This is a reprint of the paper
Carlos J. Ruiz Salguero
y la Topología
by JOAQUÍN LUNA
published in **Lecturas Matemáticas**
16 (1995), pp. 101–118

CARLOS J. RUIZ SALGUERO Y LA TOPOLOGÍA*

JOAQUÍN LUNA

Universidad Distrital, Bogotá

Con motivo de haberle sido otorgado el Premio Sociedad Colombiana de Matemáticas de 1993 al Profesor CARLOS J. RUIZ SALGUERO, acepté con mucho entusiasmo la petición de los integrantes del grupo **VIALTOPO** (Visión Algebraica de la Topología) de referirme en una exposición corta a sus contribuciones a la topología. Este documento está basado en dicha exposición. Debo advertir sin embargo, que un simple vistazo a la obra del Profesor RUIZ en topología nos llevó en aquel entonces a concluir que era imposible abarcar ésta en pocas líneas. Por tal razón resolvimos limitarnos a examinar algunos de los trabajos que consideramos centrales —aun a riesgo de ser injustos.

Es importante aclarar además que cuando hablamos de las contribuciones de C. RUIZ a la topología, ya estamos limitándonos a una pequeña parte de su actividad profesional como investigador, maestro, organizador y orientador incansable de un buen número de los que hoy lideran la actividad en esta rama de las ciencias en Colombia, por lo cual no podemos dejar pasar la oportunidad de agradecerle, en nombre de todos, esa labor de maestro y amigo que ha hecho posible que hoy seamos estudiosos y fervientes admiradores de la matemática.

Hemos dividido la presentación en cuatro partes, según el tema preponderante en cada una de ellas. Un denominador común en todas es la noción de ADJUNCIÓN.

* Este artículo fue presentado en las *V Jornadas Nacionales de Matemáticas*, Universidad Javeriana, Bogotá, noviembre de 1993.

En efecto, mediante este intrumento, el Profesor Ruiz ha incursionado en diversos campos de la topología:

A. La homotopía, la teoría simplicial y los complejos celulares.
B. Los sistemas dinámicos.
C. La teoría de la convergencia.
D. La topología categórica.
E. La aproximación booleana a la topología general.
F. La enseñanza de la topología.
G. La utilización de los grupos topológicos en geometría y en física.

Haremos un rápido recorrido por los resultados que se relacionan con A, B, C y D. Para futura referencia precisamos la noción de adjunción:

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías. Se dice que dos funtores

$$D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}, \ S : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

son *adjuntos* (o mas precisamente, que D es *adjunto a derecha* de S y S *adjunto a izquierda* de D), si denotando con $\mathcal{B}^\circ$ la categoría opuesta de $\mathcal{B}$, los funtores

$$\mathcal{A}\big(S(\ ),\, (\ )\big) \text{ y } \mathcal{B}\big((\ ),\, D(\ )\big)$$

de la categoría producto $\mathcal{A} \times \mathcal{B}^\circ$ en la categoría de los conjuntos son equivalentes.

La relación existente entre los funtores $1_\mathcal{B}$ y $D \circ S$, y entre $S \circ D$ y $1_\mathcal{A}$, cuando S y D son adjuntos, se expresa usualmente por medio de dos transformaciones naturales:

$$u : 1_\mathcal{B} :\longrightarrow D \circ S \ \text{ y } \ v : S \circ D :\longrightarrow 1_\mathcal{A},$$

denominadas *morfismos de adjunción* (v. [A3]). Un hecho notable está dado por la siguiente proposición (v. [A3]):

Proposición. *Sea D un funtor adjunto a derecha de un funtor S. Entonces:*

(1) *D conmuta con los productos.*
(2) *S conmuta con las sumas.*

1. Homotopía, teoría simplicial y complejos celulares

Los objetos relevantes en esta parte del trabajo de C. Ruiz son:

1.1 La categoría Δ, cuyos objetos son los conjuntos $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$, $n \in \mathbb{N}$, y cuyos morfismos son las aplicaciones

$$\partial_n^i : [n+1] \longrightarrow [n],$$

que es la función inyectiva creciente que evita tomar el valor $i \in [n]$, y

$$\sigma_n^i : [n+1] \longrightarrow [n],$$

que es la función sobreyectiva no decreciente que toma dos veces el valor $i \in [n]$.

Todo morfismo no decreciente $u : [m] \longrightarrow [n]$ se puede escribir de una y una sola manera en la forma

$$u = \partial_n^{i_s}\ \partial_{n-1}^{i_{s-1}} ... \partial_{n-t-1}^{i_1}\ \sigma_{m-t}^{j_t} ... \partial_{m-2}^{j_2}\ \partial_{m-1}^{j_1}$$

con $n \geq i_s > ... > i_1 \geq 0$, $0 \leq j_t < ... < j_1 < m$ y $n = m - t + s$.

1.2 Si $\mathcal{C}$ es una categoría, la categoría $\Delta^\circ\mathcal{C}$ de los *objetos simpliciales*, cuyos objetos son los funtores contravariantes

$$X : \Delta^\circ \longrightarrow \mathcal{C}$$

y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos.

1.3 La categoría de los *objetos cosimpliciales*: los objetos son los funtores covariantes

$$Y : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$$

y los morfismos, las transformaciones naturales entre ellos.

Nota 1 Cuando $\mathcal{C} = Top, Y : \Delta \longrightarrow Top$ es el funtor que envía $[n]$ en $\Delta(n)$, el n–simplejo canónico de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nota 2 Cada funtor $Y : \Delta \longrightarrow Top$ es un "modelo" (cf. [14]).

Nota 3 Es frecuentemente necesario trabajar con modelos aún más generales, $Y : \delta \longrightarrow \mathcal{C}$, donde δ es una categoría cualquiera.

