Lecturas Matemáticas
Volumen **18** *(1997), páginas 123-130*

Algunas observaciones sobre la convergencia de los productos infinitos

Yu Takeuchi

Universidad Nacional de Colombia, Santa Fe de Bogotá.

Abstract. Non absolutely convergent infinite products are considered. Some properties are established and some relevant examples illustrating their scope are included.

Keywords and phases. Infinite products, absolute and conditional convergence.

1991 AMS Subject Classification 40A20.

Resumen. Se consideran algunas propiedades de los productos infinitos no absolutamente convergentes. Se incluyen varios ejemplos significativos que ilustran el alcance de los resultados.

1. Introducción

Los productos infinitos son útiles en análisis, entre muchas otras cosas, porque permiten la construcción de ejemplos en situaciones críticas. Esto requiere generalmente conocer propiedades no triviales de convergencia de tales productos. Desgraciadamente, no parece existir literatura fácilmente accesible para este tipo de consulta, ya que el tema aparece apenas en unas pocas páginas de los textos de análisis matemático, los cuales se limitan usualmente a los conceptos básicos. Por ejemplo, los textos usuales (v. [1]-[5]) consideran el hecho de que: *si*

$$a_n > 0, \text{ o } a_n < 0, \quad \textit{para todo} \quad n, \tag{1.1}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge si y sólo si el producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ *también lo hace.*

Sin embargo, en ninguna parte se mencionan las posibles relaciones entre la serie $\sum u_n$ y el producto $\prod(1+u_n)$ cuando (1.1) no se cumple.

Bajo la hipótesis (1.1) es claro, por ejemplo, que si el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge, también lo hará el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+2u_n)$. Esto falla, sin embargo, si se elimina la condición (1.1).

Ejemplo 1.1. Considérese el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, donde

$$u_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \; u_{2n} = \frac{1}{n} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \; n \geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n}(1+u_k) &= \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}})(1+\frac{1}{k}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) = \\ &= \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k^2}),\end{aligned}$$

y el producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k^2})$ converge, ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge. Sin embargo

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n}(1+2u_k) &= \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{2}{k}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})(1+\frac{2}{k}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{4}{k}+\frac{4}{k^2}),\end{aligned}$$

y el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{4}{k}+\frac{4}{k^2})$ diverge a cero, ya que $-\frac{4}{k}+\frac{4}{k^2} \leq 0$ para todo k y $\sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{4}{k}+\frac{4}{k^2}) = -\infty$.

Es entonces natural preguntarse si existe alguna relación entre las propiedades de convergencia de $\prod(1+a_n)$ y $\prod(1+2a_n)$.

2. Convergencia no absoluta (condicional) de los productos infinitos

Como lo hemos mencionado (v. [1]-[5]), el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n), \tag{2.1}$$

converge absolutamente, es decir, $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ converge, si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| < +\infty$. A continuación estudiaremos la convergencia o divergencia de (2.1) cuando $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = +\infty$ pero $u_n \to 0$. Como

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+u_n)\right\}$$

(suponemos $1+u_n > 0$para todo$n$), el producto (2.1) converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+u_n)$ converge. Es importante entonces conocer el comportamiento de la función $\log(1+x)$ en la vecindad del origen.

Lema 2.1. *Para $0 < t < \frac{1}{2}$ y $|x| < \frac{2t}{1+2t}$ es válida la siguiente desigualdad:*

$$\left|\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| < t \cdot x^2. \tag{2.2}$$

Demostración. (i) Sea

$$f(x) = (t - \frac{1}{2}) \cdot x^2 + x - \log(1+x).$$

Entonces

$$f(0) = 0,\ f'(x) = x \cdot \left\{(2t-1) + \frac{1}{1+x}\right\}.$$

Como $(2t-1)+\frac{1}{1+x} > 0$ cuando $-1 < x < \frac{2t}{1-2t}$, entonces $f'(x) > 0$ cuando $0 < x < \frac{2t}{1-2t}$ y $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$. Por lo tanto, $f(x) > 0$ cuando $-1 < x < \frac{2t}{1-2t}$.

(ii) Sea

$$g(x) = \log(1+x) - x + (t + \frac{1}{2}) \cdot x^2.$$

Entonces

$$g(0) = 0,\ g'(x) = x \cdot \left\{(2t+1) - \frac{1}{1+x}\right\}.$$

Como $(2t+1) + \frac{1}{1+x} > 0$ cuando $x > -\frac{2t}{2t+1}$, entonces se tiene que $g'(x) > 0$ cuando $x > 0$, $g'(x) < 0$ si $-\frac{2t}{2t+1} < x < 0$. Esto implica que $g(x) > 0$ cuando $-\frac{2t}{2t+1} < x$.

