Lecturas Matemáticas
Volumen **20** *(1999), páginas 5-33*

Una introducción elemental a la teoría de las funciones zeta locales de Igusa

Víctor Albis & Wilson Zúñiga-Galindo†

Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá
Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga

Abstract. In this paper, an elementary account of the theory of Igusa's local zeta functions and the stationary phase formula for $\pi-$adic integrals is given. The main motivation was to study the rationality of the local zeta functions in positive characteristic for some special classes of polynomials. At the end of the paper, the zeta functions for some types of polynomials are explicitly calculated, in any characteristic

Key words and phrases. Local zeta functions, local fields, number of solutions of congruences, characteristic p methods.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 11S40, 11D79. Secondary 13A35

Resumen. En este artículo hacemos una introducción elemental a la teoría de las funciones zeta locales de Igusa y a su fórmula de la fase estacionaria para integrales $\pi-$ádicas, motivados por el deseo de estudiar la racionalidad de las funciones zeta locales en característica positiva para ciertos tipos de polinomios. En la parte final se calculan, explícita e independientemente del valor de la característica, las funciones zeta locales correspondientes a ciertas clases de polinomios.

† Los autores quieren expresar sus agradecimientos a las Universidades Nacional de Colombia y Autónoma de Bucaramanga el apoyo que les brindaron. El primer autor contó con la ayuda financiera de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. El segundo, con la de COLCIENCIAS (Proyecto código # 1241-05-111-97) .

§ 1. Introducción

El propósito del presente trabajo, de carácter divulgativo, es presentar algunas nociones básicas de la teoría de las llamadas *funciones zeta locales de Igusa*, e introducir la *fórmula de la fase estacionaria para integrales* $\pi-$*ádicas* debida al mismo autor.

En el estudio de las funciones zeta locales se mezclan de manera sorprendente ideas de varias teorías matemáticas, como son la geometría algebraica, la teoría de los números, la teoría de las singularidades y la lógica. Además, existe una gran cantidad de conjeturas que relacionan propiedadades de las funciones zeta locales con conceptos y objetos de estas teorías. Con este ensayo buscamos despertar y estimular en nuestro medio el interés por este tipo de problemas.

Como se acostumbra en este tipo de artículos, no presentamos demostraciones de todas las afirmaciones. Sin embargo, esperamos que la exposición que hacemos permita al lector obtener una visión panorámica coherente de los temas discutidos.

Las funciones zeta locales, como lo veremos más adelante, se definen mediante integrales asociadas a polinomios con coeficientes en *cuerpos locales no arquimedianos.* Estos cuerpos son de dos tipos:

- cuerpos p-ádicos $K/\mathbb{Q}_p$, donde $\mathbb{Q}_p$ es el cuerpo de los números p-ádicos racionales y K es una extensión finita $\mathbb{Q}_p$; y
- cuerpos $K/k((T))$, donde $k((T))$ es el cuerpo de las series meromorfas formales sobre un cuerpo finito k y K es una extensión finita de $k((T))$.

A continuación describimos la estructura de este trabajo.

En la sección 2, resumimos las propiedades y resultados básicos relativos a los cuerpos locales no arquimedianos. Estos son cuerpos topológicos localmente compactos. Este hecho implica la existencia de una medida invariante por traslaciones, la llamada *medida de Haar*, la cual está unívocamente determinada por K, excepto por factores constantes positivos. Sobre la base de que el lector está familiarizado con la teoría abstracta de la integración, en la sección 3 enunciamos las propiedades fundamentales de la integral de Haar en K que necesitaremos en las secciones siguientes. Debemos anotar, sin embargo, que es posible, en nuestro caso, hacer un desarrollo *ad hoc* de la integral de Haar que usaremos aquí, lo cual evitaría tener un conocimiento previo de la teoría general de la integración.

Todo cuerpo local no arquimediano K contiene un subanillo compacto maximal $\mathcal{O}_K$. Este subanillo se denomina el *anillo de los enteros* del cuerpo K. Adicionalmente, éste contiene un único ideal maximal $\mathfrak{p}$ (véase la sección 2).

Si $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, la función zeta local de Igusa asociada con este polinomio se define por la fórmula

$$Z(s, f) := \int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s dx \ , \tag{1}$$

donde dx es una medida de Haar normalizada de tal manera que la medida de $\mathcal{O}_K^n$ sea 1, y $s \in \mathbb{C}$, con $\mathrm{Re}(s) > 0$.

La función zeta local $Z(s, f)$ contiene información aritmética acerca del polinomio $f(x)$. Para explicar esta relación introducimos la denominada *serie de Poincaré* de $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$: si N_m designa al número de soluciones de la congruencia $f(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0 (\text{mód } \mathfrak{p}^m)$, con $x_i \in \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m$, sea

$$P(t) := \sum_{m=0}^{\infty} N_m (q^{-n} t)^m \ , \tag{2}$$

donde n es el número de variables del polinomio. La siguiente relación entre esta serie $P(t)$ y la función zeta de Igusa $Z(s, f)$ explica la afirmación anterior acerca de la naturaleza aritmética de $Z(s, f)$:

$$Z(f, s) = P(t) - t^{-1}(P(t) - 1) \ , \quad \text{donde} \quad t = q^{-s} \ . \tag{3}$$

En la sección 4 introducimos los resultados básicos sobre las funciones zeta locales de Igusa y establecemos la relación entre $Z(s, f)$ y $P(t)$ que acabamos de mencionar. También enunciamos un teorema fundamental de Igusa que afirma que si K es un cuerpo p-ádico entonces $Z(s, f)$ es una función racional de q^{-s}, con lo cual $P(t)$ resulta una función racional de t, en virtud de (3). Este resultado fue conjeturado por Boriévich y Shafariévich [**4**, pág. 47], apoyándose en su validez en casos particulares.

A partir de la racionalidad de $Z(s, f)$ demostraremos luego que los polos de $Z(s, f)$ controlan el comportamiento asintótico de N_m.

Una función $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una *función del tipo de Schwartz* si es de clase C^∞, tiene soporte compacto y decrece muy rápidamente en infinito (véase, por ejemplo, [**17**, cap. 2] para una definición precisa de la topología del espacio de las funciones de Schwartz). Estas funciones desempeñan un papel importante en la física matemática ([**2**]). En particular, las *integrales oscilantes con fase analítica* se expresan por fórmulas del tipo

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \exp(\lambda \sqrt{-1} f(x)) dx \ , \tag{4}$$

donde Φ es una función del tipo de Schwartz. En este caso, sabemos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo local arquimediano, localmente compacto, y que dx, la medida de Lebesgue, es precisamente la medida de Haar del grupo topológico $(\mathbb{R}^n, +)$.

Los análogos no arquimedianos de las funciones de tipo Schwartz son las denominadas funciones del *tipo de Schwartz–Bruhat*. Estas son funciones localmente constantes con soporte compacto. Si K es un cuerpo local no arquimediano, la análoga de (4) es una función zeta local definida por

$$Z_\Phi(s, f) = \int_{K^n} \Phi(x)|f(x)|^s dx \ , \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \ , \tag{5}$$

donde $f(x)$ es una función K-analítica, Φ es una función del tipo de Schwartz-Bruhat y dx es una medida de Haar sobre K^n. Bajo una interpretación adecuada las integrales (4) y (5) resultan ser realizaciones diferentes de un mismo objeto matemático.

En la sección 5, introducimos la *fórmula de la fase estacionaria de Igusa* y la usamos para calcular las funciones zeta locales de algunos tipos de polinomios.

Es importante anotar que la racionalidad de $Z(s, f)$ es un problema abierto en característica positiva, razón por la cual la conjetura de Boriévich y Shafariévich es aún un tema de actualidad. Esto despertó nuestro interés en examinar más de cerca este último caso. En [**1**], V. S. Albis y R. Chaparro, usando métodos “elementales”, demostraron su validez en algunos casos. En un artículo reciente [**18**], Igusa ha sugerido que un estudio cuidadoso de su formula de la fase estacionaria puede conducir a una nueva demostración de la racionalidad de las funciones zeta locales en cualquier característica. W. Zuñiga [**24, 25**] ha empleado exitosamente esta sugerencia para comprobar la validez de la conjetura para amplias clases de polinomios.

Finalmente, para cerrar esta introducción, queremos recomendar vivamente al lector interesado en proseguir el estudio de las funciones zeta locales las referencias [**6**, **17**, **20**], las cuales contienen una excelente y más completa introducción al tema de las funciones zeta locales.

§ 2. Cuerpos locales

En esta sección seguimos de cerca la exposición que hace Goldstein en [**12**]. A este libro remitimos al lector para más detalles sobre algunas de nuestras afirmaciones, aunque también puede serle útil el libro más difícil de A. Weil [**23**].

Un *cuerpo de números algebraicos* es una extensión finita de $\mathbb{Q}$.

Al cuerpo finito con q elementos lo denotamos con $\mathbb{F}_q$ y con $\mathbb{F}_q(x)$ al cuerpo de funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{F}_q$. Un *cuerpo de funciones algebraicas en una variable con cuerpo de constantes finito* es una extensión finita de $\mathbb{F}_q(x)$.

Un cuerpo K se denomina un *cuerpo global* si es un cuerpo de números algebraicos o un cuerpo de funciones algebraicas en una variable con cuerpo de constantes finito.

