

# Estabilidad de aplicaciones armónicas definidas sobre una superficie y con valores en una variedad bandera maximal

MARLIO PAREDES

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga

RESUMEN. En este artículo discutimos la estabilidad de ciertas aplicaciones armónicas definidas sobre una superficie de Riemann  $M$  con valores en una variedad bandera maximal  $F(n) = U(n)/(U(1) \times \cdots \times U(1))$ . Usando resultados de NEGREIROS [N3], estudiamos la estabilidad de una gran cantidad de aplicaciones armónicas las cuales ya habían sido encontradas por el autor anteriormente (véase [P1], [P2],[P3]).

*Key words and phrases.* Aplicaciones armónicas, variedades bandera, estabilidad.

*2000 Mathematics Subject Classification.* Primary 58E20. Secondary 14M15, 53C15

ABSTRACT. In this paper we discuss the stability of some harmonic maps defined on a Riemann surface  $M$  into a maximal flag manifold  $F(n) = U(n)/(U(1) \times \cdots \times U(1))$ . Using NEGREIROS results [N3], we study the stability of a great deal of harmonic maps which had been found by the author (see [P1], [P2],[P3]).

## 1. Introducción

El estudio moderno de aplicaciones armónicas entre variedades riemannianas comenzó con EELLS & SAMPSON [ESa], CHERN [Ch] y CALABI [Ca] e inicialmente se prestó mucha atención a las aplicaciones de la esfera  $S^2$  en la esfera  $S^n$  o en el espacio proyectivo  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . Posteriormente, en esta misma dirección, fueron obtenidos resultados muy importantes por CHERN, CARMO & KOBAYASHI [ChCK], CARMO & WALLACH [CW] y BARBOSA [Ba]. Los físicos DIN & ZARZEWSKI [DZ] y GLASER & STORA [GS] mostraron más tarde que era útil complejificar el problema, esto es, considerar el encaje totalmente geodésico natural del espacio proyectivo real  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  en el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

EELLS & WOOD [EW], clasificaron todas las aplicaciones armónicas  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ , en términos de aplicaciones holomorfas no degeneradas  $h: S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ . CHERN & WOLFSON [ChW] e independientemente BURSTALL & WOOD [BW], clasificaron todas las aplicaciones armónicas  $f: S^2 \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ , para  $k = 2, 3, 4$  y  $5$ , en términos de aplicaciones holomorfas entre estas variedades. Más generalmente, usando el encaje de Cartan, UHLENBECK [Uh] clasificó todas las aplicaciones armónicas  $f: S^2 \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ , para  $k$  arbitrario, también en términos de datos holomorfos.

Recordemos la definición de aplicación armónica con el fin de dejar más claro el propósito de este trabajo. Sean  $(M, g)$  y  $(N, h)$  variedades riemannianas de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Una aplicación  $\phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$  es armónica si es un punto crítico del funcional energía (véase [EL])

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi|^2 v_g, \quad (1)$$

donde  $|d\phi|$  es la norma de la aplicación lineal  $d\phi: T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} N$ , la cual está dada por

$$|d\phi|^2 = \sum_{i=1}^m \langle d\phi(x)(X_i), d\phi(x)(X_i) \rangle_h, \quad (2)$$

donde  $X_1, \dots, X_m$  es una base ortonormal de  $T_x M$ .

En otras palabras,  $\phi$  es armónica si y solamente si satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\delta E(\phi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(\phi_t) = 0, \quad (3)$$

para toda variación  $(\phi_t)$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , de  $\phi$  (véase [EL]).

EELLS & SAMPSON [ESa], probaron que: *una aplicación holomorfa entre dos variedades de Kähler necesariamente es armónica*. Este resultado fue generalizado por LICHNEROWICZ [L] así:

**Teorema 1.1.** *Sean  $(M, g, J_1)$  y  $(N, h, J_2)$  variedades casihermíticas con  $M$  cosimpléctica y  $N$   $(1, 2)$ -simpléctica. Si  $\phi: (M, J_1) \rightarrow (N, J_2)$  es una aplicación holomorfa entonces  $\phi$  es armónica.*

Este teorema en realidad nos está dando un método para construir aplicaciones armónicas, puesto que si conocemos aplicaciones holomorfas podremos producir aplicaciones armónicas. Recordemos que  $\phi$  es holomorfa si satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann, las cuales son ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Las ecuaciones de Euler–Lagrange son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, por tanto el teorema anterior nos da una reducción en el orden de las ecuaciones.

Estamos particularmente interesados en el caso en que  $M$  es una superficie de Riemann cerrada y la variedad  $N$  es una variedad bandera maximal  $F(n) = U(n)/(U(1) \times \cdots \times U(1))$ . En este caso, la condición de que  $M$  sea cosimpléctica se verifica inmediatamente pues toda superficie de Riemann es una variedad de Kähler y toda variedad de Kähler es cosimpléctica (véase [Sa]). La condición de que  $F(n)$  sea  $(1, 2)$ -simpléctica es conocida, pues las métricas de este tipo sobre  $F(n)$  han sido bien estudiadas por MO & NEGREIROS [MN1], PAREDES [P1], [P2] y [P3], y COHEN, NEGREIROS & SAN MARTIN [CNS].

