EL CONTINUO 100 AÑOS DESPUÉS: UN NUEVO ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA CRÍTICA DE HÖLDER

VÍCTOR GONZÁLEZ ROJO
UNED

Resumen

En el libro *El continuo* Hermann Weyl analiza la noción de continuo en matemáticas y señala que el análisis clásico cae en un círculo vicioso cuando acepta el principio del supremo en su forma conjuntista. Su posición inaugura una importante y prolífica corriente en lógica-matemática, originariamente basada en el problema de los fundamentos de las matemáticas: el predicativismo dado los números naturales. No obstante, en artículos posteriores tratará este asunto considerando otras ideas. Esto permitirá la aparición de críticas interesantes, como la de Hölder, que son asimismo analizadas aquí. Además, pretendo defender que el principio del supremo clásico se puede mantener bajo ciertas condiciones, lo que puede ser entendido como otra alternativa pseudo-constructivista distinta a la de Weyl.

Abstract

In Hermann Weyl's the book *The Continuum* the notion of continuum in mathematics is analysed. The author points out that classical analysis falls into a vicious circle when it accepts the LUB-principle in its set-theoretically form. The book inaugurates an important and fruitful approach in mathematical logic, originally based on the problem of the foundations of mathematics: the predicativism given the natural numbers. However, in later articles Weyl considers other ideas when dealing with this matter, which give rise to interesting critiques such as Hölder's. In this paper I argue as well that to accept the LUB principle as Dedekind defines it, makes sense under certain conditions, what could be understood as another pseudo-constructivist position different from Wely's position.

Palabras Clave: Principio del círculo vicioso, Prediatividad, k-propiedad, Cortadura de Dedekind.

Keywords: Vicious-circle principle, Predicativity, k-property, Dedekind cut.

Recibido el 7 de octubre de 2018 — Aceptado el 15 de febrero de 2019

1. Introducción

En 2018 se cumplen cien años de la publicación del libro *El continuo* de Hermann Weyl. Feferman, en su artículo "Weyl vindicated: Das Kontinuum seventy years later" explicaba ya la trascendencia del libro y cómo éste supuso el inicio de la corriente predicativista dentro de las corrientes filosóficas de los fundamentos de la matemática[1].

En *El continuo*, Weyl analiza la idea que tiene sobre la noción de continuo en matemáticas y señala que el análisis cae en un círculo vicioso cuando acepta el principio del supremo en su forma conjuntista. Además, el matemático propone una nueva fundamentación del análisis basada en la construcción, a partir de los números naturales y de principios lógicos, de los reales. Todo lo cual le lleva a fundar el predicativismo como una opción para hacer matemáticas de una forma, a su entender, segura.

Pretendo defender dos cosas en este artículo: la primera, que Weyl se acerca al principio del círculo vicioso en *El continuo* y en artículos posteriores (Weyl 1919, 1921 y 1925) de manera distinta (además considero la discusión con Hölder a este propósito); y la segunda, que la impredicatividad, entendida como la imposibilidad de definir a partir de una totalidad de la cual lo que se quiere definir forma ya parte, y el círculo vicioso son cosas no exactamente equivalentes, en el sentido de que se puede mantener la una, rechazando la otra. Finalmente, propongo una alternativa en la cual el principio del supremo se puede mantener tal y como es formulado por Dedekind, restringiendo el universo de subconjuntos de números reales que pueden ser definidos[2].

2. *El Continuo*, cien años después

El escrito de Weyl se divide en dos partes fundamentales claramente diferenciadas atendiendo a su estructura, y en tres si se atiende a su contenido.

Formalmente el libro consta de dos capítulos, el primero de ellos tiene por título "Conjunto y función (Análisis de la formacion del concepto matemático)", y en él se incluye una parte lógica y otra matemática. La parte lógica, a su vez, tiene tres epígrafes; la matemática, algo más extensa, cinco.

El segúndo capítulo lleva por título "Concepto de número y continuo (Fundamentos del cálculo infinitesimal)", y se divide en ocho epígrafes.

Desde el punto de vista del contenido tenemos la parte lógica, la matemática y asimismo otra genuinamente filosófica. Como trataremos más adelante de las partes lógica y matemática en detalle, quisiera decir antes algo acerca de la filosófica.

En la introducción, y casi al final del segundo capítulo, Weyl nos da a conocer su posición filosófica. En la introducción nos enteramos de que Weyl considera la fenomenología de Husserl como el marco filosófico adecuado para las ideas sobre lógica y matemática que desarrollará posteriormente. Así, escribe en la introducción:

> En lo que respecta a la epistemología de la lógica, estoy de acuerdo con la concepción que Husserl presenta en sus *Investigaciones lógicas* (2ª. ed., Halle 1913); remito también a la exposición más profunda, que sitúa a la lógica en su lugar en el marco de una filosofía completa, en la obra de Husserl *Ideas para una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica (Jahrbuch für Philos. und phänomen. Forschung*, Tomo I, 1913)" [WEYL, 1918, 4].

