Lecturas Matemáticas
Volumen **24** *(2003), páginas 151–161*

El sombrero del mago

Shirley Bromberg
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Para Jairo: Recordando al maestro

Abstract. We show that every convergent sequence has a subsequence lying in a regular curve. We draw some consequences for multivariate functions.

Key words and phrases. Sequences, regular curves, extension theorems.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 26B10. Secondary 58A20.

Resumen. Donde se explican (y construyen) ejemplos y contraejemplos para funciones de varias variables.

1. Un teorema sobre sucesiones

La pregunta general que originó este trabajo es la siguiente:

Bajo qué condiciones un subconjunto de $\mathbb{R}^k$ *está contenido en una subvariedad de* $\mathbb{R}^k$ *de dimensión* $l < k$ *y de clase* C^r.

H. Gluck en [1] encontró condiciones para que un compacto esté contenido en una variedad topológica, es decir resolvió el caso $r = 0$ y quien esto escribe encontró en [2] condiciones para que un compacto sea parte de una subvariedad de clase C^1.

En esta ocasión abordaremos un caso particular del problema $l = 1$, $r = 1$, que puede demostrarse por medios elementales y cuya interpretación geométrica es clara.

Teorema 1. *Una sucesión convergente en* $\mathbb{R}^k$, $\{z_n\}_n$, *de términos dos a dos distintos, está contenida en una curva regular de clase* C^1 *si y sólo si la sucesión de rectas*

$$\{\mathrm{L}\,(z_n, z_m)\}_{n \neq m}$$

es convergente.

El teorema es consecuencia de la siguiente proposición, que forma parte del folklor y que ha sido demostrada en varias ocasiones pero que es suficientemente interesante como para sea mejor conocida y merezca llamarse proposición:

Proposición 1. *Toda sucesión convergente en* $\mathbb{R}^k$ *tiene una subsucesión que forma parte de una curva regular de clase* C^1.

La demostración se hará escogiendo sucesivamente subsucesiones que vayan satisfaciendo las condiciones necesarias para estar en una curva regular.

Podemos suponer, por simplicidad, que la sucesión converge al origen, sin que ello conlleve ninguna restricción puesto que las afirmaciones que haremos son conservadas por translaciones. Además, para que sea interesante, supondremos que los términos de la sucesión son dos a dos distintos. Diremos que una sucesión es de tipo (A) si sus términos son dos a dos distintos y converge al origen.

Primera condición necesaria *Si una sucesión de tipo (A),* $\{z_n\}_n$, *está contenida en una curva regular, entonces la sucesión de términos* $z_n/|z_n|$ *debe converger.*

$\diamondsuit$ En efecto, supongamos que $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una curva regular con $\alpha(0) = 0$, que contiene a la sucesión $\{z_n\}_n$. Entonces existe una sucesión $\{t_n\}_n$ en $(-\epsilon, \epsilon)$ que converge a 0, tal que $\alpha(t_n) = z_n$ y se tiene que

$$\frac{z_n}{|z_n|} = \frac{\alpha(t_n)}{|\alpha(t_n)|}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{z_n}{|z_n|} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\alpha(t_n)}{|\alpha(t_n)|} = \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|}. \quad \checkmark$$

Paso 1. *Toda sucesión de tipo (A) tiene una subsucesión tal que el límite anterior existe.*

$\diamondsuit$ Como la sucesión $\{z_n/|z_n|\}_n$ está contenida en el compacto $\mathrm{S}^{k-1} = \{z \in \mathbb{R}^k : |z| = 1\}$, tiene al menos un punto de acumulación. Sea v_0 uno de ellos y tomemos una subsucesión de $\{z_n/|z_n|\}_n$ que converge a v_0. $\checkmark$

Para no recargar la notación, volveremos a escribir esta subsucesión como $\{z_n\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_0 = (1, 0, \dots, 0)$ puesto que sólo tendríamos que rotar la sucesión para que esto fuese cierto.

Diremos que una sucesión $\{z_n\}_n$ de tipo (A) es de tipo (B) si además

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{z_n}{|z_n|} = (1, 0, \dots, 0).$$

Ejemplo 1 *No toda sucesión de tipo (A) puede transformarse, mediante una rotación, en una sucesión de tipo (B).* En efecto, la sucesión en el plano con término general

$$z_{n,m} = \frac{1}{mn}\left(\cos\frac{n}{m}\pi\,,\ \mathrm{sen}\,\frac{n}{m}\pi\right)$$

es de tipo (A) y el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n/|z_n|\}_n$ es todo S^1.