Para aplicar el teorema 1.1 necesitamos usar aplicaciones holomorfas  $\phi: M \rightarrow F(n)$  ya conocidas. Por tal razón, usamos las aplicaciones de Eells–Wood introducidas por NEGREIROS en [N2]. Las aplicaciones de Eells–Wood fueron construidas usando los ejemplos de aplicaciones

holomorfas de una superficie de Riemann  $M$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  dados por EELLS & WOOD en [EW].

Otra razón para estudiar aplicaciones armónicas de este tipo, es que cuando  $M$  es una superficie de Riemann con una estructura conforme especial se tiene que,  $\phi$  es armónica si y solamente si es mínima. Es decir, que de esta forma podemos producir ejemplos de aplicaciones mínimas o superficies mínimas.

Estos tópicos también son de interés por las posibles aplicaciones físicas. Recientemente, han sido publicados varios trabajos en física en los cuales se usan variedades bandera (*flag manifolds*) y aplicaciones armónicas. Entre dichos trabajos podemos mencionar los de KARABEGOV [K], OWZAREK [O], IOANNIDOU & SUTCLIFFE [IS] y FIORESI [F].

Como las aplicaciones armónicas son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (3) una pregunta razonable es si estas soluciones son estables o no. En este artículo presentamos la construcción de una gran cantidad de aplicaciones armónicas usando las métricas caracterizadas en [P1] y estudiamos su estabilidad usando resultados obtenidos por NEGREIROS en [N3].

## 2. Preliminares

Las variedades bandera complejas que nos interesan están definidas por

$$F(n) = \{(L_1, \dots, L_n) : L_i \text{ subespacio de } \mathbb{C}^n, \dim_{\mathbb{C}} L_i = 1, L_i \perp L_j\}. \quad (4)$$

El grupo unitario  $U(n) = \{A \in Mat(n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I\}$  actúa transitivamente sobre  $F(n)$  así:

$$U(n) \times F(n) \longrightarrow F(n)$$

$$(A, (L_1, \dots, L_n)) \mapsto (AL_1, \dots, AL_n).$$

Usando esta acción obtenemos la siguiente representación algebraica

$$F(n) = \frac{U(n)}{T}, \quad (5)$$

donde  $T = \underbrace{U(1) \times \cdots \times U(1)}_{n\text{-veces}}$  es un toro maximal en  $U(n)$ . Por tal razón,

estas variedades son conocidas como variedades bandera maximales.

Sea  $\mathfrak{p} = T_{(T)}F(n)$  el espacio tangente a  $F(n)$  en el punto  $(T)$ . Es bien conocido que, el álgebra de Lie del grupo de Lie  $U(n)$  es el espacio vectorial  $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) : X + \overline{X}^t = 0\}$ . Este espacio vectorial es tal que

$$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{p} \oplus \underbrace{\mathfrak{u}(1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}(1)}_{n\text{-veces}}. \quad (6)$$

Es decir,  $\mathfrak{p}$  es un subespacio vectorial de  $\mathfrak{u}(n)$  y por tanto sus elementos son matrices complejas  $n \times n$  (véase [ChE]).

**Definición 2.1.** Una estructura casicompleja  $U(n)$ -invariante sobre  $F(n)$  es una transformación lineal  $J: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$  tal que  $J^2 = -I$ .

BOREL & HIRZEBRUCH [BH] probaron que existen  $2^{\binom{n}{2}}$  estructuras casicomplejas invariantes sobre  $F(n)$  y éste también es el número de torneos con  $n$  vértices. Veamos ahora que es un torneo y su relación con estructuras casicomplejas sobre  $F(n)$ .

**Definición 2.2.** Un torneo con  $n$  vértices o  $n$ -torneo  $\mathcal{T}$  es un grafo, consistente de un conjunto finito  $p_1, p_2, \dots, p_n$  de vértices o jugadores distintos, tal que cada par de vértices está unido por exactamente un arco orientado  $p_i \rightarrow p_j$  o  $p_j \rightarrow p_i$ . Si  $p_i \rightarrow p_j$  decimos que  $p_i$  le gana a  $p_j$  (véase MOON [M]).