Como hemos mencionado, en un epígrafe del segundo capítulo reflexiona sobre el continuo espacio-temporal y el matemático de modo muy refinado, contrastando sus ideas con las que al respecto sostenía Bergson y con la fenomenología.

El propósito de Weyl en el capítulo primero es introducir su lenguaje lógico, además de los principios y relaciones fundamentales para la construcción de juicios. Lo que es un juicio[3] en sentido estricto es algo muy específico. Señala en la primera frase del primer epígrafe: "Un juicio afirma un hecho: si el hecho se da, entonces el juicio es verdadero, de otro modo, decimos que es falso". Los juicios de relaciones, los esquemas de juicio y los juicios existenciales, de los que escribe que "juegan para la matemática el papel más importante", son tratados aquí.

Más adelante introduce el concepto de juicio particular y de juicio general, y caracteriza a su vez a la matemática como la actividad que trata de "juicios relevantes, generales y verdaderos". Del mismo modo, explica sucintamente conceptos como demostración (matemática), consecuencia lógica y axioma.

En la segunda parte del primer capítulo se introducen los conceptos de conjunto, relación, así como ideas tan importantes para su concepción de la matemática como el "principio de iteración" [*Iterationsprinzip*] o el círculo vicioso del análisis[4].

En la concepción weyliana de conjunto, un conjunto se puede definir de dos maneras distintas: una, dando una lista de sus elementos (lo que sólo puede hacerse con conjuntos finitos); la otra, dando una propiedad. Así escribe: "Toda propiedad original o derivada E se corresponde con un conjunto (E)". Para cada propiedad E "sobre" un dominio se hace corresponder un conjunto tal que para cada elemento x del dominio, éste pertenece al conjunto si y sólo si, tiene la propiedad E. Introduce además la noción de esquema relacional o relación ordenada, que define como esquemas relacionales o relaciones donde los objetos que "llenan" las posiciones vacías lo hacen en un determinado orden.

Otro concepto importante tratado en este capítulo es el de *proceso matemático,* que es el procedimiento por el que a partir de los objetos primitivos se forman otro tipo de objetos ideales, los conjuntos uni- y multidimensionales. Es importante señalar que estos nuevos objetos pertenecen a una esfera de existencia completamente distinta de la de los objetos primitivos.

Dentro de la categoría de objetos de una teoría matemática, para Weyl, los números naturales son la categoría de objetos principal, la que juega el papel de categoría básica, no derivada, o primigenia, que acepta de forma intuitiva como esencial para el quehacer matemático, y sobre la que construirá el análisis. Al igual que Poincaré, cree que es en la representación de la iteración, en la representación de la secuencia de los números naturales, donde descansa el fundamento último del pensamiento matemático. En este sentido se podría llamar a Weyl "intuicionista", si se tiene en cuenta que cree que esta intuición "pura" [*reine Anschauung*], es la que, además, se establece como fundamento epistemológico básico de la teoría de conjuntos.

Al introducir el concepto de función explica que tiene dos raíces. Una, la que tiene que ver con el mundo material o físico, cuyas dependencias naturales (dadas por la naturaleza) [*naturgegebenen Abhängigkeiten*] nos dirigen hacia esta primera raíz; la segunda es la aritmético-algebraica. El punto en que estas dos fuentes diversas e independientes la una de la otra se tocan, es en el concepto de ley natural [*Naturgesetz*]. Estas dos fuentes constituirán -como se verá en el segundo capítulo- una de las ideas filosóficas sobre el continuo más interesantes y originales de Weyl. El problema (epistemológico) tiene que ver entonces con cómo conjugar, por un lado, el continuo intuitivo espacio-temporal con el continuo del que trata el análisis, y además, cómo explicar su relación así como su dependencia o necesidad.

El capítulo segundo tiene por objetivo la *construcción* del análisis. Para ello se deben aplicar los principios definidos anteriormente para conseguir construir los números racionales, y a partir de ellos los reales. Weyl empieza con los naturales en esta segunda parte. Demuestra propiedades aritméticas básicas, así como las propiedades conmutativa y asociativa, e introduce el concepto de cardinal asociándolo al de cortadura. Después le llega el turno a las fracciones, de las que derivará la defición de número racional[5]. En este apartado, como hizo en el anterior, se definen las operaciones básicas y las propiedades conmutativa y asociativa.