Paso 2. *Una curva regular de clase* C^1 *pasa por una sucesión de tipo (B) si y sólo si existe una función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ *de clase* C^1 *tal que la imagen de la curva está contenida en el gráfico de* f.

$\diamondsuit$ En efecto, sea $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_k(t)))$ una curva regular de clase C^1 que pasa por una sucesión de tipo (B). Entonces $\alpha'(0) = (1, 0, \dots, 0)$ y podemos usar α_1 como parámetro alrededor del origen. La curva reparametrizada $\beta(s) := \alpha(\alpha_1^{-1}(s))$, es de la forma

$$\beta(s) = (s, \alpha_2(\alpha_1^{-1}(s)), \dots, \alpha_k(\alpha_1^{-1}(s)))),$$

y pasa por todos los puntos de la sucesión en una vecindad del origen. Es sencillo extender la función de clase C^1

$$f : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^{k-1} \qquad f(s) := (\alpha_2(\alpha_1^{-1}(s)), \ldots , \alpha_k(\alpha_1^{-1}(s))))$$

de manera que siga siendo de clase C^1 y que su gráfico contega los restantes puntos de la sucesión, que al fin y al cabo, son finitos. Observemos de paso que f satisface $f'(0) = 0$. ✓

El paso anterior muestra la relación entre el problema que estamos presentando y el problema de extensión de funciones. Nosotros seguiremos acotando el problema.

Paso 3. *Basta con hacer la demostración para sucesiones de tipo (B) en el plano ya que un argumento inductivo permite pasar del caso $k = 2$ al caso general.*

Como, por el paso anterior, se trata de construir una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ podemos construirla coordenada a coordenada. ✓

Resumiendo, en este momento el problema original se ha transformado en el siguiente: dada una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_n$ que converge al origen con

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$$

debemos construir una función f de clase C^1 cuyo gráfico contenga a una subsucesión $\{(x_{n_i}, y_{n_i})\}$ de la sucesión, es decir, tal que $f(x_{n_i}) = y_{n_i}$.

Segunda condición necesaria *Si una sucesión plana $\{(x_n, y_n)\}_n$ de tipo (B) está contenida en una curva regular de clase C^1 entonces*

$$\lim_{n \neq m \longrightarrow \infty} \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} = 0. \tag{1}$$

♢ Sabemos que la existencia de tal curva es equivalente a la existencia de una función f de clase C^1, con $f'(0) = 0$, cuyo gráfico contiene a la sucesión, es decir, tal que $f(x_n) = y_n$. El Teorema del Valor Medio implica que

$$\lim_{n \neq m \longrightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_m)}{x_n - x_m} = 0.$$

Volviendo a la sucesión, el límite anterior es equivalente a decir que

$$\lim_{n\neq m\longrightarrow\infty} \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} = 0. \quad \checkmark$$

Como hemos estado haciendo, veremos que, si bien no necesariamente toda sucesión de tipo (B) satisface (1), sí contiene una subsucesión que lo hace.

Paso 4. *Toda sucesión plana de tipo (B) tiene una subsucesión que satisface (1).*

Sea $\{z_n = (x_n, y_n)\}_n$ la sucesión. Comencemos tomando una subsucesión monótona de términos de mismo signo de $\{x_n\}_n$, y, sin que ello implique restricción alguna, supongamos que podemos tomar una subsucesion decreciente de términos positivos. Y, siguiendo con nuestro propósito de no recargar la notación, denotaremos la subsucesión de nuevo por $x_n \searrow 0$. Como $\{z_n\}_n$ es de tipo (B), dados $\epsilon, \rho > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si m, $n > N$,

$$-\epsilon x_n < y_n < \epsilon x_n \quad \text{y} \quad |z_n - z_m| < \rho. \tag{2}$$

Es decir, a partir de un cierto término toda la sucesión está en un sector como el sombreado en la figura 1. Unos cálculos muestran que si $|\arg z_n| < \pi/5$ entonces, por una parte, el segmento que une z_n con la contra-esquina v_n está fuera de la región sombreada $\{z : |z| < (1/2)|z_n|, |\arg z| < (1/2)\arg z_n\}$ y, por la otra, la pendiente del segmento $\overline{z_n v_n}$ es menor que $4|\arg z_n|$. Por lo tanto, la pendiente de cualquier segmento que une z_n con un punto en la región sombreada, que es menor que la pendiente del segmento $\overline{z_n v_n}$, está acotada por $4|\arg z_n|$. La sucesión se construye por recurrencia. Para construirla comenzamos con cualquier z_{n_1} tal que $|\arg z_{n_1}| < \pi/5$ y $|z_{n_1}| < 1/2$. Una vez construido z_{n_i}, el siguiente término de la sucesión se toma dentro del sector $\{z : |z| < (1/2)|z_{n_i}|, |\arg z| < (1/2)\arg z_{n_i}\}$, cuya existencia está garantizada por (2). Es claro que la subsucesión así construida satisface (1). $\checkmark$

Lo que hemos hecho es espaciar suficientemente la sucesión para que los segmentos que se obtienen al unir puntos consecutivos se "tiendan".