Sea  $\mathcal{T}_1$  un torneo con  $n$  jugadores  $\{1, \dots, n\}$  y  $\mathcal{T}_2$  un torneo con  $m$  jugadores  $\{1, \dots, m\}$ . Un homomorfismo entre  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  es una función  $\phi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  tal que

$$s \xrightarrow{\mathcal{T}_1} t \implies (\phi(s) \xrightarrow{\mathcal{T}_2} \phi(t) \quad \text{ó} \quad \phi(s) = \phi(t)).$$

Cuando  $\phi$  es biyectiva decimos que  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  son isomorfos. Cada torneo determina un vector, llamado vector resultado o vector marcador

$$(s_1, \dots, s_n), \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2},$$

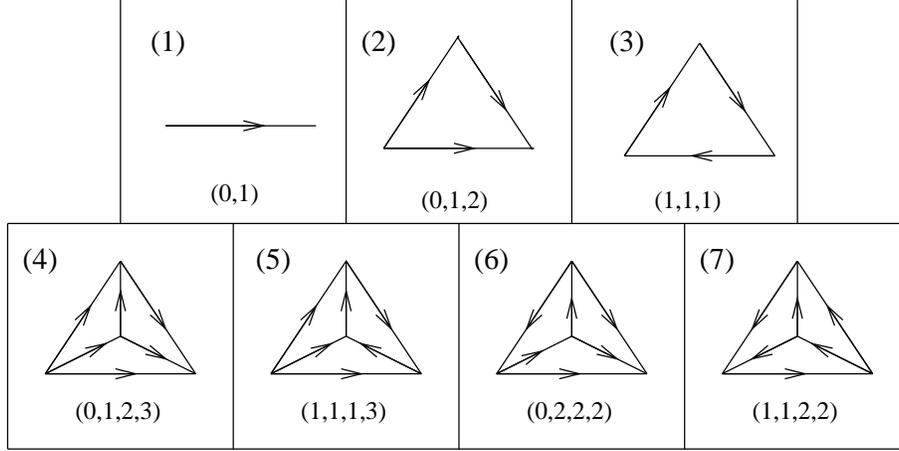


FIGURA 1. Clases de isomorfismos de  $n$ -torneos para  $n = 2, 3, 4$ .

y cuyas entradas corresponden al número de juegos que cada jugador ha ganado. Claramente, torneos isomorfos tienen el mismo vector resultado. Lo contrario no es cierto, pues para  $n \geq 5$  existen torneos que tienen el mismo vector resultado y no son isomorfos. Los torneos pueden ser clasificados en clases de isomorfismos, la Figura 1 contiene las clases de isomorfismos de torneos para  $n = 2, 3, 4$  junto con el vector marcador correspondiente.

El torneo con  $n$  jugadores  $\{1, \dots, n\}$ , definido por:  $i \rightarrow j \iff i < j$ , es llamado torneo canónico y su vector marcador es:  $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ .

Existe una identificación natural entre estructuras casicomplejas invariantes sobre  $F(n)$  y torneos con  $n$  vértices (véase [BS] o [MN2]), la cual es clave en el estudio de la geometría de las variedades bandera. Dada una estructura casicompleja invariante  $J$ , podemos hacerle corresponder un torneo  $\mathcal{T}(J)$  con  $n$  jugadores  $\{1, \dots, n\}$  así: Si  $J(a_{ij}) = (a'_{ij})$  entonces  $\mathcal{T}(J)$  es tal que para  $i < j$

$$(i \rightarrow j \iff a'_{ij} = \sqrt{-1} a_{ij}) \quad \text{ó} \quad (i \leftarrow j \iff a'_{ij} = -\sqrt{-1} a_{ij}).$$

Se dice que una estructura casicompleja  $J$  sobre  $F(n)$  es integrable si la variedad  $(F(n), J)$  es una variedad compleja, esto es, admite sistemas de coordenadas locales complejas con cambios holomorfos de coordenadas. BURSTALL & SALAMON [BS], probaron que una estructura casicompleja  $J$  sobre  $F(n)$  es integrable si y solamente si el torneo  $\mathcal{T}(J)$ , asociado a  $J$ , es isomorfo al torneo canónico.

Todas las métricas invariantes a izquierda sobre  $F(n)$  pueden ser escritas en la forma (véase [N1] o [Bl])

$$ds_{\Lambda}^2 = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \omega_{i\bar{j}} \otimes \omega_{\bar{i}j}, \quad (7)$$

donde la matriz  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  es una matriz real simétrica tal que  $\lambda_{ij} > 0$ , si  $i \neq j$  y  $\lambda_{ij} = 0$ , si  $i = j$ . Las  $\omega_{i\bar{j}}$  son las formas de Maurer–Cartan de  $U(n)$ , las cuales son tales que  $\omega_{i\bar{j}}$  es una forma diferencial de tipo  $(1,0)$  si y solo si  $i \xrightarrow{\mathcal{T}(J)} j$  y además  $\omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} = 0$ .

Las métricas (7) son llamadas métricas tipo Borel y son casihermíticas para cada estructura casicompleja invariante  $J$  sobre  $F(n)$ . En otras palabras,  $ds_{\Lambda}^2(JX, JY) = ds_{\Lambda}^2(X, Y)$ , para  $X, Y$  campos vectoriales sobre  $F(n)$ . Cuando  $J$  es integrable se dice que la métrica es hermítica.