Tras haber introducido a partir de la categoría fundamental de los números naturales los racionales, en el apartado tercero define los números reales. Aquí, el matemático se ayuda de las cortaduras de Dedekind, y de esta forma define un número real como "[u]na cortadura abierta de números racionales, que ni es el conjunto vacío ni es el conjunto universal". Por tanto, los reales son "conjuntos cuatri-dimensionales especiales de números naturales". Añade que ser un número real, es una "propiedad finita". Esto es algo importante, pues es una consecuencia natural de lo que Weyl se ha propuesto al construir los números reales a partir de los racionales. Lo que esto significa concretamente es que un número real se construye a partir de los principios dados en el capítulo primero suponiendo dado el conjunto de los números naturales.

Después de definir bastantes propiedades (por ejemplo, el concepto de número algebraico), llegamos al apartado donde trata de la convergencia, de las sucesiones de Cauchy y de las series. Es aquí donde Weyl traza la línea entre lo que se admitirá en su análisis y lo que deberá ser rechazado del análisis clásico. El criterio de convergencia que utiliza debe su validez al concepto de límite inferior de una sucesión de reales que construye a partir de los números racionales y de los naturales.

La idea clave de Weyl, con la que inaugura una nueva forma de hacer matemáticas y otra corriente en la fundamentación de las matemáticas, es la de admitir el principio del supremo sólo para secuencias de números reales, y no para conjuntos de números reales arbitrarios. Se debe señalar que esta idea y su desarrollo, así como -lo más importante- las implicaciones[6] que tiene para el análisis en particular, y para la matemática en general, es de lo más relevante que Weyl ha aportado como matemático y pensador.

Nombra cinco proposiones (“supuestamente equivalentes”, escribe) que, en vez del principio de convergencia de Cauchy sirven como punto de partida del análisis, de las cuales sólo la primera y la segunda son válidas en su construcción; la otras tres[7] - entre las que se encuentra el famoso teorema (principio[8], según se entienda la construcción de los reales), que dice que un conjunto acotado de números reales tiene un límite inferior y otro superior precisos -, no pueden serlo de manera consistente. La invalidez de estas proposiciones, que hasta ahora “solían servir para la deducción de todas las afirmaciones del análisis”, tiene -como dice- la consecuencia fundamental de que la formación de conceptos en el análisis clásico, así como algunas demostraciones donde ellos intervienen, deben ser abandonados.

La proposción sexta es el teorema de Heine-Borel, el cual ha de ser interpretado correctamente (en particular el concepto de “sucesión de intervalos”) para que resulte válido. El teorema se convierte en falso si se sustituye “sucesión de intervalos” por “conjunto de intervalos cualesquiera”, o si no se considera la categoría fundamental “número natural” a la hora de dar la sucesión de intervalos.

Llegados a este punto, conviene decir algo más sobre la proposición cuarta. En ella se hace patente el círculo vicioso que critica Weyl al análisis clásico, y que es, podríamos decir, el *leitmotiv* que le impulsa a escribir *El continuo*. Como indicó en el apartado seis del capítulo primero, el no seguir el “procedimiento restringido” [*das engere Verfahren*] lleva a un análisis donde no aparecen niveles, donde las propiedades de segundo nivel no se definen a partir de la totalidad de propiedades de primer nivel. Pero precisamente por esto, es decir, debido a que el análisis clásico no sigue este procedimiento, las definiciones y las demostraciones tomarán necesariamente, según Weyl, la forma de un círculo vicioso.

A la hora de construir la cota superior de un conjunto acotado, esa cota se define por medio de un real de primer nivel; se utiliza el cuantificador “existe”, el cual cuantifica sobre un real de primer nivel, por tanto, la cota superior es un número real, pero de segundo nivel. Esta es la argumentación de Weyl.

El problema surge por pretender *construir* una tal cota *a partir de* un conjunto dado cualquiera. Weyl ha dejado claro que la aplicación del proceso matemático tiene como consecuencia la aparición de los niveles. Si dado un conjunto acotado M de reales, se pretende construir su cota superior, se tendrá que formar un conjunto de racionales con una relación de pertenencia que se refiere a conjuntos de primer nivel.

A él pertenecerán un número racional r si -y sólo si- existe un real de primer nivel de M menor que r. Esto es, el salto de niveles [CHIHARA 1973, p. 53] ocurre siempre que aparezca una definición donde el *definiens* tenga un cuantificador que cuantifique a un objeto de un nivel determinado.

El libro continua con una sección dedicada a las funciones continuas, donde demuestra tres proposiciones fundamentales que son la base para el desarrollo de la teoría de la diferenciación, así como de la teoría de la integración. Weyl ha demostrado por tanto que, en su sistema, estos teoremas son válidos. No obstante, recalca que la cosa no es tan fácil si de lo que se trata es de las avanzadas teorías de la integral y la medida de "Riemann, Darboux, Cantor, Jordan, Lebesgue y Caratheodory".

