Lecturas Matemáticas
Volumen **23** *(2002), páginas 27–40*

La integral como límite de sumas

Alfonso Rider Moyano & Rafael María Rubio Ruiz
Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba, España

Resumen. Este trabajo aborda la definición de integral de Riemann desde formas tradicionalmente utilizadas, clarificando su equivalencia y su conveniencia de uso.

Key words and phrases. Riemann´s Integral.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 26A42. Secondary 00A99.

Abstract. In this work, we present the definition of Riemann´s Integral with traditional forms, which clarify its equivalence and its suitability of use.

Introducción

Sea f una función continua (teoría de Cauchy), o simplemente acotada (teoría de Riemann), en un intervalo cerrado $[a, b]$. Sea

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

una partición del intervalo en n trozos. Sea

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

una n-upla arbitraria de valores tomados en cada uno de los subintervalos, es decir, tales que

$$x_{i-1} \leq t_i \leq x_i,$$

para cada valor de $i = 1, 2, \dots, n$. El número

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

se dice que es una **suma ordinaria** (*de Riemann)*, correspondiente a la función f y la partición P. Suele anotarse como $\sigma(P, f)$, pero debe observarse que para una misma partición hay muchas de estas sumas, dada la arbitrariedad en la elección de los puntos t_i.

Frecuentemente la integral de f en $[a, b]$ se define como límite de tales sumas cuando aumentamos arbitrariamente la cantidad n de puntos de división (*cuando n tiende a infinito*), o bien cuando la anchura de los trozos se hace arbitrariamente pequeña (*tiende a cero la mayor de las anchuras en cada partición*).

Estas definiciones, dadas a alumnos de enseñanza media y frecuentísimas después en los primeros cursos universitarios de Matemáticas Aplicadas, son de las que pueden *chocar* a cualquier profesor de Matemáticas de nuestros días (el cual, no podría menos que sentirse deudor de los desarrollos elementales del Análisis expuestos por autores tan eminentes como Jean Dieudonné, Henri Cartan, Serge Lang, Tom M. Apostol o Michael Spivak ...). Y *chocan* porque no se aclara la naturaleza de estos límites, los cuales no entran en ninguna de las categorías de límites numéricos previamente estudiados por los alumnos, tratándose, en realidad, de *límites dirigidos* o *límites según filtros*, conceptos que se incardinan en desarrollos más superiores y abstractos de la Matemática.

Se trata, por tanto, de definiciones matemáticamente incompletas y tales que, aunque se completaran, resultarían metodológicamente inadecuadas.

En el transcurso de nuestra actividad docente, hemos eliminado el uso de las sumas *ordinarias* de Riemann, para tomar como herramienta de construcción de la integral las llamadas *sumas inferiores* y *sumas superiores*, en las cuales los valores de f en puntos arbitrarios de cada trozo se sustituyen, respectivamente, por el ínfimo (*máxima cota inferior*) o el supremo (*mínima cota superior*) de la función acotada f(no se olvide que las continuas lo son, por lo que carece de sentido ceñirse a la teoría de Cauchy) en cada uno de los trozos de la partición.

Hay muchos desarrollos en esta línea, siendo destacable el seguido por Spivak en su popular *Calculus.*

Trabajando en esta línea, la integral de f en $[a, b]$ aparece como un número único I (si existe) intermedio a todas las sumas inferiores (que quedan como aproximaciones por defecto a la integral) y las respectivas superiores (aproximaciones por exceso). Las sumas ordinarias, las cuales pueden evitarse, serían aproximaciones a la integral sin especificación ni ley alguna en cuanto a serlo por defecto o exceso.

Sin embargo, habría que decir, para ampliaciones posteriores a la simple exposición de la teoría de la integral de funciones de una variable en un intervalo cerrado, es conveniente el conocimiento de las sumas generales de Riemann y la manera de *aproximarse* éstas al valor de la integral. Hay que recurrir, pues, a los citados límites dirigidos.

Ahora bien, no queremos excedernos, y caer en metodologías tales como la de afirmar que, *"ya que la integral es un límite según filtros, démos previamente una teoría extensa de estos límites para preparar el terreno…"* Ni mucho menos: una teoría nueva no ha de explicarse nunca en extenso sin conocer previamente modelos concretos de la misma y sin tener en horizonte su aplicación a nuevos múltiples casos. Basta con dar la definición general de estos límites con el *disfraz* del modelo concreto (integral en nuestro caso) y como mucho informar al alumno que se trata de un tipo más general de límites que los numéricos por ellos conocidos y que existe una teoría más amplia que los abarca. Si antes se ha estudiado la integral mediante sumas inferiores y superiores, basta con comprobar la equivalencia con las definiciones mediante límites y seguir adelante. En efecto.

