Lecturas Matemáticas
Volumen **24** *(2003), páginas 27–35*

Sumabilidad de Abel y convergencia no tangencial

Ricardo Estrada
Louisiana State University, E.E.U.U.

Abstract. We construct examples of series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ such that $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n$ is Abel sumable $\forall k \in \mathbb{N}$, but whose associated series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ does not converge as $z \to 1$ in non tangential sectors. Related results are also considered.

Key words and phrases. Abel summability

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 30B30.

Resumen. Se construyen ejemplos de series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tales que $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n$ sea Abel sumable $\forall\, k \in \mathbb{N}$, pero cuya serie asociada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no converge cuando $z \to 1$ en sectores no tangenciales. Se consideran también resultados relacionados.

1. **Introducción**

Un resultado básico en la teoría de variable compleja es el teorema de Abel [8], según el cual, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge para $|z| < 1$, la función $f(z)$ es analítica en $|z| < 1$

y

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ \text{N.T.}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,. \tag{1.1}$$

La notación N.T. en el límite significa de manera no tangencial; es decir, el límite existe cuando $z \to 1$ en cualquier sector no tangencial, $\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg(z-1) < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$.

Motivados por el teorema de Abel, se puede definir el concepto de sumabilidad de Abel. En efecto, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es una serie *divergente*, siempre es posible formar la serie auxiliar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Si esta serie auxiliar converge para $0 \le x < 1$, y si

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = S\,, \tag{1.2}$$

entonces decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es Abel sumable al valor S y escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \quad (\mathrm{A})\,. \tag{1.3}$$

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es divergente, pero $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ converge para $0 \le x < 1$ al valor $1/(1+x)$, cuyo límite cuando $x \to 1^-$ es $1/2$; así

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1/2 \quad (\mathrm{A})\,. \tag{1.4}$$

Muchos ejemplos de sumas en el sentido de Abel de series divergentes se pueden encontrar en [5].

Nótese que el teorema de Abel implica que toda serie convergente es (A) sumable, al mismo límite. El término técnico es regularidad: la sumabilidad de Abel es un método de sumabilidad regular pues suma series convergentes a su suma.

Supóngase que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ (A). Entonces es fácil ver que la serie auxiliar $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no solo converge para $0 \le z < 1$ sino que converge en el disco $|z| < 1$ y, de hecho, $f(z)$ es analítica en el disco. El que la serie sea Abel sumable a S significa que $f(z) \to S$ cuando

$z \to 1^-$, para z un número *real*, es decir, a lo largo del radio del disco que pasa por $z = 1$. Podemos preguntar si $f(z)$ tenderá a S cuando $z \to 1$ de manera no tangencial. La respuesta, en general, es no: existe una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ que es Abel sumable a S pero tal que en *ningún* sector $\pi - \varepsilon < \arg(z-1) < \pi + \varepsilon$, no importa que tan pequeño sea $\varepsilon > 0$, se cumple que $f(z) \to S$ cuando $z \to 1$ [2].

Más generalmente, si Ω es una región de la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ y si $\xi \in \partial\Omega$ es un punto de la frontera, existirán funciones analíticas en Ω que tienen límite cuando z se aproxima a ξ a lo largo de una curva fija pero no en todas las direcciones no tangenciales.

El propósito de este artículo es mostrar como construir contraejemplos de este tipo. A saber, en la Sección 2 enseñamos un procedimiento sencillo y directo [3] que produce funciones sin límites no tangenciales pero con límites en ciertas direcciones.

El artículo se completa en la Sección 3, donde se consideran algunos resultados relacionados, que muestran que no es siempre posible construir contraejemplos si la función analítica f satisface ciertas condiciones adicionales.

2. **Contraejemplos**

Un método simple y directo de construir contraejemplos es el siguiente, que es una variación del conocido teorema de Baire. Recordemos que en todo espacio métrico completo $\mathcal{Y}$ vale el teorema de Baire [6], según el cual $\mathcal{Y}$ es de *segunda categoría*, es decir, si $\mathcal{Y}_n$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathcal{Y}$ con $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}$ entonces alguno de los $\mathcal{Y}_n$ no debe ser nunca-denso, es decir, debe tener el interior de su clausura no vacío; los espacios que se pueden escribir como unión numerable de conjuntos nunca-densos se llaman de *primera categoría*. Así, en un espacio de Fréchet $\mathcal{X}$, si $\mathcal{V}_n$ es una sucesión de subespacios vectoriales de primera categoría de $\mathcal{X}$ con $\mathcal{V}_n \neq \mathcal{X}$, $\forall\, n$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n \neq \mathcal{X}$. Ahora bien, según se mostró en [3], si $\mathcal{V}$ es un subespacio vectorial propio del espacio de Fréchet $\mathcal{X}$ que es también un espacio de Fréchet y si la inclusión es continua, entonces $\mathcal{V}$ es de primera categoría en $\mathcal{X}$.