La sección sexta -como ya hemos indicado- trata sobre el continuo intuitivo y el matemático. Es aquí donde expone Weyl su concepción genuinamente fenomenológica al tratar de ambos. De este modo explica la diferencia entre los continuos, y la formulación (o interpretación matemática) del continuo intuitivo estableciendo unas condiciones que harían posible la formulación misma y su tratamiento exhaustivo.

En las dos últimas secciones de este segundo capítulo pretende fundamentar -poniendo en coincidencia la teoría de números a través, a través del axioma de continuidad- conceptos como las magnitudes y las medidas, además de, a partir de aquéllas, fundamentar de forma matemática la geometría del espacio dentro del análisis que ha desarrollado.

Finalmente, el libro se cierra con una breve conclusión donde Weyl pone de manifiesto cómo con los principios presentados se puede construir de forma completa el primer estadio [*ersten Stadien vollzogen*] del análisis, y pone de relieve de nuevo la diferencia que existe entre el continuo intuitivo y el continuo matemático construido y presentado en el libro. A pesar de esta diferencia opina, sin embargo, que es necesario construir un continuo matemático de la forma que lo ha hecho, si lo que se quiere es hacer posible el tratamiento de los tipos de continuos intuitivos a través de la matemática.

3. EL PROBLEMA DEL CÍRCULO VICIOSO

La diferencia entre cómo Weyl trata el principio del supremo en *El continuo* y en artículos posteriores, radica en que en *El continuo* el argumento utilizado se fundamenta en la teoría de los tipos de Russell teniendo en cuenta lo que denomina el "procedimiento restringido" [*das engere Verfahren*], llegando a la conclusión de que si no se observan niveles, la definición de supremo contiene un círculo vicioso. Sin embargo, en los artículos posteriores su crítica se centra en el concepto de propiedad definida extensionalmente [*umfangs-definit*].

3.1. El círculo vicioso en *El continuo*

Como es sabido, este principio tiene una larga tradición en la historia de la lógica contemporánea. Russell lo analizó al tratar las paradojas que surgieron de la teoría (naif) de conjuntos, y Poincaré hizo referencia al mismo en varios de sus escritos donde explicaba paradojas semánticas como la de Richard o la de Berry [Chihara 1973, p. 138 y ss.].

Gödel lo trata en su artículo "La lógica matemática de Russell" [Gödel 1981, p. 297] donde escribe lo siguiente:

> Me refiero en particular al principio del círculo vicioso, que prohíbe un cierto tipo de "circularidad" a la que se hace responsable de las paradojas. La falacia, según se sostiene, consiste en la circunstancia de que se definen (o se asumen tácitamente) totalidades cuya existencia implica la existencia de ciertos nuevos elementos de la misma totalidad, a saber, elementos definibles únicamente en términos de la totalidad entera. Esto lleva a la formulación del principio que dice que ninguna totalidad puede contener miembros definibles únicamente en términos de la totalidad, o miembros que involucran o presuponen esta totalidad. [Gödel 1981, p. 306].

Más adelante apunta que tal y como está formulado el principio, correspondiendo a la expresiones "definible en términos de", "involucra" y "presupone", se tiene en realidad tres principios diferentes. El segundo y el tercero son -según Gödel- mucho más plausibles que el primero. Es éste en cambio, el que prohíbe las definiciones impredicativas, el que tiene como consecuencia principal que la derivación de las matemáticas a partir de la lógica desarrollada por Dedekind o Frege sea imposible.

Gödel se adscribe en este artículo al platonismo[9], de hecho, escribe a propósito de su posición filosófica que puesto que

> no se conoce otro método de definir fuera del sistema[10] que los que ya involucran totalidades más amplias que las que aparecen en los sistemas [...]. Prefiero considerar esto como una prueba de que el principio del círculo vicioso es falso que como una prueba de que la matemática clásica es falsa [Gödel 1981, p. 308].

Volviendo a Weyl, en *El continuo* el principio se formula citando a Russell del siguiente modo[11]: "*No totality can contain members defined in terms of itself*" [Weyl 1919, p. 36].

Una pregunta interesante es si basta con esto. Tal y como lo expresa Russell no se dice nada de la totalidad en cuestión. Y Weyl tampoco. Es suficiente -a primera vista- con que se respeten los niveles.