Definición 2.1. Sea K un cuerpo global. Un *valor absoluto* $|\ |$ de K es una aplicación $|\ | : K \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ que cumple las siguientes condiciones:

(i) $|0| = 0$; $|x| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

(ii) $|xy| = |x|\,|y|$.

(iii) Existe una constante $C > 0$ tal que: $|x + y| \leq C \max\{|x|, |y|\}$.

Si (iii) es válida con $C = 1$, decimos que $|\ |$ es *un valor absoluto no arquimediano*. En cualquier otro caso decimos que $|\ |$ es un *un valor absoluto arquimediano*.

El lector puede verificar fácilmente que los valores absolutos no arquimedianos y los valores absolutos arquimedianos con constante $C = 2$ satisfacen la desigualdad triangular. Por otra parte, si $|\ |$ es un valor absoluto con constante $C > 2$ y $\alpha \in \mathbb{R}_+$, entonces $|\ |^\alpha$ es un valor absoluto con constante igual a C^α. Ahora bien, el valor absoluto $|\ |^\alpha$ es "equivalente" al valor absoluto $|\ |$, en el sentido de que las topologías que inducen sobre K son equivalentes, como precisaremos más adelante. Según esto, podemos suponer que todo valor absoluto satisface la desigualdad triangular.

Ejemplo 2.2. Sean $K = \mathbb{Q}$ y $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Dado que $\mathbb{Z}$ es un dominio de factorización única y $\mathbb{Q}$ es su cuerpo de cocientes, todo número racional $x \neq 0$ se expresa de manera única en la forma

$$x = p^m \frac{a}{b},\ m \in \mathbb{Z},\ p \nmid a,\ p \nmid b.$$

Definimos

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-m}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dejamos al cuidado del lector verificar, como ejercicio, que $|\ |_p$ es un valor absoluto no arquimediano.

Ejemplo 2.3.

Sea $K = \mathbb{R}$. Entonces $|x|_\infty := \max\{x, -x\}$, el valor absoluto usual, es un valor absoluto arquimediano.

Dado un valor absoluto $|\ |$ sobre un cuerpo global K, podemos asociar a K la métrica $d : K \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definida por

$$d(x, y) := |x - y|, \text{ para todo } x, y \in K \ .$$

Se dice que la topología correspondiente a esta métrica es *inducida por el valor absoluto* $|\ |$.

Proposición 2.4. *Con respecto a la topología inducida por la métrica d, K es un cuerpo topológico. Esto es, K es un espacio tolopógico en el cual las operaciones adición, multiplicación y formación de inversos son funciones continuas.*

Dejamos la verificación de la anterior proposición como ejercicio al lector, sugiriéndole que para simplificar la demostración tenga en cuenta que las traslaciones y las dilataciones son homeomorfismos, así que para verificar la continuidad de la adición (respectivamente, de la multiplicación) basta mostrar que ella es continua en el punto $(0, 0)$ (respectivamente, en el punto $(1, 1)$). La razón para esto es que la topología de K (respectivamente, de $K^\times$) está completamente determinada por las vecindades de 0 (respectivamente, de 1). El lector podrá también consultar [**12**], por ejemplo.

Definición 2.5. Dados dos valores absolutos, $|\ |_1$, $|\ |_2$ sobre K, decimos que son *equivalentes* si inducen la misma topología sobre K.

Para nuestra conveniencia y la del lector, recordamos la noción de *completado* de cuerpo. Sea K un cuerpo con un valor absoluto $|\ |$.

Definición 2.6. El completado de K con respecto a $|\ |$ es el completado de K como espacio métrico. Más exactamente, el completado de K con respecto a $|\ |$ es el par ordenado $(\widehat{K}, \rho)$ consistente en un espacio métrico $\widehat{K}$ y una isometría $\rho : K \to \widehat{K}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\widehat{K}$ es un espacio métrico completo;

(ii) $\rho(K)$ es denso en $\widehat{K}$.

Recordemos que $\widehat{K}$ puede construirse a partir de las sucesiones de Cauchy con elementos en K.

El par $(\widehat{K}, \rho)$ está unívocamente determinado, salvo isometrías. En el caso especial que estamos considerando, el espacio métrico $\widehat{K}$ puede dotarse de una estructura de cuerpo topológico.

Definición 2.7. Un *cuerpo local no arquimediano* es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$ o de $\mathbb{F}_q((T))$.

Los cuerpos locales no arquimedianos se obtienen completando un cuerpo global con respecto a un valor absoluto no arquimediano.

Si K es un cuerpo local no arquimediano con valor absoluto $|\ |_K$, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_K &:= \{x \in K \ ; \ |x|_K \leq 1\}, \\ \mathfrak{p}_K &:= \{x \in K \ ; \ |x|_K < 1\} \ . \end{aligned}$$

El conjunto $\mathcal{O}_K$ es un anillo topológicamente cerrado, llamado el *anillo de los enteros* de K. Por otra parte, $\mathfrak{p}_K$ es un ideal maximal de $\mathcal{O}_K$. El cuerpo $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K$ se denominan el *cuerpo residual* de K. El siguiente resultado describe la estructura del anillo $\mathcal{O}_K$ y de sus ideales [**12**].

Teorema 2.8. *$\mathcal{O}_K$ es un subanillo compacto y abierto de K. Los ideales de $\mathcal{O}_K$ son de la forma $\mathfrak{p}_K^r$, $r \geq 1$, y son conjuntos a la vez compactos y abiertos. En particular, K es localmente compacto y totalmente discontinuo. Finalmente, $\mathfrak{p}_K$ es un ideal principal.*

De aquí resulta fácilmente que $\mathcal{O}_K^{\times}$, el conjunto de los elementos invertibles (o unidades) de $\mathcal{O}_K$, es igual a $\{x \in K \ ; \ |x|_K = 1\}$.

Un generador π del ideal principal $\mathfrak{p}_K$ se llama un *parámetro uniformador*. Podemos, pues, escribir $\mathfrak{p}_K = \pi\mathcal{O}_K$.

Sea $R \subseteq \mathcal{O}_K$ un sistema completo de representantes de las coclases de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ en $\mathcal{O}_K$. Un tal sistema se suele llamar también un *levantamiento* de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$. La escogencia de los elementos de R puede ser crucial en algunos aspectos de la teoría de los cuerpos locales no arquimedianos. Usualmente, se toman elementos de R a las raíces en $\mathcal{O}_K$ de la ecuación $X^q - X = 0$, donde $q = \mathrm{Card}[\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}_K]$. En este caso hablamos de representantes de Teichmüller.

El siguiente resultado nos será muy útil en lo que sigue [**12**].

Lema 2.9. *Si $x \in K$, entonces x puede escribirse unívocamente en la forma*

$$x = \sum_{j \geq r} b_j \pi^j \ , \quad b_j \in R.$$

Recíprocamente, toda serie de la forma anterior converge en K.

Los siguientes dos ejemplos desempeñan papeles centrales en nuestra exposición.

Ejemplo 2.10. Sea $k[[T]]$ el anillo de las series potenciales formales en la indeterminada T y coeficientes en un cuerpo finito k con q elementos. Sus elementos tienen la forma

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i = a_0 + a_1 T + \cdots + a_i T + \cdots \ , \qquad a_i \in k \ .$$

La *suma* de dos estas series se define por la fórmula

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i T^i := \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) T^i$$

y su producto por la fórmula de Cauchy

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i T^i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i T^i \ ,$$

donde

$$c_i := \sum_{j+k=i} a_j b_k \ .$$

Observemos que la inclusión $k \subset k[[T]]$ subsiste si identificamos cada elemento $a \in k$ con la serie $a + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2 + \cdots$. Usando directamente las definiciones, podemos comprobar fácilmente que la serie 0 es el elemento neutro para la adición y la serie 1 lo es para la multiplicación, y que las operaciones que hemos definido hacen de $k[[T]]$ un dominio unitario.

Definamos ahora la siguiente función:

$$v(x) = v\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i\Big) := \begin{cases} i \ \text{ si } a_0 = a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0 \text{ y } a_i \neq 0 \\ \infty \ \text{ si } x = 0 \ . \end{cases}$$

Evidentemente, v es una aplicación sobreyectiva de $k[[T]]$ sobre $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la cual tiene las siguientes propiedades:

(a) $v(xy) = v(x) + v(y)$.

(b) $v(x+y) \geq \text{mín}\ \{v(x), v(y)\}$ y $v(x+y) = \text{mín}\ \{v(x), v(y)\}$ si, y sólo si, $v(x) \neq v(y)$.

(c) $v(x) = 0$ si, y sólo si, x es una unidad del anillo $k[[T]]$.

(d) $v(0) = \infty$.

La aplicación v se denomina una *valuación* de $k[[T]]$.

Observación. En general, una aplicación sobreyectiva v de un dominio entero A sobre $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ que satisfaga las propiedades (a), (b), c), (d) se denonomina una valuación de A, y la pareja (A, v) se denomina *un anillo de valuación discreta*.