1. Tres definiciones para un mismo concepto

Sea f una función acotada en el segmento $[a, b]$. Para cada partición

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

y cada valor de $i = 1, 2, \dots, n$, existen los números

$$\begin{aligned} m_i(P, f) &= \operatorname{Inf}\{f(x)/x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ M_i(P, f) &= \operatorname{Sup}\{f(x)/x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \end{aligned}$$

los cuales permiten definir estos otros:

$$\begin{aligned} s(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(P, f)(x_i - x_{i-1}), \\ S(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(P, f)(x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

conocidos, respectivamente, como **suma inferior** y **suma superior** de f correspondiente a la partición P. Por otra parte, para cada n-upla de valores tomados de forma que

$$x_{i-1} \leq t_i \leq x_i,$$

para cada valor de $i = 1, 2, \dots, n$, tenemos una **suma ordinaria**

$$\sigma(P, f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Finalmente, anotemos que el número

$$\mu(P) = \text{Máx.}\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

recibe el nombre de **norma** de la partición P.

1.1. La integral como valor encajado entre las sumas inferiores y superiores. Se dice que f es **integrable-1** en $[a, b]$ si existe un número único I tal que

$$s(P, f) \leq I \leq S(P, f),$$

cualquiera que sea la partición P del segmento.

1.2. La integral como límite de sumas cuando aumentamos arbitrariamente la cantidad de puntos de división en el segmento. Se dice que f es **integrable-2** en $[a,b]$ si existe un número J tal que, fijado cualquier número $\varepsilon > 0$, existe al menos una partición $P(\varepsilon)$ de $[a,b]$ de manera que para cualquier otra partición

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

más fina que $P(\varepsilon)$ y para cualesquiera n-uplas

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

elegidas de forma que

$$x_{i-1} \leq t_i \leq x_i,$$

para cada valor de $i = 1, 2, \dots, n$, se verifique

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - J \right| < \varepsilon.$$

1.3. Integral como límite de sumas cuando disminuimos arbitrariamente las longitudes de los trozos en que dividimos el segmento. Se dice que f es **integrable-3** en $[a,b]$ si existe un número K tal que, fijado cualquier número $\varepsilon > 0$, existe al menos otro $\delta > 0$ de manera que para cualquier partición

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

de norma $\mu(P) < \delta$ y para cualesquiera n-uplas

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

elegidas de forma que

$$x_{i-1} \leq t_i \leq x_i,$$

para cada valor de $i = 1, 2, \dots, n$, se verifique

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - K \right| < \varepsilon.$$

He aquí tres números *candidatos* a convertirse en **la integral de f en** $[a,b]$. El primero, I recuerda a los definidos mediante los clásicos *encajes de intervalos* de Cantor, J parece ser un *límite de sucesiones*, mientras que Kse asemeja a un *límite de funciones* con su variable tendiendo a cero. Tres números cuya existencia será simultánea y cuya coincidencia cabe esperar…

2. Equivalencia entre las tres definiciones de integrabilidad

Para probar la equivalencia entre estas definiciones supondremos que alguna de ellas (la primera en nuestro caso) ya ha sido estudiada en extenso. Podremos, pues, usar, por ejemplo, la **condición de Riemann** que es equivalente a la que acabamos de llamar de **integrabilidad-1.** Por haber tres afirmaciones, la demostración habrá de ser *circular*. Analizadas sus posibles ordenaciones, hemos encontrado como más simple la cadena

Definición$-1 \Rightarrow$ *Definición*$-3 \Rightarrow$ *Definición*$-2 \Rightarrow$ *Definición-1*

2.1. Integrabilidad$-$1 $\Rightarrow$ Integrabilidad-3. Dada una partición arbitraria P se tendrá, por la definición de I,

$$s(P, f) \leq I \leq S(P, f),$$

a la vez que

$$s(P, f) \leq \sigma(P, f) \leq S(P, f),$$

cualquiera que sea la suma ordinaria que construyamos con P. Restando las dos desigualdades, se tiene

$$s(P, f) - S(P, f) \leq \sigma(P, f) - I \leq S(P, f) - s(P, f) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\sigma(P, f) - I| \leq S(P, f) - s(P, f).$$