Como dijimos más arriba el salto de nivel, que se produce si se cuantifica sobre una variable de un nivel dado, evita que un objeto de un dominio de un nivel determinado se defina a partir de objetos del mismo nivel. Weyl escribe en la parte segunda, epígrafe sexto, cuando analiza la definición de supremo lo siguiente:

> Sea por ejemplo M un conjunto acotado de reales del 1. nivel. Para construir *[konstruieren]* su cota superior se tiene que formar un conjunto ϒ de números racionales, al cual pertenecerá un número racional *r* si y sólo si existe un número real de 1. nivel que pertenece a M y que es mayor que *r*. Este conjunto ϒ tiene las propiedades a) b) c), y es por tanto un número real, pero un real de 2. nivel, pues en su definición aparece el "existe" en conexión con "un número real de 1. nivel " (es decir, "un conjunto de 1. nivel de números racionales" o "una propiedad de 1. nivel primitiva o derivada"). El círculo vicioso disfrazado debido a la naturaleza nebulosa de los conceptos de conjunto y función habituales que hacemos notar aquí, no es un fallo formal en la construcción del análisis que se pueda eliminar fácilmente [Weyl 1918, p. 23].

En *El continuo* se considera el dominio de los números naturales como una totalidad determinada y que nos es dada. Sin embargo, al tratar los números reales como cortaduras de Dedekind generales entran en juego propiedades, vale decir, conjuntos de números racionales, y es cuando el principio cobra importancia. Esto es así debido a que Weyl considera que los números reales no están "suficientemente" bien definidos.

La crítica al análisis clásico que pone de relieve el argumento de los niveles tiene sentido si se admite que un análisis con niveles es algo "artificial e inservible" [*künstlich und unbrauchbar*] [Weyl 1918, p. 23].

Weyl no se pregunta sin embargo si puede ser lógicamente consistente. En principio, el análisis con niveles aunque sea "artificial", no caería en el problema del círculo vicioso tal y como se presenta. Pero la totalidad de reales es, en cada nivel, tan poco específica como lo son los reales, llamémosles estándar, aunque sea en un análisis en principio desarrollable.

La explicación de por qué la definición del supremo de un conjunto acotado de reales contiene un círculo vicioso tiene por consiguiente su fundamento último en la teoría ramificada de tipos de Russell. Esto es, que no observar la solución propuesta por Russell conduce necesariamente a definiciones que contienen un círculo vicioso. No obstante, Weyl no está del todo satisfecho con esta solución, que sólo le sirve para señalar el problema, además, el axioma de reducibilidad no le convence[12]. Es por ello que la solución propuesta en su libro será la denominada (posteriormente, por otros filósofos de la matemática) solución predicativa dado los números naturales (o módulo los números naturales).

3.2. Concepciones del círculo vicioso en 1919, 1921 y 1925

Acabamos de analizar cómo el principio es entendido en *El continuo*. Unos años más tarde Weyl analizará también el problema en una serie de artículos, si bien su crítica la enfocará desde un punto de vista algo distinto a como aparece en el libro.

Comencemos primero con el artículo de 1919 publicado en el *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* y que lleva por título "Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis"[13]. El argumento dado por Weyl tiene la siguiente forma.

Weyl pretende demostrar [*beweisen*] que conceptos como "propiedad de números naturales" y "propiedad de propiedades de números naturales" no son conceptos "extensionalmente definidos" [*umfangs-definit*], es decir, dados como una totalidad determinada y completa.

Primero[14] afirma que el concepto de número natural es extensionalmente definido, y que esto es algo que se nos da intuitivamente. Sin embargo, existen otros conceptos generales como "objeto" o "propiedad" que no lo son. Para ver que es así define el dominio de k-propiedades de los números naturales. El concepto de k-propiedad es, por definición, extensionalmente definido. Después, supone una propiedad A de propiedades de números naturales. Entonces, según Weyl, siempre se puede definir una nueva propiedad P_A que cae fuera del dominio de las k-propiedades de la siguiente forma: x posee P_A si y sólo si existe una k-propiedad de tipo A que posee x. Weyl afirma que el significado de esta P_A es totalmente distinto del de las k-propiedades. Después aclara que no obstante esto no significa que no exista en el dominio de las k-propiedades una propiedad que tenga la misma extensión [*umfangs-gleich*[15]] que aquélla.

No queda del todo claro a lo que se refiere con que el "sentido" de la nueva propiedad así definida se distingue *absolutamente* [*ganz gewiss*] de cualquier k-propiedad. Esto puede entenderse de un modo intuitivo como que, al referirse la nueva propiedad P_A a una k-propiedad que pertenece por definición a un dominio extensionalmente definido, no puede ser una de aquéllas. Lo que no es más que admitir la solución russelliana —quizá de forma no muy clara— en el artículo de marras.

Se llega entonces a la conclusión de que el concepto de número real no es un concepto extensionalmente definido [*dass der Begriff der reellen Zahl nicht unfangs-definit ist*[16]], y que por consiguiente el concepto de supremo[17] de un conjunto de reales arbitrario no tiene sentido.