Verificaremos ahora las anteriores propiedades en el caso $A = k[[T]]$. Usando las definiciones del producto y la suma de series formales, es fácil comprobar que v satisface (a) y (b). Veamos que satisface (c). En primer lugar, observemos que $v(1) = 0$. Por lo tanto, si $x^{-1} \in k[[T]]$, tenemos que $v(1) = v(xx^{-1}) = v(x) + v(x^{-1}) = 0$, lo cual implica que $v(x) = 0$. Recíprocamente, si $v(x) = 0$ (con lo que forzosamente tenemos $a_0 \neq 0$), entonces $x = a_0(1 + y)$, donde y es una serie formal sin término constante. Pero

$$(1 + y)^{-1} = \frac{1}{1 + y} = 1 - y + y^2 - \cdots + (-1)^r y^r + \ldots$$

es nuevamente una serie potencial formal. En consecuencia, $x^{-1} = a_0^{-1}(1 + y)^{-1}$.

El cuerpo de fracciones $k((T))$ de $k[[T]]$ está conformado por las llamadas *series de Laurent* (o *series formales meromorfas*)

$$k((T)) := \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} a_i T^i \ ; \quad a_i \in k \right\}$$

donde $a_i = 0$ para $i < 0$, salvo para un número finito de índices.

La valuación v se extiende naturalmente al cuerpo de cocientes $k((T))$ de $k[[T]]$.

Definimos ahora

$$|x|_v := q^{-v(x)} \ , \quad x \in k((T)) \ .$$

A partir de las propiedades (a), (b), (c), (d) de la aplicación v que hemos verificado anteriormente, se deduce que $|\ |$ define un valor absoluto no arquimediano sobre $k((T))$ y, por consiguiente, que $k((T))$ es cuerpo topológico.

Observación. Si $|\ |$ es un valor absoluto no arquimediano sobre un cuerpo K, $\log |\ |$ define una valuación sobre K.

Por otra parte, $v(T) = 1$, de modo que el ideal maximal del anillo $k[[T]]$ es el ideal principal $Tk[[T]]$. Si definimos el homomorfismo de anillos $\varphi : k[[T]] \to k$ por $\varphi\big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \big) = a_0$, vemos que $\ker \varphi = (T)$. Por consiguiente, usando el primer teorema de isomorfía de los anillos, obtenemos que

$$k[[T]]/(T) \approx k \ .$$

En consecuencia, k es el cuerpo residual de $k[[T]]$ para la valuación v. Además, k es un sistema completo de representantes de $k[[T]]/(T)$. Dejamos como ejercicio al lector comprobar que el cuerpo $k((T))$ es completo.

Ejemplo 2.11. Cuando en el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros ordinarios se tiene $p^n|a$ pero $p^{n+1} \nmid a$, escribimos $p^n \parallel a$. Dicho esto, para cada primo p vamos a tratar de construir una valuación v_p del anillo $\mathbb{Z}$, empezando de la siguiente manera:

$$v_p(a) := n(a) = n \quad \text{si} \quad p^n \parallel a \;.$$

Si $p^n \parallel a$ y $p^m \parallel b$, es claro que $p^{n+m} \parallel ab$, o sea, que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Si $n < m$, también es claro que $p^n \parallel (a+b)$, luego $v_p(a+b) = \text{mín}\,\{v_p(a), v_p(b)\} = n$. Ahora, si $n = m$, sabemos que $p^n|(a+b)$, pero posiblemente una mayor potencia de p puede aún dividir a $(a+b)$. Entonces $v_p(a+b) \geq \text{mín}\,\{v_p(a), v_p(b)\}$. Hemos, pues, demostrado las propiedades (a) y (b) de las valuaciones.

Sin embargo, (c) no es válida en $\mathbb{Z}$ para v_p, pues si q es un primo distinto de p entonces $v_p(q) = 0$, pero q no es invertible en $\mathbb{Z}$. El que v_p no satisfaga (c) expresa sencillamente el hecho de que en $\mathbb{Z}$ no hay suficientes unidades: $\mathbb{Z}^\times = \{-1, +1\}$.

Esta situación llevó a Kurt Hensel a introducir un anillo más grande que $\mathbb{Z}$, en el cual se satisfaga (iii). La idea de Hensel fue tomar el anillo

$$A_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;;\; a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\},$$

el cual claramente contiene a $\mathbb{Z}$, y definir $\overline{v}_p(a/b) := v_p(a)$ en $A_{(p)}$. En $A_{(p)}$ todo primo q de $\mathbb{Z}$, distinto de p, es ahora una unidad.

Observación. Los lectores familiarizados con el proceso de localización de un anillo en uno de sus ideales primos pueden reconocer que $A_{(p)}$ es precisamente la localización de $\mathbb{Z}$ en el ideal $(p) = p\mathbb{Z}$.

Esta "extensión" de v_p satisface (a), (b) y también (c). En efecto, si u es una unidad, sabemos que $\overline{v}_p(u) = 0$. Supongamos, recíprocamente, que $\overline{v}_p(x) = \overline{v}_p(a/b) = 0$. Esto significa que $p \nmid a$, es decir, $b/a \in A_{(p)}$ y, por lo tanto, x es una unidad de $A_{(p)}$. Entonces, si hacemos $\overline{v}_p(0) = \infty$, $(A_{(p)}, \overline{v}_p)$ es un anillo de valuación discreta. Como $\overline{v}_p(p) = 1$, p es un parámetro uniformador de $A_{(p)}$. De nuevo construimos un valor absoluto no arquimediano sobre $A_{(p)}$ tomando para cada $x \neq 0$, $|x| = p^{-\overline{v}_p(x)}$.

Es posible demostrar que, para todo $n \geq 1$, $A_p/p^nA_p = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, donde $p^nA_{(p)}$ es el ideal generado por p^n en $A_{(p)}$. En virtud de este resultado, podemos tomar como sistema de representantes al conjunto de enteros $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Existe una diferencia esencial entre $k[[T]]$ y $A_{(p)}$. El primero es un anillo de característica positiva y su cuerpo residual k está contenido en $k[[T]]$, mientras que $A_{(p)}$ es un anillo de característica cero, $\mathbb{Z} \subseteq A_{(p)}$ y su cuerpo residual es un cuerpo finito con p elementos, el cual no está contenido en $A_{(p)}$. Adicionalmente, $k[[T]]$ es un anillo completo, mientras que $A_{(p)}$ no lo es. El completado de este anillo se denomina el *anillo de los enteros p-ádicos* y se denota con $\mathbb{Z}_p$, y su cuerpo de cocientes, el *cuerpo de los números p-ádicos*, con $\mathbb{Q}_p$.

§ 3. La medida de Haar

En esta sección presuponemos un conocimiento básico de la teoría general de la integración. Nuestro propósito es presentar, sin demostraciones, ciertos hechos relacionados con la medida de Haar sobre los grupos localmente compactos, que usaremos más adelante. Esta sección está basada en las referencias [**12**], [**17**].

Recordemos, en primer lugar, que un grupo topológico G es un grupo (para una operación que denotamos por el momento multiplicativamente) en el que se ha definido una topología para la cual la operación $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, y la formación de inversos $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$, son funciones continuas.

Si G es un grupo topológico conmutativo y localmente compacto, se puede demostrar la existencia sobre G de una medida no nula μ que cumple las condiciones siguientes:

(1) Las funciones continuas de valor complejo y soporte compacto son μ-integrables.

(2) La medida μ es invariante por traslaciones; es decir,

$$\int_G f(g)d\mu(g) = \int_G f(xg)d\mu(g), \quad x \in G ,$$

para todas las funciones f que sean μ-integrables.

Esta medida es única salvo por múltiplos constantes positivos, y se le llama *medida de Haar*.

Si μ es una medida de Haar sobre G, entonces, para todo conjunto μ-medible $A \subseteq G$ y todo $x \in G$, tenemos que

$$\mu(A) = \mu(xA) \ . \tag{1}$$

Además, todo conjunto de Borel de G es μ-medible. También, si $A \subseteq G$ es abierto y no vacío, $\mu(A) > 0$, y si A es compacto, $\mu(A)$ es finito.

Sean G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar sobre G y σ un automorfismo algebraico y topológico de G. Si $A \subset G$ es μ-medible, también lo es $\sigma(A)$. Para cada automorfismo σ de G podemos entonces definir una nueva medida μ' sobre G mediante la relación

$$\mu'(A) = \mu(\sigma(A)), \quad A \text{ conjunto } \mu\text{- medible.} \tag{2}$$

Es fácil verificar que μ' es una medida de Haar que difiere de μ por una constante positiva. Esta constante se conoce como el *módulo del automorfismo* σ, y lo denotamos con $\text{mód}_G(\sigma)$. Por consiguiente, el módulo de σ queda caracterizado por la ecuación

$$\mu' = \text{mód}_G(\sigma)\mu \ . \tag{3}$$

Es claro entonces que el módulo es independiente de la escogencia original de la medida de Haar. Si G es compacto, entonces G es μ-medible y $\sigma(G) = G$ para todo automorfismo. Por consiguiente, en este caso, $\text{mód}_G(\sigma) = 1$ para todo automorfismo σ. Si G es discreto, entonces $\{e\}$ es μ-medible (e es la unidad de G) y $\sigma(e) = e$ para todo automorfismo σ. Por lo tanto, si G es discreto, $\text{mód}_G(\sigma) = 1$ para todo automorfismo σ.

