Lecturas Matemáticas
Volumen **24** *(2003), páginas 55–60*

La oveja voraz y el campo circular

Sebastián M. Marotta
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Resumen. De manera amena se discute un problema conducente a una ecuación diferencial.

Key words and phrases. Recreational mathematics

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 00A08. Secondary 97A20.

Abstract. A problem leading to a differential equation is discussed in a pleasant way.

1. Introducción

El problema que se plantea en este trabajo está íntimamente relacionado con las actividades de mi tío Ricardo, el agrimensor. Él ha trabajado en las pampas argentinas dede la época en que se usaba la cinta de acero, las fichas, los jalones y aquellos viejos teodolitos de bronce. Es famoso por su extremada exactitud y su misterioso *sex appeal*; lo primero le da mucho trabajo y lo segundo problemas con los maridos de las paisanas. Es un aficionado al ajedrez y a los juegos de ingenio y solía contarnos agudos pensamientos sobre la teoría de la relatividad y plantearnos problemas físicos y matemáticos a mi hermano, a mis primos y a mí, para divertirse con nuestras especulaciones y tal vez porque no tenía la solución y en estas charlas podría encontrarla.

Esos momentos los recuerdo con mucha emoción y alegría. Eran tardes en las que mi abuela preparaba la "chupandita", una infusión de yerba mate, cáscaras de naranja o limón, azúcar, café o cualquier otra cosa que se le ocurriera. La tomábamos tibia y con bombilla, la acompañábamos con tiritas de masa de tapas de empanadas y muchos otros manjares nunca faltaban. También recuerdo las intensas luchas entre (siempre distintos) equipos que se debían a las más extravagantes excusas. Aún hoy sucede lo mismo pero con menos frecuencia. Mi tío ha sido enviado a realizar mensuras a lugares exóticos e inhóspitos; hace un tiempo recibí una foto suya con una filipina muy agradable y con buenas curvas para ser medidas meticulosamente para lo cual, seguramente, se va a tomar un buen tiempo.

El problema de la oveja en el campo circular era uno de esos endemoniados problemas que parecían no tener solución directa o simple. Uno de esos problemas que tienen un planteo fácil pero que, al indagar un poco, encontramos que hay que resolver complicadas integrales y no siempre podemos obtener una respuesta completa o alguna ecuación explícita. En general, debemos conformarnos con alguna solución trivial o muy simple y no podemos verlo desde un punto de vista más general. El planteo es el siguiente:

2. El problema (o tal vez debiéramos decir *el probeeeema)*

El problema. *Supongamos que tenemos un campo circular y en uno de los postes de su perímetro se encuentra atada una oveja, tal vez overa, de esas que comen mucho pasto. Se desea conocer la longitud que tiene que tener la soga que ata a la oveja para solo pueda deglutir la mitad del área del campo.*

Un esquema puede ayudarnos a comprender este problema.

La figura 1 muestra el centro del campo en el origen de coordenadas $(0, 0)$ y la soga está atada en $(r_0, 0)$. El área rayada es la extensión de pasto que puede comerse la oveja.

Si llamamos ω al área de intersección de los dos círculos, el problema se reduce a encontrar la longitud r_1 de la soga a la que está atada la oveja, de modo que

$$\frac{\omega}{\pi r_0^2} = \frac{1}{2} \ . \tag{1}$$

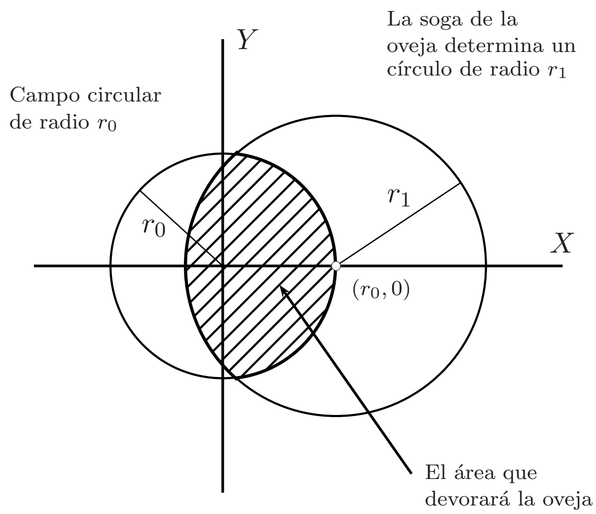

FIGURA 1

Para hallar el área ω es necesario integrar las ecuaciones de las circunferencias en la zona de intersección. Para el campo tenemos,

$$y = \pm\sqrt{r_0^2 - x^2} \tag{2}$$

y para la oveja,

$$y = \pm\sqrt{r_1^2 - (x - r_0)^2} \tag{3}$$

La Figura 2 nos muestra un detalle del problema. Para simplificar nos quedamos con las soluciones positivas de las ecuaciones (más tarde multiplicamos el área obtenida por 2).