1.4 Los *sistemas simpliciales* sobre una categoría $\mathcal{C}$. Es decir, las triplas $J = (\mathcal{H},\ \Phi,\ \gamma)$, donde $\mathcal{H} : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \longrightarrow \Delta^\circ S$ es un funtor covariante, Φ es una "ley de composición" asociativa con $\Phi_{XYZ} : \mathcal{H}(X,\ Y) \times \mathcal{H}(Y,\ Z) \longrightarrow \mathcal{H}(X,\ Z)$ una transformación natural en $X,\ Y,\ Z$, y γ es un isomorfismo natural $\gamma_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{H}(X,\ Y)$ (para $\alpha \in \mathcal{H}(X,\ Y)_n$ y $\beta \in \mathcal{H}(Y,\ Z)_n$, es conveniente escribir $\alpha \bullet \beta = \varnothing(\alpha,\ \beta)$). Además, J debe satisfacer las siguientes condiciones:

(i) Para todo morfismo $u : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ y toda $f \in \mathcal{H}(Y, Z)_n$, $f \bullet s^{(n)}(u) = \mathcal{H}(u, Z)(f)$, donde $s^{(n)}(u)$ es la imagen de u por n iteraciones de s_0, siendo s_0 la 0–ésima degeneración en cada dimensión.

(ii) Para toda $g \in \mathcal{H}(W, X)_n$ y toda $u \in \mathcal{C}(X, Y)$, $s^{(n)}(u) \bullet g = \mathcal{H}(W, u)(g)$.

1.5 Las *categorías simpliciales.* Es decir, las parejas $(\mathcal{C}, J)$, donde J es un sistema simplicial sobre la categoría $\mathcal{C}$.

En [A1], C. Ruiz y R. Ruiz utilizan además la categoría $\mathcal{C}.Sim$ de las categorías y funtores simpliciales y la $\mathcal{C}.Rel$ de las categorías con relaciones compatibles (una categoría $(\mathcal{C}, R)$, donde R es una relación compatible, está formada por una categoría $\mathcal{C}$ y, para cada par de objetos X, Y, de una relación reflexiva y transitiva sobre el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$, la cual es compatible con la composición en $\mathcal{C}$; un morfismo $F : (\mathcal{C}, R) \to (\mathcal{C}', R')$ es un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, monótono con respecto a R y R'). El hecho que a una categoría simplicial $(\mathcal{C}, J)$ sea posible asociar la relación reflexiva y transitiva generada por la homotopía simplicial, da lugar a un funtor $\mathcal{R} : \mathcal{C}.Sim \longrightarrow \mathcal{C}.Rel$.

Teorema. *El funtor $\mathcal{R}$ admite un adjunto a derecha, $S : \mathcal{C}.Rel \longrightarrow \mathcal{C}.Sim$.*

Una consecuencia importante de este resultado es

Corolario. *En toda categoría dotada de una relación reflexiva y transitiva compatible, existe un sistema simplicial cuya relación de homotopía simplicial es la relación dada. Además, si la relación original es simétrica, los sistemas simpliciales son conjuntos simpliciales de Kan.*

El lema de descomposición de Eilenberg–Zilber garantiza que para cada conjunto simplicial X y cada $y \in X_n$ existe una y una sola pareja (σ, x), donde σ es un epimorfismo de Δ y x es un punto no degenerado de X, tal que $X(\sigma)(x) = y$. Sin embargo, para un punto $y \in Y^n$ (Y un conjunto cosimplicial), la afirmación dual correspondiente: "existe una y una sola pareja (∂, x), donde ∂ es un monomorfismo de Δ y x es un punto interior de Y (ver la definición en la siguiente página), tal que $Y(\partial)(x) = y$", no siempre es cierta. En [A2] C. Ruiz y R. Ruiz demuestran que para que en un conjunto cosimplicial Y la unicidad de la descomposición de Eilenberg–Zilber sea válida, es necesario y suficiente que Y no admita puntos cosimpliciales (esto es, subconjuntos cosimpliciales con solamente un punto en cada dimensión). La versión dual y otros resultados importantes de [A2] son los siguientes:

Proposición. *(Criterio de Retracción) Sean ∂, $\partial' : [n] \longrightarrow [m]$ dos monomorfismos para los cuales $Ret(\partial) = Ret(\partial')$, donde $Ret(\partial)$ es la clase de los retractos de ∂. Si $\partial \neq \partial'$, entonces, necesariamente, $n = 0$.*

Proposición. *Para que $f : [n] \longrightarrow [m]$ admita un conjunto a derecha (resp. a izquierda) es necesario y suficiente que $f(0) = 0$ (resp. $f(n) = m$).*

Lema. *Para cada $y \in Y^n$ (Y un conjunto cosimplicial) siempre existen un monomorfismo δ en Δ y un punto interior (ver la definición en la siguiente página) z de Y tales que $y = Y(\delta)(z)$.*

Definición. *En tal caso el par $\langle \delta, z \rangle$ se llama una descomposición del tipo Eilenberg-Zilber de y (descomposición E-Z).*

Definición. *(1) Se dice que un conjunto cosimplicial Y es del tipo Eilenberg–Zilber (tipo E-Z) si cada $y \in Y$ tiene descomposición E-Z única. (2) Se dice que un conjunto cosimplicial Y admite un punto cosimplicial si existe un subconjunto cosimplicial de Y con exactamente un punto en cada dimensión.*

Teorema. *Para un conjunto cosimplicial Y, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Y no admite puntos cosimpliciales.*
(2) *Y es un conjunto cosimplicial del tipo E-Z.*
(3) *Para cualquier par de morfismos ∂, $\partial' : [p] \longrightarrow [n]$ tales que $Ret(\partial) = Ret(\partial')$, si existe $x \in Y^p$ para el cual $Y(\partial)(x) = Y(\partial')(x)$, entonces $\partial = \partial'$.*

En la topología algebraica clásica existe un par bien conocido de funtores adjuntos: *la realización geométrica* y el *funtor singular*. Estos se construyen mediante manipulaciones sistemáticas de los simplejos topológicos $\Delta(n)$.