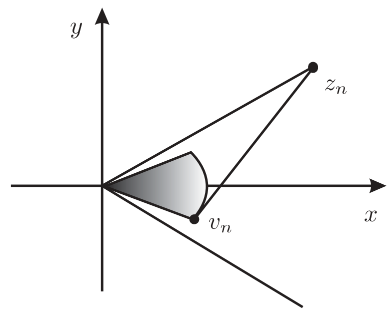

Figura 1. Refinando la convergencia

Ejemplo 2 *Notemos, como antes, que esta condición necesaria no es satisfecha por sucesiones generales.* En efecto, la sucesión de término general

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

es de tipo (B) pero no satisface (1), como el lector podrá fácilmente verificar.

Cuando unimos puntos consecutivos de la sucesión, obtenemos una poligonal, como se muestra en la figura 2. Lo que nos resta hacer es suavizarla. Afortunadamente en este caso la idea más simple funciona.

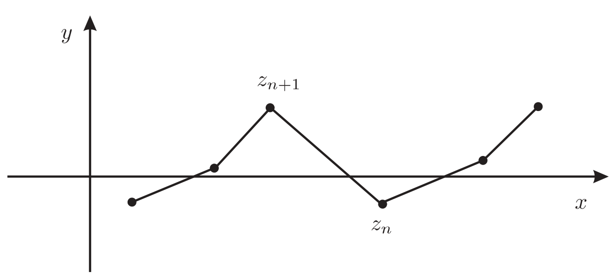

Figura 2. Uniendo los puntos de la sucesión

Podemos remplazar cada segmento por una curva del tipo la que se muestra en la figura 3.

Paso 5. *Existe una función de clase* C^1*,* $g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ *tal que* $g(0)=0$*,* $g(1)=1$*,* $g'(0)=g'(1)=0$ *y* $|g'(x)-1|\le 1$*.*

♢ La función más simple que satisface las primeras condiciones es una cúbica: $g(x):=3x^2-2x^3$, que también satisface la última (ver figura 3).

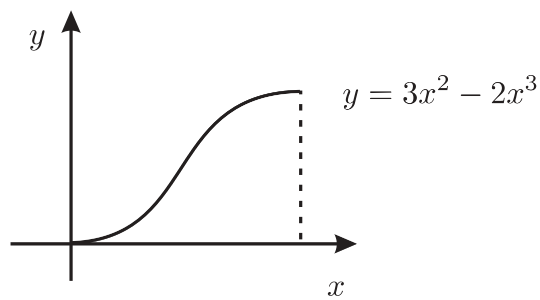

Figura 3. Suavizando un segmento

La función g puede colocarse en cualquier rectángulo de esquinas (a,A), (a,B), (b,A), (b,B). Supongamos $a<b$. Para $U=(a,A), V=(b,B)$ la función

$$\begin{array}{rccl} g_{U,V}: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (B-A)g(\dfrac{x-a}{b-a})+A \end{array}$$

satisface

$$g_{U,V}(a)=A,\ g_{U,V}(b)=B,\ g'_{U,V}(a)=g'_{U,V}(b)=0.$$

Además

$$\left|g'_{U,V}(x)-\frac{B-A}{b-a}\right|=\left|\frac{B-A}{b-a}f'(\frac{x-a}{b-a})-\frac{B-A}{b-a}\right|\le\left|\frac{B-A}{b-a}\right|. \tag{3}$$

Definimos $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 0 \\ g_{z_n,z_{n+1}}(x) & \text{si} \quad x\in[x_{n+1},x_n] \\ y_1 & \text{si} \quad x\ge x_1 \end{cases}$$

La función es de clase C^1 en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ puesto que estamos pegando funciones cuyos valores y los valores de las derivadas coinciden en los extremos de los intervalos. Para ver que f es de clase C^1 resta ver que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f'(x) = 0,$$

pero esto es consecuencia de (1) y de (3)

Cabe notar que hay sucesiones convergentes tales que ninguna de sus subsucesiones forma parte de una curva de clase C^2 como lo muestra el siguiente

Ejemplo 3 *Ninguna subsucesión de la sucesión* $\{(1/n, (1/n)^{3/2})\}_n$ *está contenida en una curva de clase* C^2. En efecto y como antes, decir que existe una curva de clase C^2 que contiene a la subsucesión, equivale a decir que existe una función f, de clase C^2 tal que $f(1/n_i) = (1/n_i)^{3/2}$. Como, necesariamente $f'(0) = 0$, si tal función existiera, se debería tener la existencia del límite

$$\lim_{i \neq j \longrightarrow \infty} \frac{(1/n_i)^{3/2} - (1/n_j)^{3/2}}{(1/n_i - 1/n_j)^2}.$$

Sin embargo, se verifica fácilmente que ese límite no existe, sin importar qué subsucesión se tome.