Para referencia futura es conveniente observar que dados dos espacios de Fréchet entonces su intersección es naturalmente también un espacio de Fréchet cuando se equipa con la topología de intersección. Notemos también que si Ω es una región de la esfera de Riemann, entonces $H(\Omega)$, el espacio de funciones analíticas sobre Ω, es un espacio de Fréchet cuando se equipa con la familia de seminormas

$$\|f\|_{K_n} = \sup\{|f(z)| : z \in K_n\} \ , \tag{2.1}$$

donde $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos compactos de Ω cuya unión es Ω.

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{E}(a,b)$ el espacio de funciones C^{∞} en el intervalo (a,b), con su topología usual, es decir, la de convergencia uniforme de todas las derivadas sobre compactos. Entonces $\mathcal{E}(a,b)$ es un espacio de Fréchet. Si $x \in (a,b)$ y $r > 0$, denotamos con $\mathcal{V}_{x,r}$ el espacio de funciones de $\mathcal{E}(a,b)$ que admiten una continuación a $(a,b) \cup D_{x,r}$ que sea analítica en el disco $D_{x,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - x| < r\}$, con la topología de la intersección de $\mathcal{E}(a,b)$ y de $H(D_{x,r})$. Entonces $\mathcal{V}_{x,r}$ es un subespacio propio de $\mathcal{E}(a,b)$, pues, por ejemplo, $\left(x^2 + s^2\right)^{-1}$, para $|s| < r$, pertenece a $\mathcal{E}(a,b)$ pero no a $\mathcal{V}_{x,r}$; y es un espacio de Fréchet. Se deduce que $\mathcal{V}_{x,r}$ es de primera categoría en $\mathcal{E}(a,b)$. Consecuentemente, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión densa en (a,b), entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r>0} \mathcal{V}_{x_n,r} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{V}_{x_n,k^{-1}}$ es de primera categoría en $\mathcal{E}(a,b)$. Una función de $\mathcal{E}(a,b)$ que no pertenezca a tal unión es una función C^{∞} que no es real analítica en ningún punto de (a,b), pues el conjunto de puntos donde una función es real analítica es abierto y la unión consiste de todas las funciones que son real analíticas en algún x_n.

Ejemplo 2. Sea $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión arbitraria con $\lambda_n > 0$, $\forall\, n$. Sea $x_0 \in (a,b)$ y sea $\mathcal{W}_{x_0} = \{f \in \mathcal{E}(a,b) : \exists M > 0,\ \left|f^{(n)}(x_0)\right| \leq M\lambda_n\,, \forall\, n\}$. El espacio $\mathcal{W}_{x_0}$ es naturalmente un espacio de Fréchet, y usando el teorema de Borel [4] se deduce que es un subespacio propio de $\mathcal{E}(a,b)$ y, por lo tanto, de primera categoría en $\mathcal{E}(a,b)$. Tomando una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ densa en (a,b) obtenemos que $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{W}_{x_k}$ es de primera categoría en $\mathcal{E}(a,b)$. Como la función

$$f^*(x) = \sup_n \frac{\left|f^{(n)}(x_0)\right|}{\lambda_n}\ , \tag{2.2}$$

es semicontinua inferiormente, se deduce que si f es una función de $\mathcal{E}(a,b)$ que no pertenece a la unión $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{W}_{x_k}$ entonces el conjunto $\Gamma = \{x \in (a,b) : f^*(x) = \infty\}$ es un G_δ denso en (a,b).