R. Ruiz demostró en [14] que en realidad todo funtor $Y : \Delta \longrightarrow Top$ induce funtores adjuntos $S_Y : Top \longrightarrow \Delta^\circ S$ y $R_Y : \Delta^\circ S \longrightarrow Top$. Este último generaliza la realización geométrica de Milnor y conmuta con productos finitos, así que muchos de los aspectos de la topología algebraica clásica siguen siendo válidos para el nuevo "modelo" Y.

En [A3] C. Ruiz y R. Ruiz establecen una equivalencia entre la categoría $\delta\mathcal{A}$ de los modelos sobre una categoría $\mathcal{A}$ y la categoría $P\mathcal{A}(\delta^\circ S, \mathcal{A})$ de los pares adjuntos, y concluyen que todo par adjunto se define por un modelo:

Proposición. *Para todo par adjunto $(R, S) \in P\mathcal{A}(\delta^\circ S, \mathcal{A})$ existen $Y \in \delta\mathcal{A}$ y un isomorfismo $\pi : S \longrightarrow S_Y$. Recíprocamente, dado $Z \in \delta\mathcal{A}$, si S_Z admite un adjunto a izquierda R, existe un isomorfismo $R \circ \delta \longrightarrow Z$.*

Para enunciar el resultado principal en [A3] recordamos que:

(1) Un punto y de un modelo Y es *interior*, si para todo monomorfismo ω de Δ, el hecho de que y pertenezca a $Im(Y(\omega))$ asegura que ω es una identidad.
(2) Un modelo Y satisface la propiedad $MO.1$, si en ninguna dimensión Y tiene subconjuntos cosimpliciales reducidos a un solo punto.
(3) Y satisface $MO.2$, si los puntos interiores de Y son estables por codegeneraciones.
(4) Y satisface $MO.3$ si para todo par de diagramas no degenerados $[m] \xleftarrow{\beta} [r] \xrightarrow{\alpha} [m]$, y $[m] \xleftarrow{\beta'} [r'] \xrightarrow{\alpha'} [m]$, el hecho de que existan $Z \in Y(r)$ y $Z' \in Y(r')$ tales que $Y(\alpha)(Z) = Y(\alpha')(Z')$ y $Y(\beta)(Z) = Y(\beta')(Z')$ asegura que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ y $Z = Z'$.
(5) Y satisface $MO.4$, si dados n, m y $(u, v) \in Y(n) \times Y(m)$, existen $p \geq 0$, $\omega \in Y(p)$ y un diagrama $[n] \xleftarrow{\alpha} [p] \xrightarrow{\beta} [m]$, tales que $Y(\alpha)(\omega) = u$ y $Y(\beta)(\omega) = v$.

C. y R. Ruiz demuestran entonces que

Teorema. *Si un modelo $Y : \Delta \longrightarrow S$ satisface $MO.1$ y $MO.2$, para que $R_Y : \Delta^\circ S \to S$ conmute con productos finitos es necesario y suficiente que Y satisfaga $MO.3$ y $MO.4$.*

En [A4], C. Ruiz y R. Ruiz logran una caracterización de la realización geométrica en el caso no euclidiano, extendiendo así el trabajo de J. Milnor y sus contemporáneos. Se parte de un funtor covariante $Y : \Delta \longrightarrow Top$ y de un conjunto simplicial $X : \Delta^\circ \longrightarrow Conj$. A continuación, sobre la suma

$$\coprod_{n \geq 0} X(n) \times Y(n)$$

se define la relación de equivalencia generada por la relación de Milnor

$$\big(X(\omega)(x), y\big) \sim \big(x, Y(\omega)(y)\big)$$

donde $x \in X(q)$, $y \in Y(p)$, $\omega : [p] \longrightarrow [q]$ es una flecha de Δ y

$$X(\omega) : X(q) \longrightarrow X(p),\ Y(\omega) : Y(p) \longrightarrow Y(q)$$

son las aplicaciones asociadas a ω por los funtores X y Y. El conjunto cociente de $\coprod_n X(n) \times Y(n)$ por dicha relación de equivalencia se denota con $R_Y(X)$ y se denomina la *realización del conjunto simplicial X con modelos en Y*.

Definiendo como *óptimo* un par (x, y) en $\coprod_n X(n) \times Y(n)$ en el que la componente x es no degenerada y la componente y es interior, C. Ruiz y R. Ruiz demuestran el resultado fundamental siguiente :

Teorema. *Si Y es un conjunto cosimplicial que satisface las propiedades $MO.1$ y $MO.2$, y si X es un conjunto simplicial arbitrario, la aplicación cociente $\coprod_n X(n) \times Y(n) \to R_Y(X)$ asociada con la relación de Milnor establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de pares óptimos y el conjunto $R_Y(X)$.*

En el caso clásico, la realización geométrica tiene estructura de CW–complejo. Es entonces natural preguntarse si la realización en su forma general tiene una estructura parecida. C. Ruiz inicia este estudio en [A5], donde describe los *Complejos Celulares Generales* y estudia un buen número de sus propiedades topológicas: separación, normalidad perfecta, paracompacidad, y, también, condiciones de uniformidad. Mas adelante, en [A6], logra establecer, bajo condiciones simples sobre la estructura cosimplicial de Y (la condición $MO.1$,), la existencia de una estructura celular general en los espacios $R_Y(X)$. Recurre luego al concepto de *cofibración de Urysohn*:

Definición. *Una cofibración de Urysohn es una función continua $f : X \longrightarrow Y$ tal que, para toda pareja de conjuntos cerrados disyuntos A y B en Y y toda aplicación continua $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u^{-1}(0) \supseteq f^{-1}A$, $u^{-1}(1) \supseteq f^{-1}B$, existe una función continua $v : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica*

$$v^{-1}(0) \supseteq A, \; v^{-1}(1) \supseteq B, \; vf = u.$$

Mediante este concepto, logra demostrar entonces que

Teorema. *Si un espacio cosimplicial Y satisface la condición $MO.1$ y los $Y(n)$ son espacios de Hausdorff normales, entonces, cualquiera que sea el conjunto simplicial X, $R_Y(X)$ es normal.*

2. Sistemas dinámicos

Desde principios de la decada del 80, un subgrupo del grupo *Vialtopo*, denominado *Grupo de Sistemas Dinámicos*, conformado básicamente por los profesores C. Ruiz, A. Duque y J. Luna, ha venido trabajando en otros aspectos de la topología. Examinaremos algunos de los resultados obtenidos por este grupo. Como formo parte de él, me referiré a nosotros (con C. Ruiz y A. Duque) en lo que sigue.

Un hecho central en el estudio de las variedades diferenciales es el de que toda variedad admite un recubrimiento por conjuntos abiertos que satisface el principio de existencia y unicidad de integradores: Dada una sección diferenciable $\sigma : M \to TM$ de la proyección $\pi : TM \to M$, existen un subconjunto abierto A de $\mathbb{R} \times M$, tal que

$$\{0\} \times M \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \times M$$

y una función diferenciable $\Phi : A \to M$, tal que $\Phi(0, m) = m$ y que

$$\Phi(-, m) = \sigma\Phi(-, m)$$

para todo $m \in M$. Aquí $\phi(-, m)(x) = \phi(x, m)$.

Ahora, si $\gamma : M \to T^2M$ es una sección de ϕ^2 y $m \in M$ ¿ existe siempre $\alpha : I \to M$ tal que

$$\ddot{\alpha}(t) = \gamma\alpha(t)$$

y que $\alpha(0) = m$?

Cuando bajo condiciones iniciales apropiadas se pide encontrar una solución $x = x(t)$ de la ecuación de Newton $\ddot{x} = f(x)$, el problema es de este tipo, y se espera que, como en el primer caso, haya solución. Con esto en mente se estudia en [B1] la topología de los *retratos de fase* para la ecuación del péndulo. A pesar de que es necesario considerar una topología cociente, el estudio resulta particularmente sencillo en este caso, pues "la relación de equivalencia debida a las órbitas es abierta". También demuestra que las órbitas asociadas a la ecuación $\ddot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, son las componentes conexas del producto fibrado

$$B\Pi\mathbb{R} = \{(k, x, y) \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2}y^2 + U(x) = k\},$$

donde U es la energía potencial del sistema y $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Se demuestra también que estos resultados son casos particulares de resultados generales en la teoría de pseudo– fibrados asociados a grupos de un parámetro.

En [B2] se estudian los movimientos en el dominio de una función, con el fin de levantar sistemas dinámicos. Se comienza por introducir el siguiente concepto:

Definición. *Sean $p : E \to X$ una aplicación, e_0 y e_1 puntos de E tales que $p(e_0) = p(e_1)$, $W \subseteq E$. Sea $M(W, e_1, e_0)$ el conjunto formado por los puntos y de E para los cuales existe un par de caminos $\sigma_0, \sigma_1 : I \to E$ tales que*

(1) $\sigma_0(0) = e_0$
(2) $\sigma_1(0) = e_1$
(3) $p\sigma_0 = p\sigma_1$
(4) $\sigma_0(1) \in W$
(5) $\sigma_1(1) = y$.

Se dice que $M(W, e_1, e_0)$ se ha obtenido por un movimiento de W desde la altura e_0 hasta la altura e_1.

La definición anterior determina una aplicación

$$M : P(E) \times E \wedge E \longrightarrow P(E),$$

donde $P(E)$ es el conjunto de las partes de E y $E \wedge E$ representa el producto fibrado $\{(a, b) \mid p(a) = p(b)\} \subseteq E \times E$. Esta aplicación tiene las siguientes propiedades: si en $P(E) \times E \wedge E$ se considera el orden lexicográfico debido al orden natural del conjunto de las partes y a la igualdad en $E \times E$, la aplicación M es monótona no decreciente. Además,

(1) $M(\phi, e_1, e_0) = \varnothing$.
(2) Puede ser que $M(W, e_1, e_0)$ sea vacío sin que W lo sea.
(3) Si $M(E, e_1, e_0) = E$ entonces E es conexo por arcos.
(4) Recíprocamente, si E es conexo por arcos y p satisface el principio de levantamiento de caminos, entonces $M(E, e_1, e_0) = E$.
(5) Si para un conjunto W en E y un punto $e_0 \in E$, $W(e_0)$ es el conjunto de los $w \in W$ que se pueden unir con e_0 por algún camino en E, $M(W, e_0, e_1) \supseteq W(e_0)$. Si E es conexo por arcos, $W(e_0) = W$ y $M(W, e_0, e_0) = W$, para todo subconjunto W de E.
(6) Si p satisface el principio de unicidad para el levantamiento de caminos, entonces $M(W, e_0, e_0) \subseteq W$.