Su explicación parte de que si un real es una cortadura de Dedekind, es decir, un conjunto de racionales que se corresponde con una determinada propiedad de los racionales, entonces un conjunto de números reales se corresponde con una propiedad A de propiedades de números racionales. El supremo de este conjunto de reales es, a su vez, el conjunto de aquellos racionales x que tienen una determinada propiedad P_A, a saber, la siguiente: la de que existe una propiedad de tipo A, la cual es poseída por x.

Es por ello que, después de dar esta explicación, escribe Weyl que esto es evidentemente un sinsentido [*evident sinnlos*], pues la existencia de una propiedad como P_A depende de que exista (de modo general y sin limitación) una propiedad de cierto tipo, tal que...etc. Por tanto, concluye, el concepto de "propiedad de números racionales" no es un concepto definido extensionalmente.

La argumentación de Weyl es entonces, que dado que una propiedad se define a partir del dominio de las k-propiedades, dominio extensionalmente definido, no puede ser que la nueva propiedad pertenezca a este dominio. Al estar definida a partir de la totalidad de las k-propiedades, *a fortiori* se concluye que no puede ser una de ellas.

Intentemos analizar lo expuesto hasta ahora más detenidamente. Si se compara este artículo de 1919 con la explicación ofrecida en *El continuo*, parece que el *motivo* realmente ofrecido es el de establecer como (cuasi) normativo el principio del círculo vicioso para conceptos como "propiedades de números racionales" (o conjuntos de números racionales). En ese caso, la nueva propiedad definida a partir de las k-propiedades del tipo A, debe ser una propiedad que no se encuentra en el dominio de las k-propiedades, y por tanto se puede concluir que no tiene sentido de forma general la pregunta sobre si existe el supremo de un conjunto de reales arbitrario.

El mismo argumento es utilizado por Weyl en el largo artículo de 1921[18] "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik" [Weyl 1921].

En este artículo repite parte de lo dicho en 1919, si bien hay algunas aportaciones interesantes que merecen ser analizadas con más detalle. Vale la pena citar *in extenso* lo que escribe al respecto:

> [Let us now look at the construction of the upper bound of an arbitrary such set A of real numbers!. The bound, a real number, is given by a property E_A of rational numbers. In fact E_A is specified as follows: It obtains of a rational number *1* if and only if *there is a property E of the kind A* that obtains of *x* (if there is a real number E in the set A that lies below[19] *x*). But this definition, if it is to be meaningful, not only counts on the fact that the concept of a property of rational numbers is by itself clear and unambiguous, but also on the fact that the totality of *"all possible" properties* is in itself determined and delimited, that is, in principle surveyable. This, because it counts on the fact that the question "*Is there* a property E of a certain nature?" (that is, one that at the same time is of kind A and obtains of *x*) is meaningful, that is, that this question is addressing an existing state of affairs that allows one to answer the question with yes or no. *This, however, is evidently not the case.* For let us assume that we have managed, in some way or other, to delineate such a determined and delimited domain of properties of rational numbers (let us call them k-properties). Then it has a clear meaning to ask with regard to any rational number *x* whether there is a k-property of kind A that obtains of *x*. If this is the case, let us attribute the property E_A to *it,* and otherwise deny it. But it is now very clear from the sense of this property E_A (whose definition is indeed based on the totality of all k-properties) that it stands *outside* the k-domain. This reveals that the concept "property of rational numbers" is not, as I shall say, extensionally definite *[umfangs-definit]* and that our definition of the upper bound contains a vicious circle]. [Mancosu 1997, 87-88].

En este extracto observamos que para Weyl la definición tiene sentido si la totalidad de todas las posibles propiedades es algo determinado y delimitado, como dice, en principio algo de lo que se puede tener una visión de conjunto. Y esto es así porque se fundamenta en el hecho de que la pregunta sobre si existe una propiedad de cierta naturaleza es sólo significativa, si se puede responder con un sí o con un no. Después da un salto, no suficientemente claro, y escribe que evidentemente éste no es el caso.

De nuevo su justificación consiste en formar el dominio de las k-propiedades, y definir a partir de éste una propiedad, cuya definición ciertamente se basa en la totalidad definida de las k-propiedades, que está por tanto, -a esto se refiere con sentido[20]- fuera del dominio de las k-propiedades. Pero no ha demostrado nada hasta ahora. La pregunta "*Is there a property E of a certain nature?*" se puede responder si se suponen las k-propiedades así como la forma de definir a partir de ellas la propiedad E.