Procedamos ahora a estudiar la construcción de contraejemplos correspondientes a la convergencia radial pero no en direcciones no tangenciales. Podemos construir de esta manera una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ que es Abel sumable a S pero tal que en ningún sector $\pi - \varepsilon < \arg(z-1) < \pi + \varepsilon$, no importa que tan pequeño sea $\varepsilon > 0$, se cumple que $f(z) \to S$ cuando $z \to 1$ [2]. De hecho vamos a construir una serie tal que $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n$ sea Abel sumable a S_k, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, pero tal que en ningún sector $\pi - \varepsilon < \arg(z-1) < \pi + \varepsilon$, no importa que tan pequeño sea $\varepsilon > 0$, se cumple que $f(z) \to S_0$ cuando $z \to 1$.

Curiosamente, para construir el contraejemplo que buscamos basta encontrar un ejemplo más sencillo, a saber, el de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n$ sea Abel sumable a S_k, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, pero tal que existe *algún* sector $\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg(z-1) < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ en el que no vale que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to S_0$ cuando $z \to 1$. Este ejemplo más sencillo es fácil: tómese

$$f(z) = e^{-(1-z)^{-\alpha}}\ , \tag{2.3}$$

donde $\alpha > 0$ y donde la rama de $\omega^{-\alpha} = (1-z)^{-\alpha}$ es aquella definida para $\omega \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ y que tiene el valor 1 en $\omega = 1$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es la correspondiente a poner $z = 1$ en la expansión de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en serie de potencias. Entonces $f(z)$ es analítica en $|z| < 1$ y $D^k f(z) \to 0$ cuando $z \to 1$ en el sector $\pi - \frac{\pi}{2\alpha} < \arg(z-1) < \pi + \frac{\pi}{2\alpha}$, donde D es el operador diferencial

$$D = z\frac{d}{dz}\ , \tag{2.4}$$

pero $f(z) \nrightarrow 0$ cuando $z \to 1$ en ningún sector $\pi - \varepsilon < \arg(z-1) < \pi + \varepsilon$ si $\varepsilon > \frac{\pi}{2\alpha}$. Así, entre más grande sea α, el sector en el cual $f(z) \to 0$

es cada vez menor. En particular, si $\alpha > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n$ es (A) sumable pero no hay convergencia no tangencial ni siquiera para $k = 0$.

Pasemos ahora al contraejemplo buscado. Si $0 \le \delta < \pi/2$ llamamos $\mathcal{X}_{\delta,m}$ al espacio de las funciones analíticas f definidas en $|z| < 1$ tales que los límites de $D^k f(z)$ cuando $z \to 1$ existen en el sector cerrado $\pi - \delta \le \arg(z-1) \le \pi + \delta$ para $0 \le k \le m$, donde $0 \le m \le \infty$. Nótese que $\mathcal{X}_{0,\infty}$ es el espacio de las funciones analíticas en $|z| < 1$ cuyos límites cuando $z \to 1$ a lo largo del radio existen. El contraejemplo es una función $f \in \mathcal{X}_{0,\infty}$ que no pertenece a $\mathcal{X}_{\delta,0}$ para ningún $\delta > 0$.

En el espacio $\mathcal{X}_{\delta,m}$ introducimos una topología por medio de la familia de seminormas

$$\|f\|_{\delta,r,k} = \sup\left\{\left|D^k f(z)\right| : z \in S_{\delta,r}\right\}, \tag{2.5}$$

donde $0 \le k \le m$, y si $0 < r < 1$, el conjunto $S_{\delta,r}$ es la unión del disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ y del conjunto sectorial $\{z \in \mathbb{C} : \pi - \delta \le \arg(z-1) \le \pi + \delta,\ |z| \ge r,\ \Re e\, z > 0\}$.

Con estas seminormas el espacio $\mathcal{X}_{\delta,m}$ se convierte en un espacio vectorial topológico localmente convexo. Dado que si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente que tiende a 1, $r_n \nearrow 1$, entonces las seminormas $\|\ \ \|_{\delta,r_n,k}$ generan la topología de $\mathcal{X}_{\delta,m}$, el espacio $\mathcal{X}_{\delta,m}$ es un espacio vectorial metrizable [9]. Es fácil ver que $\mathcal{X}_{\delta,m}$ es completo y por lo tanto un espacio de Fréchet.