Con base en estos resultados se demuestra entonces que

Proposición. *Para cada pareja* (e_0, e_1) *en* $E \wedge E$*, la aplicación* $M_{e_1\ e_0} : P(E) \longrightarrow P(E)$ *definida por* $M_{e_1\ e_0}(W) = M(W, e_1, e_0)$ *admite un adjunto a derecha.*

Una condición necesaria para tener el principio de unicidad de levantamiento de caminos es que las fibras de la función "rechacen" al intervalo I:

Definición. *Si* F*,* Y *son espacios topológicos, se dice que el espacio* F *"rechaza" al espacio* Y *si toda función continua* $f : Y \to F$ *es constante.*

Si $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ son subclases de $P(Top)$, $\mathbb{F}(\mathcal{C})$ denota la clase de todos los espacios F que rechazan a cada espacio Y en $\mathcal{C}$, y $\mathbb{Y}(\mathcal{D})$, la de todos los espacios Y que son rechazados por cada espacio F de $\mathcal{D}$. Como se verifica fácilmente,

Proposición. $\mathbb{F}$ *es adjunto a izquierda de* $\mathbb{Y}$*.*

En [B4] se establece que para asegurar la validez del principio de unicidad de levantamiento de caminos mediante una función continua $p : E \to X$ bastan dos condiciones sobre p:
(a) que p sea localmente trivial, y
(b) que las fibras de p sean totalmente discontinuas.

Más precisamente:

Teorema. *Si una función* $p : E \to X$ *es continua, localmente trivial y de fibras totalmente discontinuas, entonces p satisface el principio de levantamiento único de homotopías y, por ende, el principio de levantamiento único de caminos.*

Una consecuencia inmediata de este teorema es el levantamiento de sistemas dinámicos. Posteriormente, en [B4], se construyen, a partir del conjunto C de Cantor, fibrados con fibras totalmente discontinuas pero no discretas.

Teorema. *La órbita* K *de* $\mathbb{O} = (0, 0, ...)$ *para la acción de* $\mathbb{Z}$ *sobre* C *está formada por los puntos casi constantes de* C *y satisface:*
a) K *es un subconjunto no discreto de* C*.*
b) K *es denso en* C*.*
c) K *es totalmente discontinuo y no compacto.*
d) *La función* $F : C \to C$*, de complemento hasta el primer cero,*

$$F(1, 1, \cdots, 1, 0, a_{k+1}, \cdots) = (0, 0, \cdots, 0, a_{k+1}, \cdots),$$

opera transitivamente sobre K*.*
e) K *es enumerable.*

En [B4] se pueden encontrar las nociones pertinentes a la acción de $\mathbb{Z}$ sobre C que aparece en el enunciado del teorema.

En [B5] se logra obtener, utilizando fracciones continuas, una estratificación

$$\{0\} = \mathbb{J}_0 \subseteq \mathbb{J}_1 \subseteq ... \subseteq \mathbb{J}$$

del espacio $\mathbb{J} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, en la cual $\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_{n-1}$ es discreto y $\mathbb{J}_{n-1}$ es el conjunto derivado de $\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_{n-1}$. Se demuestra además que la topología débil asociada a la filtración es estrictamente más fina que la de $\mathbb{J}$.

Con el fin de obtener una descomposición celular de $\mathbb{J}_n$, se puede partir de un espacio topológico con punto base (X, x_0), y de $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$, el espacio prototipo de la convergencia secuencial. Se define entonces $C_s(X, x_0)$, el *cono secuencial de* (X, x_0), como el espacio cociente de $X \times S$ por la relación de equivalencia que reduce a un punto el subespacio $\{x_0\} \times S$. Este espacio tendrá por punto base la clase $\star = \{x_0\} \times S$. Se define luego

$$C_s^2(X, x_0) = C_s(C_s(X, x_0), \star),$$

y de forma similar se definen los $C_s^m(X, x_0)$, $m \geq 2$. El operador C_s puede interpretarse como la suma amalgamada de las flechas i y j

$$\begin{tikzcd}
X \vee S \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d] \\
X \times S \arrow[r] & C_s(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

donde $X \vee S$ es el subespacio de $X \times S$ formado por los puntos $(x, 0)$ y (x_0, s), con $x \in X$ y $s \in S$, la función j esta dada por $j(x_0, s) = x_0$ y $j(x, 0) = x$, e i es la inclusión.

En el lenguaje de los complejos celulares generales podemos dar entonces la siguiente descripción de $X = \mathbb{J}_n$:

(a) El esqueleto de dimensión 1, $X^{(1)}$, de X, es $\mathbb{J}_1$, con su estructura topológica.

(b) Para obtener $X^{(2)}$ se pega una sola celda de "dimensión 2". Se trata del espacio $B_{(2)} = S \times S$, cuyo "borde" es $\partial B_{(2)} = (\{0\} \times S) \cup (S \times \{0\})$. La función de pegamiento $\partial B_{(2)} \longrightarrow X^{(1)}$ es $j_1(0 \times S) = 0, j_1(s, 0) = s$ (j_1 es simplemente la restricción de la primera proyección $\pi_1 : S \times S \longrightarrow S$). El esqueleto $X^{(2)}$ es la suma amalgamada

$$\begin{tikzcd}
\partial B_{(2)} \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "i"'] & X^{(1)} \arrow[d] \\
B_{(2)} \arrow[r, "k_2"'] & X^{(2)}
\end{tikzcd}$$

(c) Para definir el esqueleto en "dimensión 3" se procede de manera semejante: se pega sobre $X^{(2)}$ una celda en "dimensión 3". Dicha celda es $B_{(3)} = S \times S \times S$, con "borde" $\partial B^{(3)} = (S \times S \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S \times S)$. La función de pegamiento es $j_2 : \partial B_{(2)} \to X^{(1)}$ definida por $j_2(s, t, 0) = k_2(s, t)$ y $j_2(0 \times S \times S) = 0$.