El argumento en detalle tiene la siguiente forma: 1) suponer un dominio extensionalmente definido; 2) definir E a partir de este dominio; 3) constatar que E no pertenece al dominio; 4) concluir que el concepto de propiedad de los racionales no es extensionalmente definido; 5) concluir que la definición de supremo contiene un círculo vicioso.

La objeción a este argumento sería: 1) que el salto de nivel no depende de cómo sea el dominio de las variables sobre el que se cuantifica, luego no se puede concluir que la nueva propiedad no sea extensionalmente equivalente[21] a alguna k-propiedad; 2) la conexión entre (4) y (5), no es del todo clara. La propiedad E_A pertenece a un nivel superior de propiedades[22]. El circulo vicioso existe si un objeto se define a partir de la totalidad de la que forma parte. Weyl afirma, de la manera en que está definda E_A, que no pertenece al dominio de k-propiedades porque asume que el dominio es extensionalmente definido. La cuestión es que si la totalidad no es extensionalmente definida no se puede afirmar o negar que la propiedad E se defina a partir de la totalidad de la que ella misma forma parte. Pues, ¿cómo podemos establecer -asumiendo el argumento de Weyl- que la propiedad E pertenece a la totalidad, si ésta no es un dominio de k-propiedades, i.e., extensionalmente definido?

Es decir, desde la posición de Weyl no se puede decir nada de dominios que no sean extensionalmente definidos. Podría prohibir -digámoslo así- asumiendo su punto de partida, dominios de objetos que no fuese extensionalmente definidos, por las razones aducidas más arriba, pero no concluir que existe un círculo vicioso en la definición de supremo. Realmente, el problema es que Weyl se compromete con una cardinalidad que de forma implícita subyace en su concepto de k-propiedad, pero la definición clásica de supremo no hace referencia a ninguna clase de cardinalidad.

Nótese además, que si un dominio dado de k-propiedades es extensionalmente definido, éstas totalidades son precisamente las que se dejan tratar de forma "impredicativa", por estar bien definidas[23] (*cfr*. ejemplo de Ramsey[24]).

Es aquí donde el círculo vicioso, como lo expuso en *El continuo*, difiere de la explicación propuesta en los artículos. Weyl ha introducido ya implícitamente la cardinalidad de los números naturales como elemento decisivo cuando afirma la existencia de un círculo vicioso en el análisis clásico.

En el artículo de 1925 titulado "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik"[25], se refiere de nuevo a ideas tratadas ya anteriormente. Sin embargo, se aporta una visión más esclarecedora de lo expuesto en los artículos de 1919 y 1921. Principalmente lo consigue introduciendo la noción de concepto de contenido definido [*inhalts-definit*] (esto es, determinado de forma precisa y no ambigua), ya esbozada anteriormente, y relacionando la idea de k-propiedad con los niveles de Russell.

De este modo observa que no todo concepto de contenido definido es extensionalmente definido; v.gr., el concepto "propiedad de los números naturales". Decir que un concepto *b* es extensionalmente definido no es sólo decir que la pregunta: "¿Tiene el objeto X la propiedad A?" tiene un sentido preciso, sino que para cualquier objeto X que caiga bajo el concepto *b* tiene también sentido la pregunta existencial: "¿Existe un objeto que cae bajo *b* con la propiedad A?".

En el artículo aparecen después las nociones de k-propiedades y de propiedad de propiedades de los números naturales. Aquí conviene dar el ejemplo del propio Weyl. La propiedad en cuestión la define de la siguiente manera: "Llamemos a una propiedad de los números naturales E de tipo A, si el número 1 la posee".

Más adelante presenta la definición D, la cual tiene la forma ya conocida: "*x* tiene la propiedad E_A significa que existe una k-propiedad del tipo A la cual es poseída por *x*".

Suponiendo que las propiedades de los números naturales sean definidas como de primer nivel, de acuerdo con el esquema D, y aplicando "todo" y "existe" a propiedades extensionalmente definidas del primer nivel se obtienen las de segundo nivel.

Weyl nos informa de que la necesidad de esta formación de niveles fue claramente reconocida por Russell, y que si se suprimiera, entonces se podría cuantificar de forma irrestrictiva sobre propiedades en general, y que por tanto uno se vería envuelto en un círculo vicioso sin fin.

Pero es precisamente esto lo que ocurre, según Weyl, con la defición dada por Dedekind de supremo. Citemos a Weyl al respecto:

> One only needs to consider that, according to Dedekind, a real number (E) is a set of rational numbers that itself corresponds to a property E in the realm of rational numbers; "the rational number *x* is smaller than (E)" means as much as: *x* has the property E. The upper bound γ then corresponds indeed to that property E_A a rational number *x* possesses if and only if there is any property of rational numbers of kind A at all that holds of *x*. The uniform concept of number thus seems to be falling to pieces; one would obtain real numbers of first, second, third, . . . level, such that, for example, the upper bound of a set of numbers of first level would not generally again be a number of the same kind, but of the second level. Such an analysis, however, is completely useless. One escapes the dilemma if the proposition holds that every property of second level E_2 is, even though not equal in sense, at least extensionally equal to a property E_1, of the first level. Yet, a proof for this has never been attempted, and there is not the slightest indication that one could put up construction principles for the properties of first level that would be far-reaching enough to ensure the correctness of the proposition [Mancosu 1997, p. 132].