**Definición 2.3.** Dada una estructura casicompleja sobre  $F(n)$ , definimos la forma de Kähler asociada a esta estructura como

$$\Omega(X, Y) = ds_{\Lambda}^2(X, JY), \quad (8)$$

para cada par de campos vectoriales  $X, Y$  sobre  $F(n)$ .

Decimos que  $F(n)$  es casikähler si  $d\Omega = 0$ . Cuando  $J$  es integrable y  $d\Omega = 0$  decimos que  $F(n)$  es Kähler.

Como  $\Omega$  es una 2–forma diferencial sobre  $F(n)$  entonces su diferencial exterior  $d\Omega$  es una 3–forma diferencial y por tanto puede ser descompuesta en la forma  $d\Omega = (d\Omega)^{3,0} + (d\Omega)^{2,1} + (d\Omega)^{1,2} + (d\Omega)^{0,3}$ , donde  $(d\Omega)^{p,q}$  es una forma diferencial de tipo  $(p, q)$ .

**Definición 2.4.** Decimos que la variedad  $(F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$  es  $(p, q)$ –simplectica si  $(d\Omega)^{p,q} = 0$ . Y decimos que  $(F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$  es cosimpléctica si la forma de Kähler es tal que  $d^*\Omega = 0$ , donde  $d^*$  es la codiferencial o el dual de la diferencial.

Recordemos que, debido al teorema de Lichnerowicz (teorema 1.1), estamos interesados en las métricas (1,2)–simpléticas sobre  $F(n)$ . En [P2] y [P3] se estudian varias familias de métricas (1,2)–simpléticas sobre  $F(n)$  las cuales pueden usarse junto con el teorema mencionado anteriormente para producir aplicaciones armónicas  $\phi: S \rightarrow F(n)$ , con  $S$  una superficie de Riemann. En el resto de este artículo  $S$  representará una superficie de Riemann.

**Definición 2.5.** Una aplicación  $\phi: (M, g, J_1) \rightarrow (N, h, J_2)$  es holomorfa si satisface

$$d\phi \circ J_1 = J_2 \circ d\phi. \quad (9)$$

Para aplicar el teorema de Lichnerowicz (teorema 1.1) necesitamos usar aplicaciones holomorfas  $\phi: S \rightarrow F(n)$  conocidas. Para este propósito, usaremos las aplicaciones de Eells–Wood introducidas por NEGREIROS en [N2]. Rápidamente veamos cuales son estas aplicaciones: Sea  $h: S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  holomorfa y no degenerada ( $h$  es no degenerada si  $h(S)$  no está contenida en ningún  $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ , para todo  $k < n - 1$ ). Localmente, en un abierto  $U \subset S$ , podemos representar  $h$  como

$$h_U = (u_0, \dots, u_{n-1}): S \supset U \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\},$$

donde  $U$  es tal que  $\pi \circ h_U = h$  para  $\pi: \mathbb{C}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ . Esto es,

$$h(z) = [h_U(z)] = [(u_0(z), \dots, u_{n-1}(z))].$$

Definimos la  $k$ –ésima curva asociada a  $h$  como:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_k: S &\longrightarrow \mathbb{G}_{k+1}(\mathbb{C}^n) \\ z &\longmapsto h_U(z) \wedge \partial h_U(z) \wedge \dots \wedge \partial^k h_U(z), \end{aligned}$$

para  $0 \leq k \leq n - 1$ .

Sea

$$\begin{aligned} h_k: S &\longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \\ z &\longmapsto \mathcal{O}_k^\perp(z) \cap \mathcal{O}_{k+1}(z), \end{aligned}$$

para  $0 \leq k \leq n - 1$ .

El siguiente teorema debido a EELLS & WOOD [EW], clasifica las aplicaciones armónicas de la esfera  $S^2 \sim \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ .

**Teorema 2.1.** *Para cada  $k$ ,  $h_k: S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  es armónica. Además, dada una aplicación armónica y no degenerada  $\phi: \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ , existen únicos  $h$  y  $k$  tales que  $\phi = h_k$ .*

Este teorema nos da de forma natural las aplicaciones

$$\begin{aligned} \Psi: S &\longrightarrow F(n) \\ z &\longmapsto (h_0(z), \dots, h_{n-1}(z)), \end{aligned} \quad (10)$$

las cuales son llamadas aplicaciones de Eells–Wood (véase [N2]).

Una aplicación  $\phi: S \rightarrow (F(n), ds_\Lambda^2)$  es equiarmónica si es armónica para todas las métricas invariantes de tipo Borel  $ds_\Lambda^2$ . Negreiros [N2] probó que las aplicaciones de Eells–Wood son equiarmónicas.