De (i) y (ii) se obtiene (2.2) para $|x| < \frac{2t}{2t+1}$. ☑

Teorema 2.1. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ una serie convergente. Entonces, el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = +\infty$, el producto diverge a cero.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|u_n| < \frac{1}{3}$ para todo n. Tomando $t = 1/4$ en el lema anterior, se obtiene que

$$\log(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \Delta_n, \ |\Delta_n| < \frac{1}{4} \cdot u_n^2. \tag{2.3}$$

Por lo tanto:

(1) Si $\sum u_n^2 < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$ converge. En consecuencia, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge.

(2) Si $\sum u_n^2 = +\infty$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot u_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4} \cdot u_n^2 - \Delta_n) = -\infty,$$

y el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ diverge a cero. ☑

Ejemplo 2.1. Sea $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. Entonces la serie $\sum u_n = \sum (-1)^{n-1}/\sqrt{n}$ converge condicionalmente, mientras que $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ diverge. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^{n-1}/\sqrt{n}) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{2k-1}})(1-\frac{1}{\sqrt{2k}}) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\left\{1+\frac{1}{\sqrt{2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} - \frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k-1}}\right\}.
\end{aligned}$$

Teniendo ahora en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} = \frac{\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k-1}\sqrt{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2k-1}\sqrt{2k}(\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1})} = 0\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right),$$

asi que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}})$ converge, mientras que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k-1}} = +\infty$, se concluye que el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_n)$ diverge a cero.

Ejemplo 2.2. Sea $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Entonces $\sum u_n = \sum(-1)^{n-1}/n$ converge condicionalmente. Por otra parte,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2k-1})(1-\frac{1}{2k}) = \prod_{k=1}^{\infty} 1 = 1.$$

Nótese que $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Teorema 2.2. *Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$, y diverge a $+\infty$ cuando $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = +\infty$.*

Demostración. De (2.3),

$$\log(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{4} - \frac{u_n^2}{4} + \Delta_n, \tag{2.4}$$

con $|\Delta_n| \leq \frac{u_n^2}{4}$. Por lo tanto, si $\sum \log(1+u_n)$ converge y $\sum u_n^2 < +\infty$, es claro que $\sum u_n$ converge. Por otra parte, si $\sum u_n^2 = +\infty$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{u_n^2}{4} - \Delta_n\right\} = +\infty,$$

así que $\sum u_n = +\infty$. ☑

Nota 2.1. Nótese que la convergencia del producto infinito $\prod(1+u_n)$ no garantiza la convergencia de serie $\sum u_n$. En efecto, en el Ejemplo 1.1 el producto $\prod(1+u_n)$ converge, pero la serie $\sum u_n$ diverge a $+\infty$.

Teorema 2.3. *Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1$-$u_n)$ converge si y sólo si $\sum u_n^2 < +\infty$, y $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$ diverge a cero cuando $\sum u_n^2 = +\infty$.*

Demostración. Si $\sum u_n^2 <= +\infty$ entonces $\prod(1-u_n)$ converge, ya que

$$\prod(1+u_n)\cdot\prod(1-u_n) = \prod(1-u_n^2)$$

y $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n^2)$ converge. Supongamos ahora que $\sum u_n^2 = +\infty$. Reemplazando en (2.3) u_n por $-u_n$ y Δ_n por $-\tilde{\Delta}_n$, se obtiene que

$$\begin{aligned}\sum \log(1-u_n) &= -\sum\{u_n + \frac{u_n^2}{2} + \tilde{\Delta}_n\} \\ &= -\sum\{u_n - \frac{u_n^2}{2} + \Delta_n\} - \sum\{u_n^2 - \Delta_n + \tilde{\Delta}_n\}.\end{aligned}$$

Obsérvese que $|\tilde{\Delta}_n| \leq u_n^2/4$. Pero, como

$$u_n^2 - \Delta_n + \tilde{\Delta}_n = \frac{u_n^2}{2} + (\frac{u_n^2}{4} - \Delta_n) + (\frac{u_n^2}{4} + \tilde{\Delta}_n),$$

entonces

$$\sum\{u_n^2 - \Delta_n + \tilde{\Delta}_n\} = +\infty,$$

y puesto que la serie $\sum \log(1+u_n) = \sum\{u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \Delta_n\}$ converge, la serie $\sum \log(1-u_n)$ diverge a $-\infty$. En consecuencia, el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$ diverge a cero. ☑

Ejemplo 2.3. Recuérdese (Ejemplo 1.1) que si

$$u_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},\ u_{2n} = \frac{1}{n} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},\ n \geq 1,$$

el producto infinito $\prod(1+u_n)$ converge. Sin embargo

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{k} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}})(1 - \frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{4}{k} + \frac{1}{k^2})\end{aligned}$$

diverge a cero, ya que $\frac{4}{k} - \frac{1}{k^2} > 0$ para todo k y $\sum(\frac{4}{k} - \frac{1}{k^2}) = +\infty$.