Ahora bien, como f cumple la condición de Riemann, fijado un positivo ε, encontraremos una partición $P(\varepsilon)$ tal que

$$S(P(\varepsilon), f) - s(P(\varepsilon), f) < \varepsilon/2.$$

Sea N la cantidad de subintervalos de $P(\varepsilon)$ y sean m y M los números

$$m = \text{Inf}\{f(x)/a \leq x \leq b\}, M = \text{Sup}\{f(x)/a \leq x \leq b\}.$$

Para cada partición P pongamos

$$S(P, f) - s(P, f) = A + B,$$

donde A está formado por los sumandos del primer miembro correspondientes a los trozos de P que no incluyan ningún punto de $P(\varepsilon)$ y B por los restantes. Siendo n la cantidad de estos segundos trozos, es claro que n no puede superar estrictamente a N (en el caso de mayor dispersión, piénsese que cada uno de ellos sólo tendría un punto de $P(\varepsilon)\dots$). Además, en cada uno de ellos, es

$$(M_i(P,f) - m_i(P,f))(x_i - x_{i-1}) \leq (M-m)\mu(P),$$

de manera que

$$B \leq (M-m)\mu(P)n \leq (M-m)\mu(P)N.$$

Por otro lado, si un trozo aporta su sumando al número A, estará contenido en alguno de los subintervalos de la partición $P(\varepsilon)$, con lo cual el sumando es menor o igual que el aportado al número $S(P(\varepsilon), f) - s(P(\varepsilon), f)$ por el trozo de $P(\varepsilon)$ en que esté contenido. De aquí se concluye que

$$A \leq S(P(\varepsilon), f) - s(P(\varepsilon), f) < \varepsilon/2.$$

Fundiendo los razonamientos anteriores, podemos resumirlos así:

$$\begin{aligned}|\sigma(P,f) - I| &\leq S(P,f) - s(P,f) = A + B\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (M-m)\mu(P)N < \varepsilon,\end{aligned}$$

si tomamos P de forma que

$$\mu(P) < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)N},$$

con lo cual nuestro I verifica la tercera condición de integrabilidad.

2.2 Integrabilidad–3 $\Rightarrow$ Integrabilidad–2. Tomemos $P(\varepsilon)$ como una partición con norma inferior a δ (siempre existen tales particiones: por ejemplo, en la sucesión de particiones equilongitudinales, a partir de un cierto lugar todas serán de norma menor que δ pues su valor genérico $(b-a)/n$, tiende a cero). Para cualquier partición P más fina que esta $P(\varepsilon)$, se tendrá

$$\mu(P) \leq \mu(P(\varepsilon)) < \delta,$$

y, por tanto, para una suma ordinaria cualquiera asociada a ella, será

$$|\sigma(P,f) - K| < \varepsilon,$$

lo que demuestra que K verifica la segunda definición.

2.3. Integrabilidad–2 $\Rightarrow$ Integrabilidad–1. Fijado $\varepsilon > 0$, sea $P(\varepsilon)$ la partición asociada a él por la definición del número J. Para cada partición arbitraria P consideremos la

$$Q = P \cup P(\varepsilon).$$

Entonces, usando cualquiera de las sumas ordinarias asociadas a Q, obtenemos las desigualdades

$$s(P,f) \leq s(Q,f) \leq \sigma(Q,f) < J + \varepsilon,$$
$$J - \varepsilon < \sigma(Q,f) \leq S(Q,f) \leq S(P,f).$$

Dada la arbitrariedad del positivo ε, la primera implica que

$$s(P,f) \leq J,$$

mientras que la segunda nos lleva a

$$J \leq S(P,f).$$

Por tanto, el número J es un posible valor de la integral entendida en nuestro primer sentido. Si logramos demostrar que f satisface la condición de Riemann, quedará probado que es único y, en consecuencia, coincidirá con dicha integral. A este fin empecemos por observar que para una partición arbitraria

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\},$$

se tiene

$$S(P,f) - s(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i(P,f) - m_i(P,f))(x_i - x_{i-1}),$$

donde

$$M_i(P,f) - m_i(P,f)$$

coincide con el número

$$\mathrm{Sup}\{f(x) - f(y)/x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Esto significa que, fijado cualquier positivo ρ, existen números

$$t_i, u_i \in [x_i, x_{i-1}]$$

para los cuales

$$M_i(P,f) - m_i(P,f) - \rho < f(t_i) - f(u_i).$$

Multiplicando esta desigualdad por la longitud del trozo y sumando para todos los de la partición, tenemos

$$\begin{aligned} S(P,f) - s(P,f) - \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i - x_{i-1}) &= S(P,f) - s(P,f) - \rho(b-a) \\ &< \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} S(P,f) - s(P,f) < \rho(b-a) + \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - J + \\ J - \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \le \rho(b-a) + \\ \Big| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - J \Big| + \Big| J - \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \Big|. \end{aligned}$$