Mediante la descripción baricéntrica de $\mathbb{J}$ se puede obtener un subobjeto $\wedge$ del objeto cosimplicial Δ. Basta definir $\wedge(n)$ como el conjunto de los elementos

$(y_0, y_1, ..., y_n)$ de Δ^n para los cuales existen números enteros positivos $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que

$$y_k = \frac{1}{a_{[k]}}\left(1 - \frac{1}{a_{k+1}}\right),$$

donde

$$a_{[n]} = \begin{cases} a_1, a_2 ... a_n, & \text{si } n \neq 0 \\ 1, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

y donde a_{n+1} es ω (un símbolo que cumple $\frac{1}{\omega} = 0$). Como una cofaz o una codegeneración de Δ restringidas a un elemento de $\wedge$ dan como resultado un elemento de $\wedge$, $\wedge$ se constituye en un subobjeto cosimplicial de Δ. Pensamos que con este $\wedge$ se pueden lograr realizaciones geométricas con características muy diferentes a las descritas en la primera parte.

3. Convergencia

C. Ruiz [C.1] ha estudiado también las relaciones existentes entre topología y convergencia, utilizando nuevamente el mecanismo de adjunción. Ahora, la adjunción es la de Ore:

Definición. *Se dice que una pareja de funciones monótonas entre conjuntos ordenados*

$$U \xrightarrow{s} V \xrightarrow{d} U$$

satisface la condición de adjunción de Ore, si para $u \in U$ y $v \in V$ las relaciones

$$s(u) \leq v \quad y \quad u \leq d(v)$$

son equivalentes.

Se deduce fácilmente que:

1) s conmuta con extremos superiores.
2) d conmuta con extremos inferiores.
3) $s \circ d(v) \leq v$, para $v \in V$.
4) $u \leq d \circ s(u)$, para $u \in U$.
5) Si $j = d \circ s$, entonces $j \circ j = j$.
6) Si $k = s \circ d$, entonces $k \circ k = k$.

En [C1], C. Ruiz define la categoría $Crit(X)$ de los *criterios de convergencia sobre un conjunto* X. Esta tiene como conjunto de objetos el conjunto de las aplicaciones $C : X \longrightarrow P(SucX)$, donde $SucX$ es el conjunto de las sucesiones de X (aplicacions $s : \mathbb{N} \to X$) y $P(SucX)$ es el conjunto de partes de $SucX$, tales que (C_1) la sucesión constante de valor x está en $C(x)$ y (C_2) si $\mathbb{S} \in C(x)$ y $\mathbb{S}'$ es una subsucesión de $\mathbb{S}$, también $\mathbb{S}' \in \mathbb{C}(x)$. La clase de las flechas de $Crit(X)$ es el conjunto de las parejas (C, C') tales que $C'(x) \subseteq C(x)$ para todo $x \in X$. Define también el funtor

$$\widetilde{T} : Crit(X) \longrightarrow Top(X)$$

que a cada criterio de convergencia de sucesiones sobre un conjuto X asigna una topología sobre X. Más precisamente, $\widetilde{T}$ está dada por

$$\widetilde{T}(C) = \{A^c \mid A \subseteq X \text{ y } A \text{ es } C - \text{cerrado}\}$$

donde $A \subseteq X$ es C–cerrado, o cerrado para el criterio C, si cada vez que la sucesión $S = \langle\, x_n \,\rangle$ de A sea C–convergente a un punto x, tal punto x debe estar en A.

Con ayuda del mecanismo $\widetilde{T}$ establece entonces un "diccionario" entre $Crit$ (X) y $Top(X)$ que le permite reconstruir sitemáticamente los conceptos básicos de la topología general. Una idea fundamental en todo este trabajo es la construcción de un mecanismo (funtor) adjunto

$$\widetilde{C} : Top(X) \longrightarrow Crit(X),$$

de la siguiente manera: a $\mathcal{C} \in Top(X)$ asocia $\widetilde{C}(\mathcal{C})$ de tal forma que $\widetilde{C}(\mathcal{C})(x)$ sea el conjunto de las sucesiones de X convergentes a x para $\mathcal{C}$.

Más adelante, en [C3], estudia los puntos fijos de $k = \widetilde{C}\widetilde{T}$, los que logra caracterizar con la ayuda de algunos resultados obtenidos por M. Suárez, R. de Rebolledo y C. de Plazas ([C2], [13], [16]).

Definición. *Se dice que un criterio de convergencia es cuasi–fijo si (en adición a* (C_1) *y* (C_2)*) satisface*

(C_3) *Si s es una sucesión de X tal que cada unas de sus subsucesiones tiene a su vez una subsucesión $s' \in C(X)$, entonces $s \in C(X)$.*

(C_4) *Si una bisucesión $S : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow X$ cumple (1) la sucesión $S^{(k)} : n \mapsto S(k,n)$ es C–convergente a $x_k, k = 1, 2, ...,$ y (2) la sucesión $k \mapsto x_k$ es C–convergente a x, existe una función $Q : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que $pr_1 \circ Q$ es una aplicación propia y que $S \circ Q : \mathbb{N} \longrightarrow X$ es C–convergente a x.*

El teorema central que obtiene con M. Suárez [C.2] es el siguiente:

Teorema. *Todo punto fijo de k es extremo superior de criterios de convergencia cuasi–fijos. Recíprocamente, si un criterio C es extremo superior de criterios cuasi–fijos, entonces C es punto fijo de k.*

4. Topología categórica

Hay categorías de conjuntos estructurados, muy parecidas a la de los espacios topológicos, que tienen un *funtor olvido* $\mathbb{O}_e : \mathcal{C} \longrightarrow Conj$ que olvida la estructura y retiene el conjunto subyacente. Tales categorías disponen también de un funtor $\mathbb{O}_c : \mathcal{C} \longrightarrow Conj$, contravariante en este caso, encargado de poner de relieve la estructura. En el lenguaje de G. Preuss (cf. [12]), $\mathbb{O}_e$ define sobre $\mathcal{C}$ una estructura de categoría topológica, como ya sucedía en Top. Además, en las categorías en las que $\mathbb{O}_c$ es un funtor representable (en Top, $\mathbb{O}_c$ está representado por el espacio de Sierpinski), se puede demostrar a veces que existen ciertos objetos, "los objetos de Sierpinski", que no solamente revelan, sino que generan la estructura de la categoría $\mathcal{C}$.