Sean ahora K un cuerpo local no arquimediano, $\mathcal{O}_K$ su subanillo compacto maximal, $\mathfrak{p}_K = \{x \in K \ ; \ |x|_K < 1\} = \pi\mathcal{O}_K$ el único ideal de $\mathcal{O}_K$, donde π es un parámetro uniformador. Sabemos (véase la sección 2) que $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K = \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ tiene q elementos, donde q es alguna potencia de un primo p.

Para una medida de Haar μ sobre el grupo aditivo del cuerpo K, usaremos la notación dx_K. Como $\mathcal{O}_K$ es compacto, es un conjunto $\mu-$medible. Para nuestros propósitos usaremos la medida de Haar sobre K que satisface $\mu(\mathcal{O}_K) = 1$. Por lo tanto, escribiremos (1) así:

$$\mu(A) = \mu(x + A) \ .$$

Ahora bien, $\mathcal{O}_K$ admite la siguiente descomposición como unión disyunta de un número finito de clases de equivalencia:

$$\mathcal{O}_K = \bigsqcup_{a \in \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K} (\mathfrak{p}_K + a).$$

Usando la aditividad de μ y el hecho de que μ es invariante por traslaciones, lo que en este caso significa que $\mu(\mathfrak{p}_K + a) = \mu(\mathfrak{p}_K)$, podemos entonces escribir

$$1 = \mu(\mathcal{O}_K) = \sum_{a \ \text{mód}\, \mathfrak{p}_K} \mu(\mathfrak{p}_K + a) = \mu(\mathfrak{p}_K)[\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}_K],$$

donde $[\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}_K] = q$ designa la cardinalidad de $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K$. Hemos, pues, demostrado que $\mu(\mathfrak{p}_k) = q^{-1}$.

De manera general, si denotamos con $[\mathfrak{p}_K^{n-1} : \mathfrak{p}_K^n]$, $n \in \mathbb{Z}$, el cardinal del grupo $\mathfrak{p}_K^{n-1}/\mathfrak{p}_K^n$, tenemos que

$$\mu(\mathfrak{p}^n) = \begin{cases} \dfrac{1}{[\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}_K^n]} & = \dfrac{1}{[\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}_K][\mathfrak{p}_K : \mathfrak{p}_K^2] \ldots [\mathfrak{p}_K^{n-1} : \mathfrak{p}_K^n]} \text{ para } n \geq 0 \\ [\mathfrak{p}_K^n : \mathcal{O}_K] & = [\mathfrak{p}_K^n : \mathfrak{p}_K^{n+1}] \ldots [\mathfrak{p}_K^{-1} : \mathcal{O}_K] \text{ para } n \leq 0 \end{cases}$$

de lo cual

$$\mu(\mathfrak{p}^n) = q^{-n}. \tag{4}$$

Consideremos ahora $a \in K$. Sabemos que $a\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_K^{v(a)} = \pi^{v(a)}\mathcal{O}_K$. Por otra parte, si $a \in K^\times$y si $\sigma_a : K \to K$ es el automorfismo (algebraico y topológico) $x \mapsto ax$, $x \in K$, podemos considerar la medida μ' asociada con este automorfismo, de manera que será $\mu'(A) = \operatorname{mód}(\sigma_a)\mu(A)$ para todo conjunto medible A. En particular,

$$\frac{\mu\left(\mathfrak{p}_K^{v(a)}\right)}{\mu\left(\mathcal{O}_K\right)} = \frac{\mu\left(a\mathcal{O}_K\right)}{\mu\left(\mathcal{O}_K\right)} = \operatorname{mód}(\sigma_a) = \mu\left(\mathfrak{p}_K^{v(a)}\right) = q^{v(a)} = |a|_K \ . \tag{5}$$

De ahí que $\operatorname{mód}(\sigma_a)$ haya recibido el nombre de módulo.

Recordemos que el grupo $\mathcal{O}_K^\times$ de las unidades de $\mathcal{O}_K$ es precisamente $\mathcal{O}_K \smallsetminus \mathfrak{p}_K = \{x \in K \ ; \ |x|_K = 1\}$. Por consiguiente,

$$\mu(\mathcal{O}_K^\times) = \mu(\mathcal{O}_K) - \mu(\mathfrak{p}_K) = 1 - q^{-1} \ . \tag{6}$$

Como $K^\times = K \smallsetminus \{0\}$ resulta ser también un grupo localmente compacto multiplicativo, existe también una medida de Haar $\mu^\times$, la cual suponemos normalizada en forma tal que $\mu^\times(\mathcal{O}_K^\times) = 1$. Afirmamos que esta medida es igual a la medida

$$A \mapsto \int_A \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{dx}{|x|_K}. \tag{7}$$

Para verificar esta afirmación demostramos primero que la medida definida en (7) es una medida invariante para la multiplicación de $K^\times$.

En efecto, si $\alpha \in K^\times$, haciendo el cambio de variables $x = \alpha z$ en

$$\int_{\alpha A} \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{dx}{|x|_K}$$

y teniendo en cuenta (4), obtenemos que

$$\int_{\alpha A} \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{dx}{|x|_K} = \int_A \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{|\alpha|_K dz}{|\alpha|_K |z|_K} = \int_A \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{dx}{|x|_K} .$$

Esto es, (7) define en el grupo $K^\times$ una medida invariante para la multiplicación. Como la medida de Haar está únivocamente determinada salvo por múltiplos positivos, tenemos que la medida definida en (7) es un múltiplo de la medida $\mu^\times$. Por otra parte,

$$\int_{\mathcal{O}_K^\times} \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{dx}{|x|_K} = \frac{1}{1-q^{-1}} \int_{\mathcal{O}_K^\times} dx = 1.$$

Entonces, $\mu^\times$ es igual a la medida definida en (7). Este hecho se expresa simbólicamente en la forma

$$d\mu^\times(x) = \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{dx}{|x|_K} \quad . \tag{8}$$

§ 4. Funciones zeta locales de Igusa

En esta sección presentamos las definiciones y resultados básicos relativos a las funciones zeta locales. Sean K un cuerpo local no arquimediano, $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros, $\mathfrak{p}_K$ el ideal maximal de $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K \cong \mathbb{F}_q$ el cuerpo residual (donde $\mathbb{F}_q$ es el cuerpo finito con q elementos) y π un parámetro uniformador fijo.

Se dice que una función $\Phi : K^n \to \mathbb{C}$ es *localmente constante*, si para todo punto $x \in K^n$ existe una vecindad de x en la cual Φ es constante. Con otras palabras, si existe $r \in \mathbb{N}$, dependiente de x, tal que $\Phi(x) = \Phi(y)$ si $y - x \in \mathfrak{p}_K^r \times .... \times \mathfrak{p}_K^r$ (n veces). Por otra parte, se dice que Φ tiene *soporte compacto*, si la clausura topológica del conjunto $\{x \in K^n \ ; \ f(x) \neq 0\}$ es un subconjunto compacto de K^n. Si $\Phi : K^n \to \mathbb{C}$ es a la vez localmente constante y de soporte compacto, decimos que Φ es una *función de Schwartz-Bruhat*. Denotamos con $\mathcal{S}(K^n)$ al conjunto de estas funciones.

Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, un polinomio no constante, y $\Phi \in \mathcal{S}(K^n)$.

Sea $\chi : \mathcal{O}_K^\times \to \mathbb{C}^\times$ un carácter de $\mathcal{O}_K^\times$, esto es, un homomorfismo continuo de $\mathcal{O}_K^\times$ en el grupo de los números complejos de norma 1 cuya imagen sea finita. Formalmente, hacemos $\chi(0) = 0$.

Si $z \in K$, $z = u\pi^{v(z)}$ y $u \in \mathcal{O}_K^\times$, escribimos $u = ac(z)$. Este valor lo llamamos la *componente angular* de z.

A χ, f y Φ asociamos la función zeta local, que llamamos de Igusa,

$$Z_\Phi(s,\chi,f) = Z_\Phi(s,\chi,K,f) = \int_{K^n} \Phi(x)\chi(acf(x))|f(x)|_K^s dx \ , \tag{1}$$

para $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$, donde dx denota la medida de Haar sobre K^n, normalizada de tal manera que $\mathcal{O}_K^n$ tenga medida 1. La integral (1) converge para $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Estas funciones fueron introducidas por André Weil (véase, por ejemplo, [**23**]) y sus propiedades para polinomios arbitrarios fueron estudiadas por Igusa [**14**, **15**, **16**, **17**, **20**] cuando K tiene característica 0. El tipo más simple de estas funciones tiene la forma

$$Z(s,f) = \int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s dx \ . \tag{2}$$

Para $\mathrm{Re}(s) > 0$, la integral anterior converge, pues el valor absoluto complejo del integrando es menor que 1 y la medida de $\mathcal{O}_k^n$ es 1. Dejamos al lector la verificacion de que en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$, la función $Z(s,f)$ es holomorfa en s; le sugerimos demostrar que la derivada con respecto a $\overline{s}$, el conjugado complejo de s, es nula. Esto se logra mediante un bien conocido resultado sobre la derivación de una integral con respecto a un parámetro.

El presente trabajo está consagrado al estudio de las funciones zeta locales del tipo (1) en casos particulares. Como lo indicamos en la introducción, estas funciones están relacionadas con el número de soluciones de congruencias módulo π^n y con las sumas exponenciales módulo π^n. Nosotros estamos particularmente interesados en su relación con el número de soluciones de congruencias módulo π^n.