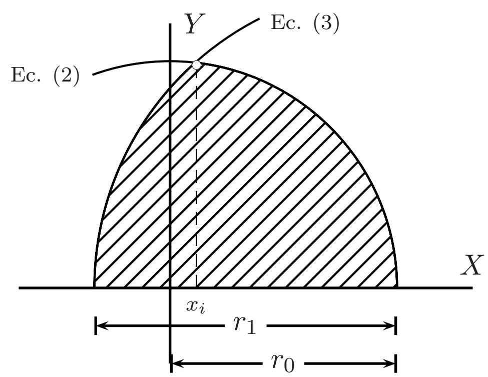

FIGURA 2

Si bien el planteo original era obtener la longitud de la soga para que la oveja coma el 50% del área del campo, una forma más general de verlo consiste en hallar el porcentaje de área comida para una relación "longitud de la soga de la oveja/radio del campo" cualquiera. De esta manera, la ecuación (1) estará representando un caso particular. Con este objetivo en mente, definimos:

$$m = \frac{r_1}{r_0} \qquad \text{y} \qquad a = \frac{x_i}{r_0}, \tag{4}$$

siendo x_i la abscisa que da la intersección en tre los círculos. Resolviendo el sistema dado por las ecuaciones (2) y (3) (partes positivas), obtenemos,

$$a = -\frac{1}{2}(m^2 - 2). \tag{5}$$

Lo que vamos a hallar es la función que da la relación entre el porcentaje factible de deglución y el porcentaje de libertad de movimiento,

$$\Omega(m) = \frac{\text{área devorada}}{\text{área del campo}} = f\left(\frac{\text{soga de la oveja}}{\text{radio del campo}}\right), \tag{6}$$

donde

$$\Omega(m) = \frac{2}{\pi r_0^2}\left(\int_{r_0-(r_0 m)}^{a} \sqrt{(r_0 m)^2 - (x - r_0)^2}dx + \int_{a}^{r_0} \sqrt{r_o^2 - x^2}dx\right). \tag{7}$$

Si nos quedamos con valores de m positivos la integración nos conduce a

$$\begin{aligned}\Omega(m) = \frac{1}{2\pi}\Bigg[\pi + \sqrt{2-m}m\left(-\sqrt{2+m} + \sqrt{\frac{1}{2-m}}m\pi\right) \\ -2\operatorname{arcsen}\left(1-\frac{m^2}{2}\right) - 2m^2\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{4-m^2}}\right)\Bigg] \ .\end{aligned} \tag{8}$$

Lamentablemente es imposible despejar m de la ecuación (8) debido a la intrincada forma en que se encuentra dentro de la ecuación (si no me cree tiene todo el derecho de hacer el intento de despejarla, pero recuerde que se lo avisé). Sólo podemos proponer valores de $\Omega(m)$ y calcular el resultado para cada uno de ellos con algún método numérico.

Finalmente, la información necesaria para resolver el problema original y cualquier otro caso particular se encuentra graficada en la figura siguiente:

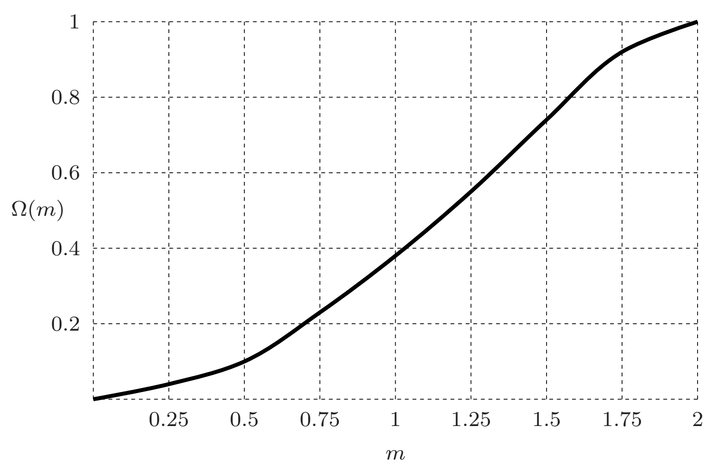

FIGURA 3

La Figura 3 muestra la gráfica de $\Omega(m)$ con m entre 0 y 2. Entrando en el gráfico con $\Omega(m) = 0.5$, yendo hasta la función y bajando hasta el eje horizontal obtenemos $m = 1.158729$. Esta es la solución a nuestro problema original. Así, si uno tiene un campo circular de digamos 1 km de radio y quiere que su oveja coma sólo la mitad del área de pasto, debe usar una soga de 1158729 mm de longitud.

Una relación $m = 0$ nos dice que la longitud de la soga de la oveja es cero. Las posibilidades son dos: a) la oveja está enredada en el alambrado y no puede comer nada o b) la oveja está suelta y a nadie le interesa todo esto.

Si $m = 1$ la oveja llega comer justo hasta el centro del campo. La longitud de la soga es igual al radio del campo y la oveja se come aproximadamente un 40% del terreno. Una relación $m = 2$ nos dice que la oveja puede comerse todo el campo y, por último, si aumenta la relación m más allá de dos, la oveja seguirá comiéndose el campo entero, i.e. su digerir puede hacerse constante por más soga que le demos. Esto último puede ser muy útil para quienes deseen ahorrar soga y dar bien de comer a sus ovejas.

3. **Epílogo**

Antes caminábamos mucho para medir un campo, ahora trabajamos con teodolitos electrónicos que permiten, mediante el empleo de un rayo láser y algunos espejos, calcular el área de un campo poligonal complicadísimo en unas pocas horas. Todo en un mismo aparato. Este tipo de adelanto tecnológico, como siempre, permite que uno tenga más tiempo para otras cosas. En el caso de mi tío Ricardo no tengo dudas sobre las consecuencias placenteras que esto le ha reportado.

(Recibido en diciembre de 2001)

Sebastián M. Marotta
Calle 115 n^o 1655 1/2, Dto. 1
1900 La Plata, Argentina
e-mail: smarotta@gioia.ing.unlp.edu.ar