Una aplicación  $\phi: S \rightarrow F(n)$  induce aplicaciones  $\pi_i = p_i \circ \phi: S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ , donde

$$\begin{aligned} p_i: F(n) &\longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \\ (L_1, \dots, L_n) &\longmapsto L_i. \end{aligned}$$

Así, podemos pensar  $\phi$  como  $n$  aplicaciones  $\pi_i$ , o sea,  $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ . El siguiente teorema es debido a BLACK [B1].

**Teorema 2.2.** *Si  $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n): S \rightarrow F(n)$  es equiarmónica entonces  $\pi_i: S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  es armónica para cada  $0 \leq i \leq n-1$ .*

**Definición 2.6.** Una aplicación armónica  $\phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$  se dice que es estable si

$$\delta^2 E(\phi) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} E(\phi_t) \geq 0. \quad (11)$$

BOREL [Bo] probó que, salvo permutaciones, las métricas invariantes de Kähler  $ds_\Lambda^2$  están dadas por la matriz simétrica

$$\Lambda_K = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & \ddots & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

LICHNEROWICZ [L] probó el siguiente resultado

**Teorema 2.3.** *Si  $\phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$  es una aplicación holomorfa entre variedades de Kähler entonces  $\phi$  es armónica y estable.*

Este teorema implica que cualquier aplicación de Eells–Wood  $\phi: S \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda_K}^2)$  es armónica y estable.

Los dos siguientes resultados fueron probados por NEGREIROS en [N3] y los usaremos para estudiar la estabilidad de nuestras aplicaciones armónicas.

**Teorema 2.4.** *Sea  $\psi: S \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda'}^2)$  una aplicación de Eells–Wood donde  $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$  es la siguiente perturbación de la matriz  $\Lambda_K = (\lambda_{ij})$ :*

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{si } j = i + 1, \\ \lambda_{ij} + \varepsilon_{ij}, & \text{si } j \neq i + 1, \end{cases} \quad (13)$$

con  $\varepsilon_{ij} \geq 0$ . Entonces  $\psi$  es estable.

**Teorema 2.5.** *Sea  $\psi: S \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda'}^2)$  una aplicación de Eells–Wood donde  $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$  es la siguiente perturbación de la matriz  $\Lambda_K = (\lambda_{ij})$ :*

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{si } j = i + 1, \\ \lambda_{ij} - \varepsilon_{ij}, & \text{si } j \neq i + 1, \end{cases} \quad (14)$$

con  $\varepsilon_{ij} \geq 0$ . Entonces  $\psi$  no es estable.

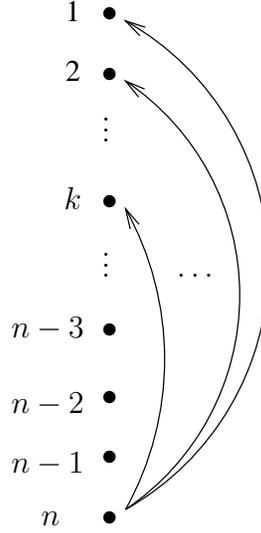


FIGURA 2. Torneo del teorema 3.1

### 3. Aplicaciones armónicas

Las aplicaciones armónicas para las cuales queremos estudiar su estabilidad se obtienen, como ya habíamos mencionado anteriormente, usando el teorema de Lichnerowicz (teorema 1.1). Como queremos aplicaciones  $\phi: S \rightarrow F(n)$  y toda superficie de Riemann es cosimpléctica entonces solo necesitamos escoger métricas  $(1,2)$ -simplécticas sobre  $F(n)$ .

En [P3] fue demostrado el siguiente teorema el cual caracteriza una gran cantidad de métricas  $(1,2)$ -simplécticas sobre  $F(n)$ . En la Figura 2 hemos usado la representación introducida por MOON en [M] para torneos, en la cual, hay algunos vértices entre los cuales faltan algunos arcos. En esta notación, se sobreentiende que de cada vértice superior existe un arco hacia cada uno de los vértices inferiores.

**Teorema 3.1.** *Suponga que  $J$  es una estructura casicompleja invariante sobre  $F(n)$  tal que el torneo asociado  $\mathcal{T}(J)$  es el torneo de la Figura 2. Entonces, una métrica invariante a izquierda  $ds_{\lambda}^2$  es  $(1,2)$ -simpléctica*

si la matriz  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  satisface, salvo permutaciones, la ecuación

$$\lambda_{ij} = \lambda_{i(i+1)} + \lambda_{(i+1)(i+2)} + \cdots + \lambda_{(j-1)j}, \quad (15)$$

para  $i = 1, \dots, n-1$  y  $j = 2, \dots, n$ , excepto para  $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{kn}$ , para los cuales se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_{2n} &= \lambda_{12} + \lambda_{1n}, \\ \lambda_{3n} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n}, \\ &\vdots \\ \lambda_{kn} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{1n}. \end{aligned} \quad (16)$$

Este teorema nos da una familia  $n$ -paramétrica de métricas (1,2)-simpléticas sobre  $F(n)$ , para cada  $1 \leq k \leq n-3$ . Además, cada una de estas familias corresponde a estructuras casicomplejas no integrables distintas. Denotamos la matriz  $\Lambda$  correspondiente por  $\Lambda^k$ , dicha matriz aparece escrita al final de este artículo.