En [D1] y [D2], C. Ruiz estudia el funtor $\mathbb{O}_e : Top \longrightarrow Conj$, tomando caminos mucho más generales que los que siguen Preuss [12] y Adamek [1]. Comienza por analizar la estructura de retículo en las fibras $Fib(X, \mathbb{O}_e)$ sobre un conjunto X inducida por la estructura categórica de Top. Estableciendo relaciones, en términos de la adjunción de Ore, entre las fibras $Fib(X, \mathbb{O}_e)$ y $Fib(Y, \mathbb{O}_e)$, una por cada morfismo $X \to Y$, obtiene un funtor de clasificación $\mathbb{O}_e^*$ de la categoría $Conj$ en la categoría de los pares adjuntos. Estos hechos los generaliza a categorías arbitrarias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, con tal de que exista un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, *fuertemente fiel*, es decir, tal que:

(1) Para cada pareja de objetos X, Y de $\mathcal{C}$, la función

$$\mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$$

sea inyectiva.

(2) Si X, Y en $\mathcal{C}$ son tales que $F(X) = F(Y) = A$, y si $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo de $\mathcal{C}$ tal que $F(f) = 1_A$, la identidad de A en $\mathcal{D}$, entonces $X = Y$ y $f = 1_X$ en $\mathcal{C}$.

Imitando las construcciones de las topologías iniciales y finales, introduce entonces los conceptos de *propiedad universal inicial* y de *propiedad universal final*:

Definición. *Una flecha $f : Y \longrightarrow X$ de una categoría $\mathcal{C}$ satisface la propiedad universal inicial con respecto al funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, si para todo objeto Z de $\mathcal{C}$, toda flecha $g : F(Z) \longrightarrow F(Y)$ de la categoría $\mathcal{D}$ y toda flecha $h : Z \longrightarrow X$ de $\mathcal{C}$ tal que $F(h) = F(f) \circ g$, existe una flecha $\widetilde{g} : Z \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ tal que $F(\widetilde{g}) = g$ y $f \circ \widetilde{g} = h$.*

Estudia entonces las clases $Pui(F)$ y, dualmente, $Puf(F)$, donde $Pui(F)$ es la clase de las flechas en $\mathcal{C}$ que satisfacen la propiedad universal inicial, y Puf(F), las que satisfacen la propiedad universal final. Demuestra entonces que

1. Si f y g están en $Pui(F)$ y son compatibles, entonces $g \circ f$ está en $Pui(F)$.
2. Las identidades de $\mathcal{C}$ están en $Pui(F)$.
3. $Pui(F)$ contiene todos los isomorfismos.
4. Si f está en $Pui(F)$ y g es un retracto de f, entonces g está en $Pui(F)$.
5. La clase $Pui(F)$ es estable por cambio de base cuando el funtor F transforma diagramas cartesianos en diagramas cartesianos.
6. Si L representa el límite proyectivo de una sucesión (A_n, f_n), y si cada f_i está en $Pui(F)$, entonces, siempre que F conmute con límites proyectivos secuenciales, toda flecha estructural del límite está en $Pui(F)$.
7. Siempre que F conmute con productos, $Pui(F)$ es estable por productos.

Establece también resultados análogos para $Puf(F)$.

En [D3], C. Ruiz se ocupa de una categoría que denota Col. Esta tiene por objetos las parejas $(X, \mathcal{A})$ en las que X es un conjunto y $\mathcal{A}$ es un subconjunto del conjunto de partes de X, y como flechas, las aplicaciones $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$, donde $f : X \to Y$ es una función tal que, para todo B en $\mathcal{B}$, $f^{-1}B$ está en $\mathcal{A}$. A continuación analiza las subcategorías adjuntas de Col.

Definición. *Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de la categoría Col. Sea $I : C \to Col$ el funtor de inclusión. Diremos que $\mathcal{C}$ es adjunta a la izquierda en Col, si existen un funtor $R : \mathcal{C} \to Col$ y una biyección natural*

$$\mathcal{C}(A, R(B)) \cong Col(I(A), B),$$

donde A es cualquier objeto de $\mathcal{C}$ y B, cualquiera de Col.

Establece entonces que dicho isomorfismo da lugar a las transformaciones naturales μ y λ definidas para A, B en $\mathcal{C}$ por $\lambda_A : A \to R(A)$, $\mu_B : R(B)\ R(B) \to B$

(aquí hemos identificado $I(A) = A$ para todo A en $\mathcal{C}$). La primera de éstas es un isomorfismo, pues $\mathcal{C}$ es plena en Col. El inverso de λ_A es justamente $\mu_{I(A)} = \mu_A$. En general, μ_B no es isomorfismo. Además, se está suponiendo que los conjuntos subyacentes a B y $R(B)$ coninciden, así que R se encarga de modificar la estructura sin alterar el conjunto subyacente: Si B es el objeto $(X, \mathcal{A})$, entonces $R(B)$ es de la forma $(X, \mathcal{R}_X(\mathcal{A}))$, lo cual da lugar entonces, para cada conjunto X, a una función

$$\mathcal{R}_X : P^2X \to \mathcal{C}(X) \subseteq P^2X,\ P^2X = P(P(X)),$$

tal que $A \subseteq \mathcal{R}_X(A)$. En esas condiciones se tiene:

Proposición. *La función de inclusión* $\mathcal{C}(X) \to P^2(X)$ *es adjunta a la derecha de* $\mathcal{R}_X$.