Teorema 2.4. *Supóngase que el producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ *converge. Entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+p\cdot u_n)$ *converge si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2 < +\infty$. *Supóngase ahora que* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2 = +\infty$. *Entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+p\cdot u_n)$ *diverge a cero si* $p > 1$ *y a* $+\infty$ *cuando* $0 < p < 1$.

Demostración. En el Lema 2.1, tómese $t < \frac{|p-1|}{2(1+p)}$. De (2.2) tenemos que

$$\begin{aligned}\log(1+u_n) &= u_n - \frac{1}{2}(u_n)^2 + \Delta_n, |\Delta_n| < t\cdot(u_n)^2 \\ \log(1+p\cdot u_n) &= p\cdot u_n - \frac{1}{2}p^2\cdot(u_n)^2 + \Delta_n', |\Delta_n'| < t\cdot p^2\cdot(u_n)^2.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Supóngase que $\sum u_n^2 < +\infty$. Por el Teorema 2.2, la serie $\sum u_n$ converge. Por lo tanto, $\sum \log(1+p\cdot u_n)$ también lo hace. En consecuencia, el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+p\cdot u_n)$ converge.

Supóngase ahora que $\sum u_n^2 = +\infty$. De (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned}\log(1+p\cdot u_n) &= p\cdot\left\{u_n - \frac{u_n^2}{2} + \Delta_n\right\} + \frac{p(1-p)}{2}u_n^2 - p\cdot\Delta_n + \Delta_n' \\ &= p\cdot\log(1+u_n) + \frac{p(1-p)}{2}u_n^2 + (-p\cdot\Delta_n + \Delta_n'),\end{aligned} \tag{2.6}$$

donde

$$|-p\cdot\Delta_n + \Delta_n'| < t\cdot p(1+p)\cdot u_n^2.$$

Como $t < \frac{|p-1|}{2(1+p)}$ entonces $\frac{|p(1-p)|}{2} > t\cdot p(1+p)$, así que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{p(1-p)}{2}u_n^2 - p\cdot\Delta_n + \Delta_n'\right\} = +\infty, \quad 0<p<1,$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{p(1-p)}{2}u_n^2 - p\cdot\Delta_n + \Delta_n'\right\} = -\infty, \quad p>1.$$

De (2.6) se obtiene entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+p\cdot u_n) = \begin{cases} +\infty, & 0<p<1 \\ -\infty, & p>1. \end{cases}$$

Esto es lo mismo que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+p\cdot u_n) = \begin{cases} +\infty, & 0<p<1 \\ 0, & p>1, \end{cases}$$

lo cual completa la demostración. ☑

Ejemplo 2.4. (i) Sean

$$u_{2n-1} = -\frac{1}{2n},\ u_{2n} = \frac{1}{2n},\ n\ge 1.$$

Entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2k})(1+\frac{1}{2k}) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{4k^2})$$

es convergente. En este caso

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+p\cdot u_n)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{p}{2k})(1+\frac{p}{2k})=\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{p^2}{4k^2}),$$

y también converge

(ii) Sean ahora

$$u_{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},\ u_{2n}=\frac{1}{n}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},\ n\geq 1,$$

como en el Ejemplo 1.1. Como

$$\frac{2p(1-p)}{k}+\frac{p^2}{k^2}\begin{cases}>0 & \text{para todo } k, \text{ cuando } 0<p<1,\\ <0 & \text{para todo } k \text{ suficientemente grande, cuando } p>1,\end{cases}$$

y $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2p(1-p)}{k}+\frac{p^2}{k^2})$ diverge, se deduce que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+p\cdot u_n)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{p}{k}+\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{k}})(1+\frac{p}{k}-\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1+\frac{2p(1-p)}{k}+\frac{p^2}{k^2}\right\}=\begin{cases}+\infty, & 0<p<1,\\ 0, & p>1.\end{cases}$$

Referencias

1. L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3$^{\mathrm{nd}}$-Edition, McGraw-Hill, 1979.
2. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2$^{\mathrm{nd}}$-Edition, Addison-Wesley, 1974.
3. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2$^{\mathrm{nd}}$-Edition, McGraww-Hill, 1974.
4. D. V. Widder, *Advanced Calculus*, 2$^{\mathrm{nd}}$-Edition, Prentice-Hall, 1961.
5. E. Whitaker and G. Watson, *A course in Modern Analysis*, 4$^{\mathrm{nd}}$-Edition, Cambridge University Press, 1940.

(Recibido en enero de 1998)

Yu Takeuchi
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Santa Fe de Bogotá, Colombia