El lector verá que el Teorema 1 ya está demostrado.

2. Lo prometido

Recordemos algunos ejemplos que aparecen en los cursos de Cálculo Diferencial de Varias Variables.

Ejemplo 4 *La función:*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua sobre todas las rectas que pasan por el origen y, sin embargo, no es continua.

Esto se debe a que f es una función homogénea de grado 1 que no es un polinomio. Podemos construir así ejemplos que se comporten "mal" sobre cada tipo de curvas. Sin embargo, como primera consecuencia de la proposición tenemos que

Consecuencia 1. *Si* $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$, $f(0) = 0$ *es una función tal que su restricción a toda curva de clase* C^1 *que pasa por el origen es continua en el origen. Entonces* f *es continua en el origen.*

Demostración Supongamos que f no es continua en el origen. Entonces existe $\epsilon > 0$ y una sucesión $\{z_n\}_n$ que converge al origen tal que $|f(z_n)| > \epsilon$. Por la Proposición, existe una subsucesión de la sucesión original y una curva de clase C^1 que pasa por el origen y que la contiene. Claramente f restringida a esta subsucesión no es continua. ☑

Estudiemos otro de los ejemplos:

Ejemplo 5 *La función*

$$f(x, y) := (y - x^2)(y - 2x^2)$$

tiene un mínimo estricto en 0 *en todas las rectas que pasan por el origen y, sin embargo,* 0 *no es un mínimo local de* f.

Como en el ejemplo anterior, podemos poner los problemas donde queramos, pero no en todas partes, como muestra la siguiente consecuencia de la proposición.

Consecuencia 2. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, *una función tal que su restricción a toda curva regular de clase* C^1 *que pasa por el origen tiene un máximo (resp. mínimo) local en el origen. Entonces* f *tiene un máximo (resp. mínimo) local en el origen.*

Demostración Un razonamiento análogo al anterior muestra el resultado. Suponemos que $f(0)$ no es un máximo local de f. Entonces existe una sucesión $\{z_k\}_k$ que converge al origen tal que $f(z_k) > f(0)$, para cada k. Por la Proposición 1, hay una subsucesión contenida en una curva regular α de clase C^1. Sin embargo, por hipótesis, cerca del origen, todos los puntos de la curva deben satisfacer $f(\alpha(t)) \leq f(0)$. ☑

Todo permitiría suponer que si una función es derivable en toda curva regular de clase C^1 entonces f sería derivable en 0. De mostrar que esto no sucede se encarga el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6 *La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & si \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

es derivable en toda curva regular de clase C^1 *pero no es derivable en el origen.*

Demostración. Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ regular, de clase C^1 con $\alpha(0) = (0,0)$. El lema de Hadamard permite factorizar α como sigue:

$$\alpha(t) = (t\alpha_1(t), t\alpha_2(t))$$

donde α_1 y α_2 son continuas y

$$\alpha'(0) = (\alpha_1(0), \alpha_2(0)).$$

Entonces si $t \neq 0$,

$$f(\alpha(t)) \quad = \quad t\frac{\alpha_1(t)^2\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)^2+\alpha_2(t)^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(\alpha(t)) - f(\alpha(0))}{t} = \frac{\alpha_1(t)^2\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)^2+\alpha_2(t)^2}$$

y

$$(f \circ \alpha)'(0) = \frac{\alpha_1(0)^2\alpha_2(0)}{\|\alpha'(0)\|^2}.$$

Sin embargo, como el límite de

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

cuando $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$ no existe, f no es derivable en $(0, 0)$.

Referencias

[1] Gluck, H.: *Geometric characterization of differentiable manifolds in Euclidean space. II.* Michigan Math. J. 15, 1968, pp. 33–50.

[2] Bromberg, S.: *Conjuntos Cerrados de Clase* C^1. Reporte de Investigación UAM-I, 1998.

(Recibido en noviembre de 2003)

Shirley Bromberg
e-mail: stbs@xanum.uam.mx
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
México D. F., México