Ahora localiza en Col un "objeto de Sierpinski" que le permite revelar estructuras: Si $\mathbf{S} = (\mathbb{Z}_2, \{\{1\}\})$, demuestra entonces que

Proposición. *El Objeto* $\mathbf{S}$ *representa al funtor* $\mathbb{O}_c : Col \to Conj$. *Es decir, existe un isomorfismo natural en* X*:*

$$\mathbb{O}_e(X) \cong Col(X, \mathbf{S}).$$

Finalmente, establece que

Teorema. *El objeto* $\mathbf{S}$ *es un generador de* Col.

Con esto damos por terminada nuestra exposición.

Bibliografía de Carlos J. Ruiz

[A1] C. Ruiz & R. Ruiz, *Any equivalence relation over a category is a simplicial homotopy*, Rev. Col. Mat. **X** (1976), 151–160.

[A2] C. Ruiz & R. Ruiz, *Remark about the Eilenberg–Zilber type decomposition in cosimplicial sets*, Rev. Col. Mat. **XII** (1978), 61–82.

[A3] C. Ruiz & R. Ruiz, *Conditions for a realization funtor to commute with finite products*, Rev. Col. Mat. **XV** (1981), 113–146.

[A4] C. Ruiz & R. Ruiz, *Characterization of the Set–Theoretical geometric realization in the noneuclidean case*, Proceedings of the Am. Math. Soc. **81** (1981), 321–324.

[A5] C. Ruiz, *Complejos Celulares Generales*, Universidad Nacional (mimeo), 1979.

[A6] C. Ruiz & J. Luna, *Normalidad en realizaciones Generalizadas* ($R_Y(X)$), Collectánea Mathemática **XXXIII** (1982), 289–297.

[B1] L. Acosta, C. Ruiz , J. Luna & A. Duque, *Metodos Topológicos en Sistemas Conservativos*, Tercer Col. Distrital de Mat. y Est., Bogotá, 1986.

[B2] A. Duque, J. Luna & C. Ruiz, *Movimientos en el dominio de una función*, Memorias del Encuentro de Topología No. 3, Bogotá, 1989.

[B3] A. Duque, J. Luna & C. Ruiz, *La noción de "rechazo" en topología*, Boletín de Mat. y Est. **II** (1989), 35–39.

[B4] A. Duque, J. Luna & C. Ruiz, *Fibrados con fibras totalmente disconexas*, Memorias Segundas Jornadas Matemáticas (1990), Medellín, 58–69.

[B5] A. Duque, J. Luna & C. Ruiz, *Una estratificación del espacio* $\mathbb{J} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, Memoirs Ninth Summer Conference on General Topology and Applications, Slippery Rock, PA, 1993.

[C1] C. Ruiz, *Topología o convergencia*, Ed. La Rana y el Aguila, U.P.T.C., Tunja, 1975.

[C2] C. Ruiz & M. Suarez, *Topología o convergencia (fascículo 2)*, X Col. Col. de Mat., S.C.M., Paipa, 1980.

[C3] C. Ruiz, *Convergencias asociadas a topologías: puntos fijos de un operador*, Bol. Mat. **XV** (1981), 65–79.
[C4] C. Ruiz, *Pares adjuntos y funciones de clausura*, Memorias del Encuentro de Topología No. 1, Bogotá, 1987.
[C5] C. Ruiz, *Sobre la noción de función topológica*, Memorias del Encuentro de Topología No. 3, Bogotá, 1989.
[C6] C. Ruiz & S. Sabogal, *Algunos ejemplos de adjunción en extensiones unipuntuales*, Memorias del Encuentro de Topología No. 3, Bogotá, 1989.
[D1] C. Ruiz, *Seminario sobre Topología Categórica*, Universidad Nal, Santafé de Bogotá, 1991, 1992,1992.
[D2] C. Ruiz & A. Oostra, *Algunos Tópicos Introductivos a la Topología Categórica*, U. Nal, U. Javeriana, Santafé de Bogotá, 1991.
[D3] C. Ruiz, *Objetos reveladores de estructuras*, Lecturas Matemáticas **XIII** (1992), 75–83.
[D4] A. Duque, J. Luna & C. Ruiz, *La categoría Adj en topología categórica*, Lecturas Matemáticas **XIII** (1992), 99–104.

Bibliografía de otros autores

[1] J. Adamek, *Theory of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.
[2] N. Bourbaki, *General Topology*, Addison–Wesley, Reading, Mass., 1966.
[3] R. M. Corless, *Continued fractions and chaos*, Amer. Math. Monthly **99 N 3** (1992), 203–215.
[4] R. L. Devaney, *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison–Wesley, Reading, MA., 1989.
[5] P. Gabriel & M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Springer, New York, 1967.
[6] M. J. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, New York, N.Y., 1973.
[7] C. Godbillon, *Elements de Topologie Algèbrique*, Hermann, Paris, 1974.
[8] A. T. Lundell & S. Weingram, *The Topology of CW-Complexes*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1969.
[9] D. M. Kan, *Adjoint funtors*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 357–362.
[10] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlín, 1971.
[11] J. Milnor, *The geometric realization of a semi–simplicial complex*, Ann. of Math. **65** (1957), 357–362.
[12] G. Preuss, *Theory of Topological Structures*, Reidel, Dordrecht, 1988.
[13] R. de Rebolledo & C. de Plazas, *Convergencia en espacios topológicos*, Tesis de Maestría, U.P.N. Tunja, 1976.
[14] R. Ruiz, *Change of Models in Top and* $\Delta^\circ S$, Doctoral Thesis, Temple Univ., Philadelphia, Pa, 1978.
[15] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw–Hill, New York, N.Y., 1966.
[16] M. Suarez, *Sobre Convergencia*, (Mimeo), 1981.
[17] J. H. C. Whitehead, *Combinatorial Homotopy I*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 213–245.

(Recibido en noviembre de 1993, revisado en enero de 1995)

Joaquín Luna Torres
Departamento de Matemáticas
Universidad Distrital
Bogotá, COLOMBIA