Escribamos este conjunto de familias de métricas (1,2)-simpléticas sobre  $F(n)$  en la siguiente forma

$$\mathfrak{M}_n = \{g^k = ds_{\Lambda^k}^2 : 1 \leq k \leq n-3\}. \quad (17)$$

Como consecuencia del teorema de Lichnerowicz (teorema 1.1) obtenemos los siguientes resultados

**Teorema 3.2.** *Si  $\phi: S \rightarrow (F(n), g)$ , con  $g \in \mathfrak{M}_n$ , es holomorfa entonces  $\phi$  es armónica.*

**Teorema 3.3.** *Sean  $g \in \mathfrak{M}_l$  y  $\tilde{g} \in \mathfrak{M}_n$ . Si  $\phi: (F(l), g) \rightarrow (F(n), \tilde{g})$  es una aplicación holomorfa entonces también es armónica.*

## 4. Estabilidad

Los teoremas 2.4 y 2.5, probados por NEGREIROS, muestran que perturbando adecuadamente la métrica de Kähler  $ds_{\Lambda_K}^2$ , donde la matriz  $\Lambda_K$  está dada por la ecuación (12), podemos obtener otras aplicaciones armónicas estables o inestables.

Para  $k = 1$ , la matriz  $\Lambda^1$  tiene la forma

$$\Lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & \cdots & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix},$$

y para la métrica correspondiente tenemos el siguiente resultado

**Teorema 4.1.** *Dada  $\psi: S \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^1}^2)$  una aplicación de Eells-Wood, tenemos:*

- (i) *Si  $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  es estable.*
- (ii) *Si  $\lambda_{1n} \leq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  no es estable.*

*Demostración.*

- (i) Tomando  $\varepsilon_{1n} = \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$ ,  $\varepsilon_{ij} = 0$  en los otros casos y aplicando el teorema 2.4 se obtiene que  $\psi$  es estable.
- (ii) Tomando  $\varepsilon_{1n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - \lambda_{1n}$ ,  $\varepsilon_{ij} = 0$  y aplicando el teorema 2.5 se obtiene que  $\psi$  no es estable.  $\square$

Para  $k = 2$ , la matriz  $\Lambda^2$  tiene la forma

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \ddots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & \cdots & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso tenemos el siguiente resultado de estabilidad.

**Teorema 4.2.** *Dada  $\psi: S \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^2}^2)$  una aplicación de Eells-Wood, tenemos:*

- (i) Si  $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  es estable.
- (ii) Si  $\lambda_{12} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  no es estable.

*Demostración.*

- (i) Tomamos  $\varepsilon_{1n} = \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) \geq 0$ ,  $\varepsilon_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} - (\lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$  y  $\varepsilon_{ij} = 0$  en los casos restantes. Para ver que  $\varepsilon_{2n} \geq 0$ , escribimos  $\varepsilon_{2n} = 2\lambda_{12} + \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) = 2\lambda_{12} + \varepsilon_{1n} \geq 0$ . Entonces por el teorema 2.4 se concluye que  $\psi$  es estable.
- (ii) Tomamos  $\varepsilon_{1n} = \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - \lambda_{1n}$ ,  $\varepsilon_{2n} = \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - (\lambda_{12} + \lambda_{1n}) \geq 0$  y  $\varepsilon_{ij} = 0$  en los otros casos.  $\varepsilon_{1n} > 0$  es consecuencia de las siguientes desigualdades

$$\lambda_{1n} < \lambda_{12} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} < \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}.$$

Entonces por el teorema 2.5 se concluye que  $\psi$  no es estable.  $\square$

La matriz  $\Lambda^3$  aparece en las páginas finales de este artículo. Para este caso tenemos el siguiente resultado, similar a los dos anteriores.

**Teorema 4.3.** *Dada  $\psi: S \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^3}^2)$  una aplicación de Eells-Wood, tenemos:*

- (i) Si  $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  es estable.
- (ii) Si  $\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  no es estable.

*Demostración.*

- (i) Tomamos  $\varepsilon_{1n} = \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) \geq 0$ ,  $\varepsilon_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} - (\lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$ ,  $\varepsilon_{3n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} - (\lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$  y  $\varepsilon_{ij} = 0$  en los casos restantes. Debemos verificar que  $\varepsilon_{2n} \geq 0$  y  $\varepsilon_{3n} \geq 0$ . Para esto escribimos

$$\varepsilon_{2n} = 2\lambda_{12} + \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) = 2\lambda_{12} + \varepsilon_{1n} \geq 0$$

y

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3n} &= 2\lambda_{12} + 2\lambda_{23} + \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) \\ &= 2\lambda_{12} + 2\lambda_{23} + \varepsilon_{1n} \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces por el teorema 2.4 se concluye que  $\psi$  es estable.