Fijado ε, basta tomar la partición $P(\varepsilon)$ asociada por la definición de J al positivo $\varepsilon/3$ y particularizar la anterior desigualdad a esta partición y al valor

$$\rho = \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

para obtener finalmente

$$S(P(\varepsilon), f) - s(P(\varepsilon), f) < \varepsilon.$$

Las demostraciones están acabadas, pero cabe algún comentario personal. El segundo paso (*integrabilidad*-3 $\Rightarrow$ *integrabilidad*-2) es casi *trivial*, el tercero (*integrabilidad*-2 $\Rightarrow$ *integrabilidad-1*) queda bien elaborado, es *clásico*, *canónico*, pero he aquí que queda como *curioso* el primero (*integrabilidad*-1 $\Rightarrow$ *integrabilidad*-3). La relación

$$S(P,f) - s(P,f) \le (M-m)\mu(P)n,$$

donde n es ahora la cantidad de trozos de P, es inmediata pero no permite seguir acotando adecuadamente el segundo término por la presencia del factor n; hemos tenido que acotar éste mediante la introducción de la componente B del primer término y ahí ha estado la clave de la demostración porque, además, el otro sumando A se logra acotar mediante la condición de Riemann.

3. ¿Por qué tres nombres para un mismo objeto?

En nuestro primer punto habíamos señalado que para ciertas aplicaciones de la integral es preferible usar la versión de *límite dirigido* y no la de *número encajado*. Ilustrémoslo a través de algunos ejemplos que muestren la conveniencia de cada caso.

En los tres primeros ejemplos, las sumas inferiores y superiores ofrecen un método natural de aproximación:

1) Área encerrada por un trapecio recto, con un lado curvado

Hay un caso elemental que es el del rectángulo. Su área es el producto de la longitud de la altura por la longitud de la base.

2) Masa de un alambre recto, conocida la densidad

El caso elemental es el de densidad constante. La masa, entonces, es el producto de tal constante por la longitud del alambre.

3) Trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de un segmento rectilíneo si la dirección es constante e igual a la del desplazamiento

El caso de fuerza con intensidad o módulo constante es elemental. El trabajo, para él, se mide mediante el producto de esta constante por la longitud recorrida.

En estos modelos, el primer factor de la medida para el caso elemental es una función sin más. El primero de ellos tiene un uso tan antiguo como la propia Teoría de la Integral y es el que los Profesores utilizan habitualmente para *motivar* el concepto de integral. Nosotros, actuando en consecuencia con lo señalado al principio de no estudiar teorías generales hasta conocer varios modelos concretos, solemos dar un paso más y actuamos de otra forma: desarrollamos independientemente los tres modelos, haciendo ver al alumno que siempre llegamos a que el número para medir bien el área, bien la masa o bien el trabajo, se aproxima siempre por unos números que aritméticamente son los mismos. Entonces queda justificado el darles nombre: son las *sumas inferiores* y *superiores de Riemann*, y a nadie extrañará que el número buscado (área, masa o trabajo), cuando prescindamos de la interpretación propia de cada modelo, nos lleve a un nuevo concepto: *la integral de Riemann.*

Sin embargo, si el primer factor es resultado a su vez de operaciones con una o varias funciones, las aproximaciones se expresan mejor con sumas ordinarias de Riemann y esto tiene su explicación: no hay un *álgebra* clara para trabajar ni con los ínfimos ni con los supremos. Precisamente por ello, la introducción de modelos *compuestos* debe hacerse cuando ya se ha desarrollado suficientemente la Teoría de la Integral y se conozca, por ejemplo, que ciertas operaciones con funciones integrables tienen resultado integrable o que las funciones continuas siempre lo son. Desarrollaremos en detalle un modelo de este tipo:

Momento de inercia de un alambre recto no homogéneo respecto de un elemento geométrico r (punto o recta) dado.