Si $\delta' > \delta$ y si $0 \le m, m' \le \infty$, entonces $\mathcal{X}_{\delta',m'} \cap \mathcal{X}_{\delta,m}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{X}_{\delta,m}$. Usando (2.3) se obtiene que es un subespacio propio y, como es un espacio de Fréchet, será de primera categoría en $\mathcal{X}_{\delta,m}$. Sea $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente con $\delta_n \searrow \delta$. Entonces, el teorema de Baire permite concluir que $\bigcup_{\delta'>\delta} \mathcal{X}_{\delta',0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{\delta_n,0} \ne \mathcal{X}_{\delta,m}$. Es decir, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Existen funciones analíticas en $|z| < 1$ tales que, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, la función $D^k f(z)$ tiene un límite cuando $z \to 1$ en el sector $\pi - \delta \le \arg(z-1) \le \pi + \delta$ pero $f(z)$ no tiene límite cuando $z \to 1$ en ningún sector $\pi - \delta' \le \arg(z-1) \le \pi + \delta'$ para $\delta' > \delta$.*

Tomando $\delta = 0$ obtenemos.

Teorema 2.2. *Existen series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *tales que* $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n$ *son Abel sumables* $\forall\, k \in \mathbb{N}$*, pero tales que la función* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *no tiene límite cuando* $z \to 1$ *en ningún sector* $\pi - \varepsilon \leq \arg(z-1) \leq \pi + \varepsilon$ *para ningún* $\varepsilon > 0$.

Obsérvese que la sumabilidad de Abel de todas las series $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n = S_k$ (A) es equivalente a la existencia de todos los límites de $D^k f(x)$ cuando $x \to 1^-$ con x real para todo k, y esto es equivalente a la existencia de todos los límites de las derivadas $f^{(k)}(x)$ cuando $x \to 1^-$ con x real. Así, todas las series $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n$ son Abel sumables si y solo si la función $f(x)$ tiene un desarrollo asintótico

$$f(x) \sim \alpha_0 + \alpha_1 (x-1) + \alpha_2 (x-1)^2 + \alpha_3 (x-1)^3 + \cdots, \quad x \to 1^-, \qquad (2.6)$$

para x real. De hecho, $\alpha_0 = S_0$, $\alpha_1 = S_1$, $\alpha_2 = 2(S_2 - S_1)$, y más generalmente $\alpha_k = k! S_k + \gamma_{k,k-1} S_{k-1} + \cdots \gamma_{k,1} S_1$, para ciertas constantes $\gamma_{k,j}$. Obsérvese también que si $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria de números complejos, el teorema de Ritt [4] garantiza la existencia de una función analítica, definida en un sector dado con vértice en $z = 1$, con desarrollo asintótico dado por el miembro derecho de (2.6). Poniendo estos resultados juntos, obtenemos el siguiente contraejemplo.

Teorema 2.3. *Sea* $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ *una sucesión arbitraria de números complejos. Existen series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *tales que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n = S_k \quad (\mathrm{A}) , \qquad (2.7)$$

$\forall\, k \in \mathbb{N}$*, pero tales que la función* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *no tiene límite cuando* $z \to 1$ *en ningún sector* $\pi - \varepsilon \leq \arg(z-1) \leq \pi + \varepsilon$ *para ningún* $\varepsilon > 0$.

3. **Otros resultados**

En esta sección consideramos algunos resultados relacionados.

Quisiéramos, primero que nada, indicar que no es posible construir un contraejemplo como el de la sección anterior si pedimos, adicionalmente, que la función f sea acotada [2]. En efecto, según un resultado clásico, el teorema de Montel [7] (véase [8, pág. 170]), si g es analítica y acotada en la semi-franja $\Re e\, z > 0$, $a < \Im m\, z < b$, y si existe algún valor y_0 para el cual existe

$$\lim_{x\to\infty} g\left(x + iy_0\right) = L\,, \tag{3.1}$$

entonces,

$$\lim_{x\to\infty} g\left(x + iy\right) = L \tag{3.2}$$

para todo $y \in (a, b)$ y, de hecho, la convergencia es uniforme en $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ para todo $\varepsilon > 0$. Usando una aplicacion conforme deducimos que si f es analítica y acotada en $S_{\delta,r}$ para algunos $r < 1$, $\delta > 0$, y si $f \in \mathcal{X}_\varepsilon$ para algún $\varepsilon \geq 0$, entonces $f \in \mathcal{X}_\rho$ para todo $\rho < \delta$. En particular, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es analítica y acotada en $S_{\delta,r}$ y si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L \quad (\mathrm{A})\,, \tag{3.3}$$

entonces $f(z) \to L$ cuando $z \to 1$ en cualquier sector cerrado del tipo $\pi - \rho \leq \arg(z-1) \leq \pi + \rho$ para $\rho < \delta$.