- (ii) Tomamos  $\varepsilon_{1n} = \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - \lambda_{1n}$ ,  $\varepsilon_{2n} = \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - (\lambda_{12} + \lambda_{1n})$ ,  $\varepsilon_{3n} = \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n}) \geq 0$  y  $\varepsilon_{ij} = 0$  en los otros casos.  $\varepsilon_{1n} > 0$  por las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \lambda_{1n} &< \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \\ &\leq \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} < \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \end{aligned}$$

y  $\varepsilon_{2n} > 0$ , pues

$$\begin{aligned} \lambda_{12} + \lambda_{1n} &< \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \\ &\leq \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} < \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}. \end{aligned}$$

Entonces por el teorema 2.5 se concluye que  $\psi$  no es estable.  $\checkmark$

La matriz  $\Lambda^4$  se encuentra escrita en las últimas páginas de este artículo. Para este caso tenemos el siguiente resultado, similar a los anteriores, y cuya demostración también es similar a la de los teoremas anteriores

**Teorema 4.4.** *Dada  $\psi: S \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^4}^2)$  una aplicación de Eells-Wood, tenemos:*

- (i) *Si  $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  es estable.*
- (ii) *Si  $\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{45} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  no es estable.*

Por último tenemos el siguiente resultado para  $\Lambda^k$ .

**Teorema 4.5.** *Dada  $\psi: S \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^k}^2)$  una aplicación de Eells-Wood, con  $1 \leq k \leq n-3$ , tenemos:*

- (i) *Si  $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  es estable.*
- (ii) *Si  $\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{k(k+1)} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$ , entonces  $\psi$  no es estable.*

*Demostración.* La demostración se hace de forma similar a las anteriores.

$$\Lambda^3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \dots & \lambda_{12} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \dots & \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \dots & \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \ddots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & \dots & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & \dots & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \dots & \lambda_{12} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \dots & \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} & \lambda_{34} & \dots & \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & c\lambda_{12} + \lambda_{23} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} & \dots & \lambda_{45} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & + \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & * & * & \dots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & * & * & \dots & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & * & * & \dots & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \dots & \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \dots & \lambda_{12} + \lambda_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(k-1)k} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(k-1)k} & \dots & \lambda_{(k-1)k} & 0 & \lambda_{k(k+1)} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & * & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & * & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & * & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Tomando,

$$\varepsilon_{1n} = \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}),$$

$$\varepsilon_{in} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(i-1)i} + \lambda_{1n} \\ - (\lambda_{i(i+1)} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}), \text{ para } i = 2, \dots, k,$$

$$\varepsilon_{ij} = 0 \text{ en los otros casos.}$$

y aplicando el teorema 2.4 concluimos que  $\psi$  es estable.

(ii) Tomando,

$$\varepsilon_{1n} = \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - \lambda_{1n},$$

$$\varepsilon_{in} = \lambda_{i(i+1)} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \\ - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(i-1)i} + \lambda_{1n}), \text{ para } i = 2, \dots, k,$$

$$\varepsilon_{ij} = 0 \text{ en los otros casos.}$$

y aplicando el teorema 2.5 concluimos que  $\psi$  no es estable.  $\checkmark$

## Referencias

- [Ba] J. L. BARBOSA, *On minimal immersions of  $S^2$  into  $S^{2n}$* , Trans. A.M.S. **210** (1975), 75-106.
- [Bo] A. BOREL, *Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups*, Proc. Nat. Acad. of Sci. **40** (1954), 1147-1151.
- [BH] A. BOREL & F. HIRZEBRUCH, *Characteristic classes and homogeneous spaces I*, Amer. J. Math. **80** (1958), 458-538.
- [Bl] M. BLACK, *Harmonic maps into homogeneous spaces*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 255, Longman, Harlow, 1991.
- [BS] F.E. BURSTALL & S. SALAMON, *Tournaments, flags and harmonic maps*, Math. Ann. **277** (1987), 249-265.
- [BW] F. E. BUSTALL & J. C. WOOD, *The construction of harmonic maps into complex grassmannians*, J. Diff. Geom. **23** (1986), 255-297.
- [Ca] E. CALABI, *Minimal immersions surfaces in Euclidean spheres*, J. Diff. Geom. **1** (1967), 111-125.
- [ChE] J. CHEEGER & D. G. EBIN, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