Partimos del caso simple de una masa puntual m situada a una distancia δ de r, cuyo momento de inercia se define como el número

$$I_r = m\delta^2.$$

Esta misma fórmula se mantiene para un sistema finito de masas

$$\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$$

situadas a distancias

$$\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$$

de $r,$ sin más que sumar. Es decir, el momento de inercia del sistema sería el número

$$I_r = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 m_i.$$

El paso de este sistema discreto a uno continuo (segmento de alambre no homogéneo) requiere referenciarlo convenientemente, lo cual se consigue situando el alambre en un intervalo $[a, b]$ del primer eje coordenado, para poder expresar dos funciones: una $f(x)$ que nos señale la densidad (*masa* *por unidad de longitud*) y otra $\delta(x)$ que mida la distancia desde r a cada valor x del intervalo. Tomada ahora una partición

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b\},$$

cabría la construcción de un número que mida *aproximadamente* el momento de inercia del alambre sin más que imaginar que a cada trozo le asignamos una densidad constante e igual, por ejemplo, a la de su punto inicial, así como imaginar que la masa de este trozo se encuentra toda concentrada en el mismo punto inicial. Este número sería

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^2(x_{i-1}) f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

y observamos enseguida que se trata de una suma ordinaria de Riemann asociada a la partición P y a la función

$$\delta^2(x) f(x).$$

Si δ y f se suponen continuas, también lo es la anterior y, por tanto, se trata de una función integrable en $[a, b]$. Tomando particiones bien cada vez con más puntos de división, bien con norma cada vez menor, las anteriores sumas aproximan por un lado a la medida buscada del momento de inercia y por otro lado a su integral. Nada más natural, entonces, que tomar el número

$$I_r = \int_a^b \delta^2(x) f(x) dx$$

como *extensión* continua del momento de inercia conocido para casos discretos.

Hemos tratado el caso simple de un alambre recto. Si fuese curvo, razonamientos similares nos conducirían a una integral curvilínea. O una integral doble si se tratase de una lámina plana, una de superficie si fuese una lámina curvada o una triple para el caso más general (y real por cierto) de un sólido.

4. Los elementos diferenciales

Este mismo problema sería abordado del siguiente modo, en algunos casos, por usuarios de la matemática de formación técnica

-Tómese un trozo pequeño de alambre con longitud dx en el que la densidad y la distancia sean constantes, su momento de inercia será

$$\delta^2(x)f(x)dx.$$

Esta es la diferencial del momento de inercia, luego si lo queremos para todo el alambre, hagamos lo contrario de diferenciar, integrémoslo.

Si abordamos el problema mas general de una lámina plana, no será tan clara la existencia de una función (de dos variables, por supuesto) que tuviera como diferencial el *leibniziano* integrando

$$\delta^2(x,y)f(x,y)dxdy$$

Para dar justificación a este modo de proceder, habría que adentrarse en la teoría del cálculo diferencial exterior, lo cual quedará fuera del alcance habitual en los cursos de matemáticas de las distintas carreras técnicas.

Sin embargo, el uso de este tipo de razonamientos (con variantes más o menos *esmeradas*) no es del todo rechazable. La misma historia está llena de ellos. Se trata de lo que podríamos llamar *mentiras, que encierran una verdad*, y en cualquier caso, de *maravillas del lenguaje sintético*, porque bien conducidas lo único que hacen es abreviar toda nuestra exposición para llegar, no ya a una diferencial, sino más bien al conocimiento del sumando genérico que aparece en las sumas de Riemann de la integral que vamos buscando.

Pero lo mismo que hemos hablado de modelos simples y modelos compuestos, sugiriendo que éstos se empleen en etapas más avanzadas dentro de la exposición de una Teoría de la Integral, la consideración de los *elementos diferenciales* debe hacerse cuando el alumno haya avanzado en la madurez del tema.

Referencias

[1] Apostol, Tom M. *Análisis matemático*, 2a. edición. Reverté, Barcelona, 1996.
[2] Apostol, Tom M. *Calculus*, Vols. I, II. Reverté, Barcelona, 1989.
[3] Dieudonné, Jean. *Elementos de análisis*. Reverté, Barcelona, 1981.
[4] Gaughn, E. *Introducción al análisis*. Editorial Alhambra.

[5] Spivack, Michael. *Calculus*, 2a. edición, Reverté, Barcelona, 1992.
[6] Schwartz, Laurent. *Cours d'analyse*. Hermann, Paris, .

(Recibido en septiembre 2001)

Alfonso Rider Moyano & Rafael María Rubio Ruiz
e-mail: ma1rimoa@uco.es, ma1rurur@uco.es
Universidad de Córdoba, Campus de Rabanales. Edificio C-2.C.P.
España, 14071. Teléfono: 957211023