Nos interesa, pues, saber con exactitud cuál es esta relación. Para ello, sea N_m el número de soluciones de $f(x) \equiv 0 \,(\text{mód}\, \pi^m)$ en $\mathcal{O}_K/\pi^m\mathcal{O}_K$, y consideremos la llamada *serie de Poincaré* asociada a $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$,

$$P(t) := \sum_{m=0}^{\infty} N_m (q^{-n}t)^m \ ,$$

donde n es el número de variables del polinomio. La siguiente proposición proporciona la relación que buscamos.

Proposición 4.1. *Si* $t = q^{-s}$ *, entonces*

$$Z(f,s) = P(t) - t^{-1}(P(t) - 1) \tag{3}$$

Demostración. Tenemos la siguiente partición de $\mathcal{O}_K^n \smallsetminus f^{-1}(0)$:

$$f^{-1}(\mathcal{O}^{\times}) \cup (f^{-1}(\mathfrak{p}_K) \smallsetminus f^{-1}(\mathfrak{p}_K^2)) \cup \cdots \cup (f^{-1}(\mathfrak{p}_K^k) \smallsetminus f^{-1}(\mathfrak{p}_K^{k+1})) \cup \ldots$$

Por otra parte, el conjunto $f^{-1}(\mathfrak{p}_K^i)$ puede descomponerse como una unión disyunta de N_i conjuntos de la forma

$$(x_1^0, \ldots, x_n^0) + \overbrace{\mathfrak{p}_K^i \times \cdots \times \mathfrak{p}_K^i}^{n \text{ veces}}$$

donde $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ es una de las N_i soluciones de la congruencia $f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^n}$. Como la medida de Haar es invariante bajo traslaciones, tenemos que la medida de $f^{-1}(\mathfrak{p}_K^i)$ es N_i veces la medida del conjunto

$$\overbrace{\mathfrak{p}_K^i \times \cdots \times \mathfrak{p}_K^i}^{n \text{ veces}},$$

la cual, a su vez, es igual a q^{-ni}. De todo lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} Z(f,s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{f^{-1}(\mathfrak{p}_K^i) \smallsetminus f^{-1}(\mathfrak{p}_K^{i+1})} |f(x)|^s dx = \sum_{i=0}^{\infty} q^{-is} \mu \left(f^{-1}(\mathfrak{p}_K^i) \smallsetminus f^{-1}(\mathfrak{p}_K^{i+1}) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} q^{-is} \left(N_i q^{-ni} - N_i q^{-n(i+1)} \right) = P(t) - t^{-1} \left(P(t) - 1 \right) . \quad \boxtimes \end{aligned}$$

En [**15**], Igusa estableció el siguiente resultado básico en la teoría de las funciones zeta locales.

Teorema 4.2. *Si K es un cuerpo de números $p-$ádicos, $Z_{\Phi}(s, \chi, f)$ admite una prolongación meromorfa a todo $\mathbb{C}$, la cual es una función racional de q^{-s}.*

En su demostración, Igusa hace uso del teorema de resolución de singularidades de Hironaka [**13**], el cual, hasta el momento, no tiene contrapartida en característica distinta de cero. Más tarde, Denef [**5**, **10**] dio una demostración del Teorema 4.2 sin usar resolución de singularidades. En ella usó *eliminación de cuantificadores* en $\mathbb{Q}_p$. Esta demostración no puede extenderse al caso de característica > 0, pues hasta ahora no se dispone de una teoría de la eliminación de cuantificadores en anillos suficientemente generales. Recientemente, A. J. de Jong estableció una generalización débil del teorema de Hironaka en característica positiva. Sin embargo, hasta donde entendemos, este resultado no es suficiente para que la demostración de Igusa se generalice a característica positiva. Adicionalmente mencionamos que a un número finito de polinomios, con coeficientes en un cuerpo local no arquimediano, es posible asociar una función zeta local, la cual es de nuevo una función racional de q^{-s}. Este resultado fue primero establecido por MEUSSER [**22**], y luego por DENEF, en un ámbito mucho más general [**5**], [**10**].

El análogo arquimediano del Teorema 4.2 fue estudiado por M. ATIYAH, I.M. GELFAND, I.N. BERSTEIN (véase, por ejemplo, [**3**]).

Por otro lado, en [**4**], BORIÉVICH y SHAFARIÉVICH conjeturaron que en el caso de que K fuese un cuerpo de números $p-$ádicos, la serie de Poincaré $P(t)$ asociada con un polinomio $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ era una función racional. Esta conjetura es hoy una consecuencia directa del Teorema 4.2 y de la Proposición 4.1.

Los polos de $P(t)$, o lo que es esencialmente lo mismo, los de $Z(s, f)$, controlan el comportamiento asintótico de los coeficientes N_m, tal como lo expresa la siguiente proposición.

Proposición 4.3.

$$\text{lím sup}_{i\to\infty} N_i^{1/i} \leq q^{n+\alpha}$$

donde $\alpha = \text{máx}\,\{\text{Re}(s)\ ;\ s \text{ es polo de } P(q^{-s})\}$.

Demostración. IGUSA [15] demostró que los polos de $Z(s, f)$ son de la forma

$$-\frac{\nu_i}{M_i} + \frac{2\pi\imath k}{M_i \log_e q}\ ,$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y los (ν_i, M_i) son datos numéricos asociados con la resolución de singularidades de la hipersuperficie definida por el polinomio $f(x)$. En consecuencia, usando el teorema de IGUSA y la Proposición 4.1, tenemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} N_i q^{-ni}(q^{-s})^i = \frac{R(q^{-s})}{(1-q^{-1-s})\prod_i (1-q^{-M_i s-\nu_i})}\ , \tag{4}$$

donde $R(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Cada factor de la forma $\dfrac{1}{1-q^{-M_i s-\nu_i}}$ da lugar a una serie geométrica que converge uniforme y absolutamente cuando

$$q^{-Re(s)} < q^{\nu_i/M_i}\ ,$$

de modo que la serie obtenida desarrollando en serie de potencias de q^{-s} el miembro derecho de (4) converge uniforme y absolutamente cuando

$$q^{-Re(s)} < q^{\text{mín}_i\{\nu_i/M_i\}} = q^{-\text{máx}_i\{-\nu_i/M_i\}} = q^{-\alpha}\ .$$

Ahora bien, el criterio de la raíz asegura que el radio de convergencia de la serie que aparece en el miembro izquierdo debe ser mayor o igual a $q^{-\alpha}$, es decir, que

$$\text{lím sup}_{i\to\infty} \left(N_i q^{-ni}\right)^{1/i} \leq q^{\alpha}$$

lo que implica que

$$\text{lím sup}_{i\to\infty} N_i^{1/i} \leq q^{n+\alpha} \ . \quad ☑$$

Como consecuencia de la anterior proposición tenemos que si $i \gg 0$ entonces $N_i \leq q^{i(n+\alpha)}$

Para un panorama más amplio y profundo de la teoría de las funciones zeta locales que el que hemos mostrado aquí, recomendamos al lector las referencias [**6**, **17**, **20**].

Terminamos esta sección repitiendo que el considerar la conjetura de Boriévich y Shafariévich en característica positiva ha sido el motivo que nos ha llevado al estudio de esta interesante teoría.

§ 5. La fórmula de la fase estacionaria para integrales π-ádicas

En [**18**], Igusa introdujo una fórmula, que denominó *fórmula de la fase estacionaria para integrales π-ádicas*, la cual permite calcular explícitamente en muchos casos las funciones zeta locales $Z(s, f)$. En el artículo mencionado, Igusa sugirió que un estudio de su fórmula podría conducir a una nueva demostración de la racionalidad de las funciones $Z(s, f)$ válida en cualquier característica. En [**19**], Igusa usó también está fórmula en el cálculo explícito de las funciones zeta locales de ciertos espacios prehomogéneos. Animado por la sugerencia de Igusa, el segundo autor estudió el problema de la racionalidad de las funciones zeta locales $Z(s, f)$ de polinomios semicuasihomogéneos en característica arbitaria [**24**] y, más recientemente, el de la racionalidad de las funciones zeta locales $Z(\chi, s, f)$ asociadas con polinomios no degenerados con respecto a su *poliedro* de Newton [**25**], logrando dar una descripción detallada de sus polos (ver también [**7**], [**8**], [**9**]).

La presente sección tiene como propósito presentar una demostración elemental de la fórmula de la fase estacionaria de Igusa e ilustrar su uso en el cálculo explícito de varias funciones zeta locales. La presentación se basa en [**24**].

Empezamos por explicar el por qué del nombre "fórmula de la fase estacionaria". Las integrales oscilantes del tipo

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \exp\left(\lambda\sqrt{-1} f(x)\right) dx \ , \tag{1}$$

tienen un papel importante en la física matemática, y el comportamiento asintótico de las mismas, es decir, el comportamiento de su magnitud para valores grandes del parámetro λ, constituye un problema clásico con muchas aplicaciones prácticas. El principio de la fase estacionaria (véase, por ejemplo, [**2**]) establece que la contribución más importante al desarrollo asintótico de las integrales del tipo (1) proviene de los puntos críticos o singulares de la fase $f(x)$, esto es, de los puntos que satisfacen $f(x) = 0$, $\nabla f(x) = 0$.