- [Ch] S.S. CHERN, *Minimal surfaces in a Euclidean space of  $N$  dimensions*, in Differential and Combinatorial Topology, Symp. in Honour of Marston Morse, Princeton Univ. Press, 187-198, 1965.
- [ChCK] S.S. CHERN, M. DO CARMO AND S. KOBAYASHI, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Funct. Anal. Related Topics Symp. In Honour of Marshall Stone, 59-75 (1970).
- [ChW] S. S. CHERN AND J. G. WOLFSON, *Harmonic maps of the two-Sphere into a complex Grassmann manifold II*, Ann. of Math. **125** (1987), 301-335.
- [CW] M. DO CARMO AND N. WALLACH, *Minimal immersions of spheres into spheres*, Ann. of Math. **93** (1971), 43-62.
- [CNS] N. COHEN, C. J. C. NEGREIROS AND L.A.B. SAN MARTIN, *(1,2)-Symplectic metrics, flag manifolds and tournaments*, Bulletin of the London Mathematical Society, **34** (2002), 1-9.
- [DZ] A.M. DIN AND W.J. ZAKRZEWSKI, *General classical solutions in the  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  model*, Nuclear Physics B **174** (1980), 397-406.
- [EL] J. EELLS & L. LEMAIRE, *Selected topics in harmonic maps*, C.B.M.S. Regional Conference Series in Mathematics, No. 50, American Mathematical Society, Providence, 1983.
- [ES] J. EELLS & S. SALAMON, *Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **4:12** (1985), 589-640.
- [ESa] J. EELLS AND J. H. SAMPSON, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109-160.
- [EW] J. EELLS & J. C. WOOD, *Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces*, Advances in Mathematics **49**, 217-263 (1983).
- [F] R. FIORESI, *Quantizations of flag manifolds and conformal space time*, Reviews in Mathematical Physics **9:4** (1997), 453-465.
- [GS] V. GLASER & R. STORA, *Regular solutions of the  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  model and further generalizations*, CERN, 1980.
- [IS] T. IOANNIDOU & P. M. SUTCLIFFE, *Monopoles and harmonic maps*, Journal of Math. Phys. **40:11** (1999), 5440-5455.
- [K] A. V. KARABEGOV, *Pseudo-Kähler quantization on flag manifolds*, Conm. in Math. Phy. **200:2** (1999), 355-379.
- [L] A. LICHNEROWICZ, *Applications harmoniques et variétés Kählériennes*, Sympos. Math. **3** (Bologna, 1970), 341-402.
- [M] J.W. MOON, *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.
- [MN1] X. MO & C. J. C. NEGREIROS, *(1,2)-Symplectic structures on flag manifolds*, Tohoku Math. Journal **52** (2000), 271-282.
- [MN2] X. MO & C. J. C. NEGREIROS, *Tournaments and geometry of full flag manifolds*, Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting, Rio Claro, Brazil, World Scientific (1999).

- [N1] C. J. C. NEGREIROS, *Some remarks about harmonic maps into flag manifolds*, Indiana University Mathematics Journal **37**, No. 3 (1988).
- [N2] C. J. C. NEGREIROS, *Harmonic maps from compact Riemann surfaces into flag manifolds*, Tesis de Doctorado, University of Chicago, 1987.
- [N3] C. J. C. NEGREIROS, *On the stability of Frenet frames of holomorphic maps*, pre-print IMECC-UNICAMP, (1999).
- [O] R. OWCZAREK, *Spinor structures on flag manifolds of compact simple Lie groups*, Journal of Physics A: Mathematical and General **32:21** (1999), 3979-3991.
- [P1] M. PAREDES, *Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira*, Tesis de Doctorado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2000.
- [P2] M. PAREDES, *Some results on the geometry of full flag manifolds and harmonic maps*, Rev. Colombiana Mat. **34** (2000), No. 2, 57-89.
- [P3] M. PAREDES, *Families of  $(1, 2)$ -symplectic metrics on full flag manifolds*, Int. J. Math. Math. Sci. **29** (2002), No. 11, 651-664.
- [P4] M. PAREDES, *Torneos y estructuras parabólicas sobre variedades bandera maximales*, Revista Integración, **17** (1999), No. 1, 65-98.
- [PGM] M. PAREDES, P. GONZÁLEZ Y B. MCKAY, *Sobre un tipo especial de torneos y una clase de métricas sobre variedades bandera*, Memorias de la Primera Conferencia Latinoamericana de Matemática Computacional, Sociedad Colombiana de Matemática, Bogotá, 2001.
- [Sa] S. SALAMON, *Harmonic and holomorphic maps*, Lecture Notes in Mathematics **1164**, Springer, 1986.
- [Uh] K. K. UHLENBECK, *Harmonic maps into Lie groups (Classical solutions of the chiral model)*, Journ. of Diff. Geom. **30**, (1989), 1-50.

(Recibido en noviembre de 2002)

MARLIO PAREDES  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
APARTADO AEREO 678, BUCARAMANGA, SANTANDER, COLOMBIA  
e-mail: mparedes@uis.edu.co