profesor debe procurar la constitución de normas sociomatemáticas para la actividad en la clase en donde se establezcan los principios para la construcción y admisión de enunciados en el sistema y los métodos de validación que se usarán. Como los métodos de construcción en Cabri están más cercanos a los métodos de validación en matemáticas, por hacer uso explícito de propiedades geométricas interdependientes, el programa se constituye en herramienta invaluable en las clases de geometría.

Referencias

[1] C. Hoyles & J. Jones. *Proof in dynamic geometry contexts.* En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998, 121–128.

[2] R. Marrades & A. Gutiérrez. *Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment.* Educational Studies in Mathematics **44** (2001), 87–125.

[3] M. A. Mariotti. *Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment.* Educational Studies in Mathematics **44** (2001), 25–53.

[4] P. Perry, L. Camargo, C. Samper & C. Rojas. *Actividad demostrativa en la formación del profesor de matemáticas.* Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional, 2006.

(Recibido en junio de 2006. Aceptado para publicación en octubre de 2006)

Departamento de matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia
e-mail: lcamargo@uni.pedagogica.edu.co
csamper@uni.pedagogica.edu.co
pperry@uni.pedagogica.edu.co