Como contraparte, si K es un cuerpo local no arquimediano, podemos considerar la función zeta

$$Z_\Phi(s, f) = \int_{K^n} \Phi(x)|f(x)|^s dx \ , \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \ , \tag{2}$$

donde $f(x)$ es una función K-analítica, Φ es una función de Schwartz-Bruhat y dx es una medida de Haar sobre K^n. Bajo una interpretación adecuada, las integrales (1) y (2) resultan ser realizaciones diferentes de un mismo objeto matemático. En [**18**], Igusa da una fórmula que permite calcular en ciertos casos las integrales $Z(s, f)$. Por analogía con el método clásico de la fase estacionaria (donde $K = \mathbb{R}^n$), Igusa llamó al suyo *método de la fase estacionaria para integrales π-ádicas*. A continuación pasamos a describir este método.

Denotemos con $\overline{x}$ la imagen de un elemento $x \in \mathcal{O}_K$ por el homomorfismo canónico $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \approx \mathbb{F}_q$. Con otras palabras, $\overline{x}$ es la reducción módulo π de x. Dado un polinomio $f(x)$ cuyos coeficientes no están todos en $\pi\mathcal{O}_K$, denotemos con $\overline{f}(x)$ al polinomio obtenido reduciendo módulo π los coeficientes de $f(x)$ y con $\mathrm{Sing}_f(K)$ (respectivamente, $\mathrm{Sing}_f(\mathbb{F}_q)$) al conjunto de los puntos singulares en K^n (respectivamente, $\mathbb{F}_q^n$)) de la hipersuperficie definida por el polinomio $f(x) \in K[x]$ (respectivamente, $\overline{f}(x) \in F_q[[x]]$). Es decir,

$$\mathrm{Sing}_f(K) = \left\{ P \in K^n \ ; \ f(P) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0, i = 1, \ldots, n \right\} \ ,$$

$$\mathrm{Sing}_f(\mathbb{F}_q) = \left\{ P \in \mathbb{F}_q^n \ ; \ \overline{f}(P) = 0, \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(P) = 0, i = 1, \ldots, n \right\} \ ,$$

donde ∂/∂_i denota la derivada parcial formal usual.

Fijemos un levantamiento R de $\mathbb{F}_q$ en $\mathcal{O}_K$, es decir, un sistema de representantes de $\mathbb{F}_q$ en $\mathcal{O}_K$. Sean $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ un polinomio en n variables y $P_1 = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{O}_K^n$. La función

$$f_{P_1}(x) := \pi^{-e_{p_1}} f(P_1 + \pi x) \ ,$$

donde e_{p_1} es el mínimo orden de π en los coeficientes de $f(P_1+\pi x)$, se llama la *dilatación* de $f(x)$ en P_1. Inductivamente definimos $e_{P_1},\ldots,e_{P_k}$ y $f_{P_1\ldots P_k}(x)$ por

$$f_{P_1\ldots P_k}(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } k=0; \\ \\ \pi^{-e_{P_1\ldots P_k}}f_{P_1\ldots P_{k-1}}(P_k+\pi x)\,,\text{si } k\geq 1. \end{cases}$$

Sea $\overline{E}$ un subconjunto de $\mathbb{F}_q^n$ y sea E su preimagen bajo el homomorfismo canónico $\mathcal{O}_K\to\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K\approx\mathbb{F}_q$. Sea $S(f,E)$ el subconjunto de R^n (el conjunto de los representantes de $\mathbb{F}_q^n$ en $\mathcal{O}_K^n$) que se aplica biyectivamente sobre el conjunto $\mathrm{Sing}_f(\mathbb{F}_q)\cap\overline{E}$. Definamos también

$$\begin{aligned}\nu&=\nu(\overline{f})=q^{-n}\mathrm{Card}\{\overline{P}\in\overline{E}\ ;\ \overline{f}(\overline{P})\neq 0\}\\ \sigma&=\sigma(\overline{f})\\ &=q^{-n}\mathrm{Card}\left\{\overline{P}\in\overline{E}\ ;\ \overline{f}(\overline{P})=0,\frac{\partial\overline{f}}{\partial x_i}(\overline{P})\neq 0,\text{para algún } i=1,\ldots,n\right\}.\end{aligned}$$

Con todo esto podemos escribir la fórmula de la fase estacionaria de Igusa.

Lemma 5.1. (Fórmula de la fase estacionaria de Igusa)

$$\int_E|f(x)|^s dx=\nu+\sigma\frac{(1-q^{-1})q{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})}+\sum_{P\in S(f,E)}q^{-n-e_p s}\int_{\mathcal{O}_K^n}|f_P(x)|_K^s dx \quad (3)$$

Demostración. Comencemos observando que $\overline{E}$ es la unión disyunta de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\overline{E}_\nu&:=\{\overline{P}\in\overline{E}\ ;\ \overline{f}(\overline{P})\neq 0\}\ ,\\ \overline{E}_\sigma&:=\left\{\overline{P}\in\overline{E}\ ;\ \overline{f}(\overline{P})=0,\frac{\partial\overline{f}}{\partial x_i}(\overline{P})\neq 0,\text{ para algún } i=1,\ldots,n\right\}\ ,\\ \overline{E}_{S(f,E)}&:=\left\{\overline{P}\in\overline{E}\ ;\ \overline{f}(\overline{P})=0,\frac{\partial\overline{f}}{\partial x_i}(\overline{P})=0,\text{para todo } i=1,\ldots,n\right\}\ .\end{aligned}$$

Por otro lado, puesto que E es la preimagen de $\overline{E}$ bajo el homomorfismo canónico $\mathcal{O}_K\to\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K\approx\mathbb{F}_q$, E es la unión disyunta de las preimágenes de los conjuntos $\overline{E}_\nu$, $\overline{E}_\sigma$, $\overline{E}_{S(f,E)}$. Esto es, E es la unión disyunta de los conjuntos

$$\begin{aligned}E_\nu&:=\{P\in E\ ;\ \overline{P}\in\overline{E}_\nu\}\ ,\\ E_\sigma&:=\{P\in E\ ;\ \overline{P}\in\overline{E}_\sigma\}\ ,\\ E_{S(f,E)}&:=\{P\in E\ ;\ \overline{P}\in\overline{E}_{S(f,E)}\}\ .\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$Z(s,f)=\int_E |f(x)|^s dx=\int_{E_\nu} |f(x)|^s dx+\int_{E_\sigma} |f(x)|^s dx+\int_{E_{S(f,E)}} |f(x)|^s dx \ .$$

A continuación calculamos las dos primeras integrales de la igualdad anterior. La tercera da origen al término sumatorio sobre el conjunto $S(f,E)$ en (3). Para calcular la integral sobre el conjunto E_ν, procedemos como sigue. Primero observemos que

$$E_\nu=\bigsqcup_{\overline{P}\in\overline{E_\nu}} \left(P+(\pi\mathcal{O}_K)^n\right),$$

donde P es el representante correspondiente a $\overline{P}$ y la unión es disyunta. Entonces,

$$\int_{E_\nu} |f(x)|^s dx=\sum_{\overline{P}\in\overline{E_\nu}} \int_{P+(\pi\mathcal{O}_K)^n} |f(x)|^s dx=\sum_{\overline{P}\in\overline{E_\nu}} q^{-n}\int_{\mathcal{O}_K} |f(P+\pi x)|^s dx \ .$$

Ahora, mediante la fórmula de Taylor, obtenemos que

$$f(P+\pi x)=f(P)+\pi\sum_i \frac{\partial\overline{f}}{\partial x_i}(\overline{P})x_i \,(\operatorname{mód}\pi^2) \ .$$

Por otro lado, de la definición del conjunto E_ν se tiene que $\overline{f(P)}\neq 0$, esto es, que $f(P+\pi x)\in\mathcal{O}_K^\times$ para cualquier $x\in\mathcal{O}_K^\times$. Por consiguiente, $|f(P+\pi x)|=|f(P)|=1$. En conclusión,

$$\int_{E_\nu} |f(x)|^s dx=q^{-n}\operatorname{Card}(\overline{E_\nu}) \ .$$

Calculemos ahora la integral sobre E_σ. Consideremos los conjuntos

$$E_{\sigma,i}:=\{P\in E_\sigma \,|\, f(P)\in(\mathfrak{p}_K^i)^n\},\ \ i\geq 1.$$

Se tiene que

$$E_\sigma=\bigsqcup_{i\geq 1}\left(E_{\sigma,i}\smallsetminus E_{\sigma,i+1}\right),$$

donde la unión es disyunta.

La siguiente afirmación se usará a continuación. Su demostración se presentará una vez concluyamos la demostración en curso.