Un argumento sencillo nos dice entonces que si vale (3.3) y si $f(S_{\delta,r})$ no es denso en $\mathbb{C}$ entonces $f(z) \to L$ cuando $z \to 1$ en cualquier sector $\pi - \rho \leq \arg(z-1) \leq \pi + \rho$ para $\rho < \delta$, pues si $a \notin \overline{f(S_{\delta,r})}$, la función $(f(z) - a)^{-1}$ sería acotada en $S_{\delta,r}$. Podemos decir mucho más, sin embargo.

Teorema 3.1. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una función analítica en el disco $|z| < 1$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sea Abel sumable pero tal que la función $f(z)$ no tiene límite cuando $z \to 1$ en ningún sector $\pi-\varepsilon \leq \arg(z-1) \leq \pi + \varepsilon$ para ningún $\varepsilon > 0$. Entonces salvo a lo sumo para un valor $a \in \mathbb{C}$, para todos $\eta, \varepsilon > 0$ la ecuación $f(z) = a$ tiene un número infinito de soluciones en la región triangular $\Re e\, z > 1 - \eta$, $\pi - \varepsilon \leq \arg(z-1) \leq \pi + \varepsilon$.*

Demostración. Sea $T_{\eta,\varepsilon}$ la región triangular $\Re e\, z > 1 - \eta$, $\pi - \varepsilon \leq \arg(z-1) \leq \pi + \varepsilon$. Denotemos con T a $T_{1,\varepsilon}$. Nótese que la función $\varphi_\eta(z) = \eta z + (1-\eta)$ es analítica y envía T en $T_{\eta,\varepsilon}$. Si el resultado no fuera cierto, existiría un $\eta > 0$ y dos valores a_1, a_2 para los cuales las ecuaciones $f(z) = a_j$, $j = 1, 2$, no tengan soluciones en $T_{\eta,\varepsilon}$. Pero de acuerdo al teorema de Montel-Carathéodory [1], el espacio de funciones analíticas en una región dada que omiten dos valores fijos a_1 y a_2 es normal, es decir, precompacto en la topología de la convergencia uniforme en compactos. Así, de toda sucesión $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$ con $\eta_k \searrow 0$ podemos extraer una subsucesión $\left\{\eta_{k_j}\right\}$ de modo que $f \circ \varphi_{\eta_{k_j}}$ converja en $H(T)$; sea f^* su límite. Entonces si $L = \lim_{x\to 1} f(x)$, valdrá que $f^*(x) = L$ para todo $x \in T \cap \mathbb{R}$, y por lo tanto, $f^*(z) = L \ \forall z \in T$. Se deduce que $f \circ \varphi_{\eta_k}$ converge a L y por lo tanto $\lim_{\eta\to 0} f \circ \varphi_\eta = L$ en el espacio $H(T)$. Pero esto implica que $\lim_{z\to 1} f(z) = L$ en el sector $\pi - \varepsilon \leq \arg(z-1) \leq \pi + \varepsilon$, lo cual es una contradicción. ☑

Referencias

[1] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable II,* Springer, New York, 1995.

[2] R. Estrada, *Abel summability and angular convergence*, Scientia (2003), en prensa.

[3] R. Estrada, *Boundary values of analytic functions without distributional point values*, Tamkang J. Math. (2003), en prensa.

[4] R. Estrada & R. P. Kanwal, *A distributional approach to Asymptotics. Theory and Applications*, segunda edición, Birkhäuser, Boston, 2002.

[5] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford, 1949.

[6] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

[7] P. Montel, *Sur les familles de functions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine*, Ann. Ec. Normale **23** (1912), 487–535.

[8] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, segunda edición, Oxford University Press, Oxford, 1979.

[9] F. Treves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels,* Academic Press, New York, 1967.

(Recibido en junio de 2002; la versión revisada diciembre de 2002)

Ricardo Estrada
e-mail: restrada@math.lsu.edu
Department of Mathematics, Louisiana State University
Baton Rouge, LA 70803, E.E.U.U.