Afirmación.

$$Card\ (E_{\sigma,i}\, mod\, (\mathfrak{p}_K^i)^n) = q^{(n-1)(i-1)}Card(\overline{E}_\sigma),\ \ i \geq 1. \tag{4}$$

Usando esta afirmación y lo demostrado anteriormente, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{E_\sigma} |f(x)|^s dx &= \sum_{i\geq 1} \int_{E_{\sigma,i}\smallsetminus E_{\sigma,i+1}} |f(x)|^s dx = \sum_{i\geq 1} q^{-is} \left(\int_{E_{\sigma,i}\smallsetminus E_{\sigma,i+1}} dx \right) \\ &= \sum_{i\geq 1} q^{-is} \left(\int_{E_{\sigma,i}} dx - \int_{E_{\sigma,i+1}} dx \right) . \end{aligned} \tag{5}$$

Para calcular $\int_{E_{\sigma,i}} dx$, observemos que el conjunto $E_{\sigma,i}$ es unión disyunta de clases módulo π^i y, dado que la medida dx es invariante bajo traslaciones,

$$\int_{E_{\sigma,i}} dx = \mathrm{Card}(E_{\sigma,i}(\text{ mód } \pi^i))q^{-in}. \tag{6}$$

Ahora bien, de la relación anterior y de la afirmación (5) resulta que

$$\int_{E_{\sigma,i}} dx = \mathrm{Card}(\overline{E_\sigma})q^{-in+(n-1)(i-1)},\ i \geq 1. \tag{7}$$

Reemplazando (7) en (5) y realizando algunas cálculos elementales obtenemos que

$$\int_{E_\sigma} |f(x)|^s dx = \sigma \frac{(1-q^{-1})q-s}{(1-q^{-1}q^{-s})}. \tag{8}$$

Para finalizar la demostración, verificaremos la validez de la afirmación (4). Comencemos observando que la aplicación

$$\phi : E_{\sigma,i+1}(\text{ mód}\,(\pi^{i+1}\mathcal{O}_K)^n) \to E_{\sigma,i}(\text{ mód}\,(\pi^i\mathcal{O}_K)^n)\ ,$$

donde $\phi(x(\text{ mód}\,(\pi^{i+1}\mathcal{O}_K)^n)) = x(\text{ mód}\,(\pi^i\mathcal{O}_K)^n)$, es sobreyectiva. Teniendo esto en cuenta, el problema se reduce a demostrar que cada fibra de ϕ tiene q^{n-1} elementos. Sea, pues, $x(\text{ mód}\,(\pi^i\mathcal{O}_K)^n)$ un elemento de $E_{\sigma,i}(\text{ mód}\,(\pi^i\mathcal{O}_K)^n)$. Los elementos de la fibra de $x(\text{ mód}\,\pi^i)$ tienen la forma:

$$y = x + \pi^i z.$$

Debemos entonces contar el número de los z. Para ello observemos que mediante la fórmula de Taylor, podemos escribir

$$f(y) \equiv f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(\pi^i z)\,(\text{ mód}\,\pi^{i+1}) \ . \tag{9}$$

Pero $f(x) = a\pi^i$, pues $f(x) \equiv 0(\text{ mód}\,\pi^i)$. Entonces, de (9) obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} z + a \equiv 0(\text{ mód}\,\pi) \ , \tag{10}$$

o, equivalentemente, que

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}\,\overline{z} + \overline{a} = 0, \text{ en}\,\mathbb{F}_q \ . \tag{11}$$

Por hipótesis, $\overline{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} \neq 0$ para algún j. Entonces, el número de soluciones del sistema de ecuaciones en (11) es q^{n-1}. ☑

En lo que sigue, calcularemos explícitamente la expresión de $Z(s, f)$ para tres tipos de polinomios usando la fórmula de la fase estacionaria, y comprobaremos que efectivamente se trata de funciones racionales de q^{-s}.

Ejemplo 5.1. El caso más sencillo ocurre cuando $f(x) = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, en cuyo caso

$$Z(f, s) = \int_{\mathcal{O}_K^n} |x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}|_K^s dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{O}_K} |x_i^{m_i}|^s dx_i \ , \tag{12}$$

donde $dx = dx_1 \dots dx_n$. La fórmula (12) muestra que podemos restringirnos al cálculo de integrales del tipo

$$\int_{\mathcal{O}_K} |x^m|^s dx \ .$$

Éstas pueden evaluarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}_K} |x|^{ms} dx &= \sum_{i\geq 0} \int_{\pi^i\mathcal{O}_K \smallsetminus \pi^{i+1}\mathcal{O}_K} |x|^{ms} dx = \sum_{i\geq o} q^{-ims} \int_{\pi^i\mathcal{O}_K \smallsetminus \pi^{i+1}\mathcal{O}_K} dx \\
&= \sum_{i\geq 0} q^{-ims}\left[q^{-i} - q^{-(i+1)}\right] = \sum_{i\geq 0} q^{-i(ms+1)}\left[1 - q^{-1}\right] \\
&= (1 - q^{-1})\frac{1}{1 - q^{-1-ms}} \ .
\end{aligned} \tag{13}$$

De (11) y (13) se deduce entonces que

$$Z(f,s) = (1-q^{-1})^n \prod_i \left(1-q^{-1-m_i s}\right)^{-1} \ . \qquad ☑$$

Ejemplo 5.2. Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ una forma de grado d tal que $\mathrm{Sing}_f(\mathbb{F}_q) = \{0\}$. Se dice en tal caso que $f(x)$ es una *forma fuertemente no degenerada.* Su correspondiente función zeta local tiene la siguiente forma:

$$Z(f,s) = \frac{1}{1-q^{ds-n}} \left\{ \nu(\overline{f}) + \sigma(\overline{f}) \frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{1-q^{1-s}} \right\} \ .$$

En efecto, utilizando la fórmula de la fase estacionaria y que $\mathrm{Sing}_f(\overline{f}) = \{0\}$ y $S(f) = \mathfrak{p}_K^n$, obtenemos que

$$Z(f,s) = \nu(\overline{f}) + \sigma(\overline{f}) \frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{1-q^{1-s}} + \int_{\mathfrak{p}_K^n} |f(x)|^s dx \ . \tag{14}$$

El cambio de variable $x = \pi z$, $dx = q^{-1} dz$, conduce a que

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{p}_K^n} |f(x)|^s dx &= \int_{\mathcal{O}_K^n} |f(\pi z)|^s d(\pi z) = \int_{\mathcal{O}_K^n} |\pi^d f(z)|^s q^{-s} dz \\ &= q^{-ds-n} \int_{\mathcal{O}_K^n} |f(z)|^s dz = q^{-ds-n} Z(f,s) \ . \end{aligned} \tag{15}$$

Reemplazando (15) en (14) y despejando luego $Z(s,f)$, llegamos al resultado buscado. ☑

Ejemplo 5.3. En este ejemplo calculamos la función zeta local para un polinomio del tipo $f(x,y) = \alpha x^n + \beta y^m$, α, $\beta \in \mathcal{O}_K$, donde $m,n > 1$ son primos relativos. Supongamos que la característica de K no divide simultáneamente a n y m. Sin pérdida sustancial de la generalidad, podemos suponer que $\alpha \in \mathcal{O}_K^\times$. En el caso de característica cero, las series de Poincaré $P(t)$ asociadas con estos polinomios fueron calculadas explícitamente por Goldman [**11**, Thm. 1] y Lin [**21**]

Definamos

$$A = \{(x,y) \in \mathcal{O}_K^2 \ ; \ v(x) \geq m, v(y) \geq n\} \ .$$

Observemos que $Z(f,s)$ puede expresarse como sigue:

$$Z(f,s) = \int_A |f|^s dxdy + \int_{A^c} |f|^s dxdy \ .$$

Usando el hecho de que $f(\pi^m x, \pi^n y) = \pi^{mn} f(x,y)$, el cambio de variables $x \longrightarrow \pi^m x$, $y \longrightarrow \pi^n y$ en la primera integral de la igualdad anterior nos permite obtener que

$$Z(f,s) = \frac{1}{1 - q^{-(n+m)-mns}} \int_{A^c} |f|^s dxdy \ , \tag{16}$$

y como el complemento A^c de A con respecto a $\mathcal{O}_K^2$ es la unión disyunta de los tres conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathcal{O}_K^2 \ ; \ v(x) < m, v(y) \geq n\}, \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathcal{O}_K^2 \ ; \ v(x) < m, v(y) < n\}, \\ A_3 &= \{(x,y) \in \mathcal{O}_K^2 \ ; \ v(x) \geq m, v(y) < n\} \ , \end{aligned}$$

de (16) resulta que

$$Z(f,s) = \frac{1}{1 - q^{-(n+m)-mns}} \{Z(f, A_1, s) + Z(f, A_2, s) + Z(f, A_3, s)\} \ . \tag{17}$$

Pasamos en seguida a calcular las integrales $Z(f, A_1, s)$, $Z(f, A_2, s)$, $Z(f, A_3, s)$.

Cálculo de $Z(f, A_1, s)$

Observemos, en primer lugar, que

$$|f(x,y)| = |\alpha x^n + \beta y^m| = |x^n|, \ x, y \in A_1.$$

Por consiguiente,

$$Z(f, A_1, s) = \int_{A_1} |f|^s = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\{(x,y) \in A_1 \ ; \ v(x) = k, v(y) \geq n\}} |x|^{ns} dxdy$$

Luego,

$$Z(f, A_1, s) = (1 - q^1) q^{-n} \sum_{k=0}^{m-1} q^{-kns-k} \ . \tag{18}$$

Cálculo de $Z(f, A_2, s)$

Hagamos $L(i,j) := jm - in + v(\beta)$. El conjunto A_2 puede describirse como la unión disyunta de los tres subconjuntos

$$\begin{aligned} A_{2,1} &= \{(x,y) \in A_2 \ ; \ L(v(x), v(y)) > 0\} \ , \\ A_{2,2} &= \{(x,y) \in A_2 \ ; \ L(v(x), v(y)) < 0\} \ , \\ A_{2,3} &= \{(x,y) \in A_2 \ ; \ L(v(x), v(y)) = 0\}. \end{aligned}$$

Entonces $Z(f, A_2, s) = Z(f, A_{2,1}, s) + Z(f, A_{2,2}, s) + Z(f, A_{2,3}, s)$, donde

$$Z(f, A_{2,1}, s) = (1 - q^{-1})^2 \sum_{i,j} q^{-i-j+nis} \tag{19}$$

e i, j satisfacen $L(i, j) > 0$, $0 \leq i < m$, $0 \leq j < n$;

$$Z(f, A_{2,2}, s) = (1 - q^{-1})^2 \sum_{i,j} q^{-i-j-(v(\beta)+mj)s}, \tag{20}$$

donde i, j satisfacen $L(i, j) < 0$, $0 \leq i < m$, $0 \leq j < n$;

$$Z(f, A_{2,3}, s) = \sum_{i,j} q^{-i-j-nis} \int_{\mathcal{O}_K^\times} |x^n + y^m|^s dxdy,$$

donde $L(i, j) = 0$ y $0 \leq i < m$, $0 \leq j < n$. Usando ahora la fórmula de la fase estacionaria, la integral del lado derecho de (15) es igual a

$$Z(f, A_{2,3}, s) = \nu(\overline{f}) + \sigma(\overline{f}) \frac{1 - q^{-1})q^{-s}}{1 - q^{-1-s}} \sum_{i,j} q^{-i-j-nis}. \tag{21}$$

Cálculo de $Z(f, A_3, s)$

Designemos con $[x]$ la parte entera del número real x y tomemos $v(\beta) = en + r$, $0 \leq r < n$. Hagamos

$$A_{3,1} := \left\{ (x, y) \in A_3 \ ; \ v(x) \geq m + \left[\frac{v(\beta)}{n} \right] + r, v(y) < n \right\} \ ,$$
$$A_{3,2} := \left\{ (x, y) \in A_3 \ ; \ v(x) \leq m + \left[\frac{v(\beta)}{n} \right] + r - 1, v(y) < n \right\} \ .$$

Entonces $A_3 = A_{3,1} \sqcup A_{3,2}$ (unión disyunta), y

$$Z(f, A_3, s) = Z(f, A_{3,1}, s) + Z(f, A_{3,2}, s).$$

Para calcular $Z(f, A_{3,1}, s)$, observemos que

$$|f(x, y)| = |\alpha x^n + \beta y^m| = |\beta y^m|, \ \ x, y \in A_{3,1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} Z(f, A_{3,1}, s) &= \int_{A_{3,1}} |f(x,y)|^s dxdy \\ &= (1-q^{-1}) q^{-\left(m+\left[\frac{v(\beta)}{n}\right]\right)+r} \sum_{k=0}^{n-1} q^{-(v(\beta)+mk)s-k}. \end{aligned} \tag{22}$$

El cálculo de la integral $Z(f, A_{3,2}, s)$ es similar al de $Z(f, A_{2,2}, s)$. El conjunto $A_{3,2}$ puede descomponerse en la unión disyunta de tres subconjuntos $A_{3,2,1}$, $A_{3,2,2}$, $A_{3,2,3}$, dados por

$$\begin{aligned} A_{3,2,1} &:= \{(x,y) \in A_{3,2} \ \ |L(v(x), v(y)) > 0\} \ , \\ A_{3,2,2} &:= \{(x,y) \in A_{3,2} \ \ |L(v(x), v(y)) < 0\} \ , \\ A_{3,2,3} &:= \{(x,y) \in A_{3,2} \ \ |L(v(x), v(y)) = 0\} \ . \end{aligned}$$

Por consiguiente, $Z(f, A_{3,2}, s) = Z(f, A_{3,2,1}, s) + Z(f, A_{3,2,2}, s) + Z(f, A_{3,2,3}, s)$, y

$$Z(f, A_{3,2,1}, s) = (1-q^{-1})^2 \sum_{i,j} q^{-i-j-nis}, \tag{23}$$

donde i, j satisfacen $L(i,j) > 0$ y $m \leqq i < m + \left[\dfrac{v(\beta)}{n}\right] + r$, $0 \leqq j < n$;

$$Z(f, A_{3,2,2}, s) = \left(1-q^{-1}\right)^2 \sum_{i,j} q^{-i-j-(v(\beta)+mj)s}, \tag{24}$$

donde $L(i,j) < 0$, $m \leqq i < m + \left[\dfrac{v(\beta)}{n}\right] + r$, $0 \leqq j < n$, y

$$Z(f, A_{3,2,3}, s) = \left(\nu(\overline{f}) + \frac{\sigma(\overline{f})(1-q^{-1})q^{-s}}{1-q^{-1-s}}\right) \sum_{i,j} q^{-i-j-nis}, \tag{25}$$

donde $L(i,j) = 0$, $m \leqq i < m + \left[\dfrac{v(\beta)}{n}\right] + r$, $0 \leqq j < n$. ☑

Finalmente, queremos recalcar que los anteriores cálculos son válidos en cualquier característica, lo cual reafirma nuestra convicción de que la racionalidad de $Z(s, f)$ podrá posiblemente demostrarse sobre la base de la fórmula de la fase estacionaria.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer al anónimo revisor científico las oportunas y significativas sugerencias que nos permitieron mejorar la presentación de este trabajo.

Bibliografía

1. Albis, V. S. & Chaparro, R., *On a conjecture of Borevich & Shafarevich in arithmetic function fields*, Rev. Acad. Colombiana Ci. Ex. Fis. Nat **XXI (**80) (1997), 313–319.
2. Arnold, V., Varchenko, A. & Goussein-Zadé, S., *Singularités des applications différentiables, Vol.2*, Éditions Mir, Moscou, 1986.
3. Bernstein, I. N. and Gelfand S.I., *Meromorphic property of the function P^{λ}*, Funct. Anal Appl. **3** (1969), 68–69.
4. Borevich, Z. I. & Shafarevich, I. R., *Number Theory*, Academic Press, New York, 1966.
5. Denef, J., *The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points of a variety*, Inv. Math. **77** (1984), 1–23.
6. Denef, J., *Report on Igusa's local zeta function. Séminaire Bourbaki, Vol. 1990/91, No. 201-203*, Asterisque **No. 741** (1992), 359–386.
7. Denef, J., *Poles of p-adic complex powers and Newton polyhedra*, Nieuw Arch. Wisk. (4) **13** (3), 289–295.
8. Denef, J. & Sargos, P., *Polyèdre de Newton et distribution f_+^s. I.*, J. Analyse Math. **53** (1989), 201–218.
9. Denef, J. & Sargos, P., *Polyèdre de Newton et distribution f_+^s. II.*, Math. Annalen **293** (1992), 193–211.
10. Denef, J. & van den Dries, L., *p-adic and real subanalytic sets*, Annals of Math. **128** (1988), 201–218.
11. Goldman, J., *Number of solutions of congruences. Poincaré series for algebraic curves*, Adv. in Math. **62** (1986), 68–83.
12. Goldstein, L. J., *Analytic number theory*, Prentice-Hall, 1969.
13. Hironaka, H., *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. **79** (1964), 109–326.
14. Igusa, J.–I., *Complex powers and asymptotic expansions, I*, J. reine u. angew. Math. **268/ 269** (1974), 110–130.
15. Igusa, J.–I., *Complex powers and asymptotic expansions, II*, J. reine u. angew. Math. **278/279** (1975), 307–321.
16. Igusa, J.–I., *Some observations on higher degree characters*, Amer. J. Math. **99** (1977), 393–417.
17. Igusa, J.–I., *Lectures on forms of higher degree*, Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1978.
18. Igusa, J.–I., *Stationary phase formula for p-adic integrals and its applications*, Algebraic Geometry and its applications (1994), 175-194, Springer-Verlag.
19. Igusa, J.–I., *Local zeta functions of certain prehomogeneous vector spaces*, Amer. J. Math. **114** (2) (1992), 251–296.
20. Igusa, J.–I., *On local zeta functions* [translation of Sugaku 46 (1994), no. 1, 23–38; MR 95e:11126]. *In Selected papers on number theory and algebraic geometry*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 172 (1996), 1–20, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

21. Lin, C. Y., *On the Igusa's local zeta function of* $x^a + y^b$. In *Algebraic geometry and algebraic number theory (Tianjin, 1989–1990)*, Nankai Ser. Pure Appl. Math. Theoret. Phys. **3** (1992), 64–70, World Sci. Publishing, River Edge, NJ.
22. Meuser, D., *On the rationality of certain generating functions*, Math. Ann. **256** (1981), 303–310.
23. Weil, A., *Basic Number Theory*, Springer–Verlag, Berlin, 1967.
24. Zuñiga-Galindo, W. A., *Igusa's local functions of semiquasihomogeneous polynomials*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc. (1998).
25. Zuñiga-Galindo, W. A., *Igusa's local functions of non-degenerated polynomials*, submitted (1999).

Recivido en marzo, 1999

Wilson Zúñiga-Galindo
Laboratorio de Cómputo Especializado,
Universidad Autónoma de Bucaramanga,
Bucaramanga, Colombia.

e-mail: wzuniga@bumanga.unab.edu.co

Víctor Albis
Departamento de Matemáticas y Estadística,
Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia.

e-mail: valbis@accefyn.org.co