Aquí observamos que el concepto de k-propiedad, al ser extensionalmente definido, es lo único que Weyl acepta en un esquema de definición como D. Y que cuantificar sobre k-propiedades *asegura* que las de segundo nivel sean también extensionalmente definidas, i.e., bien definidas en un sentido weyliano.

El origen del problema en el argumento de Weyl visto en estos tres artículos, no es no contemplar el salto de niveles como en *El continuo*, sino que no se tenga (no se pueda dar) un concepto adecuado de k-propiedad para los números reales, pero hay que notar, que esto no es más que apelar de nuevo a que sólo el concepto de número natural es intuitivo, y por tanto extensionalmente definido.

En referencia al principio del supremo, se puede decir que Weyl considera que es una propiedad que tiene un conjunto de reales (i.e., propiedad de propiedades de racionales), cuando más bien se debiera entender como una propiedad de un real *respecto de* cada elemento de un conjunto. Esto es parte de lo que le critica Hölder, como veremos a continuación.

3.3. Crítica de Hölder

Hölder contestará a Weyl, a propósito del artículo publicado en 1919, en otro titulado "Der angebliche circulos vitiosus und die sogannante Grundlagekrise in der Analysis"[26]. La crítica a la forma en que el matemático trata el círculo vicioso tiene la siguiente estructura.

Primero, Hölder deja claro que, como él, Weyl acepta el tercio excluso y que, asimismo, sólo mediante una ley se puede definir una totalidad infinita[27]. Por tanto, la respuesta a la pregunta de si entre los objetos de la totalidad *existe* uno (dado por una ley) que tenga la propiedad P_A en cuestión, es algo que se puede constestar afirmativa o negativamente. La construcción del supremo la expone Hölder de la siguiente forma: primero introduce una totalidad A infinita de números reales (de forma secuencial, aunque dice que eso no es necesario); despúes, la cortaduras de Dedekind, que sólo pueden estar dadas por una ley (además, se refiere a Weyl, cuando explica que para el matemático las cortaduras sólo pueden expresarse a través de una "propiedad". Así, infinitos números reales sólo pueden darse por una ley de leyes). Una vez hecho esto fija una cota [*Schranke*]: el 100, y supone que los números están por debajo de ésta.

La construcción de una cota superior γ del conjunto A la realiza del siguiente modo: forma una nueva totalidad de números racionales a la cual pertenece un número x si y sólo si x es un número "inferior" [*lower number*[28]] de *cualquiera* de las cortaduras de A. Garantizado que se puede definir esta totalidad de números x, entonces se concluye que cualquier número menor que un número x es también un número x, y que no todos los números son números x , pues por ejemplo el 100 no lo es. Del mismo modo, se tiene que no puede haber el número x mayor, luego está claro que los números x así construidos son números inferiores de una nueva cortadura construida siguiendo este procedimiento.

Hölder describe después la crítica de Weyl a la forma en que se define la nueva cortadura de Dedekind, a saber, el hecho de que el número x pertenezca a la nueva cortadura si y sólo si entre las cortaduras de A existe una a la cual x pertenece como número inferior, o como dice Weyl, que existe una propiedad de tipo A que es poseída por x. Hölder responde que no se trata de *sólo* una propiedad de cualquier tipo, sino de una propiedad de un dominio bien definido por la ley de la secuencia de A. Se trata de la propiedad de "ser un número inferior" en *una* de las cortaduras dadas de la secuencia. Sólo se afirma por tanto que existe para la totalidad de números de la secuencia, definidos por una ley, una cota superior γ.

Si se da x, y por ejemplo una cortadura A_2, entonces por la ley que determina la cortadura se puede afirmar si alguno de los infinitos números inferiores coincide o no con x. Pero dado que la relación entre el x dado y cualquier cortadura de A está completamente determinada, y que existe una ley para las infinitas cortaduras de A, entonces se puede determinar -de acuerdo con la ley del tercio excluso- si existe una cortadura para la cual el número racional x dado se encuentra en la relación mencionada, a saber, si es un número inferior de esa cortadura.

La construcción del supremo de A se obtiene de la siguiente forma: si se da un número real γ' menor que γ, esto significa que la cortadura representada por γ' posee un número superior que es un número inferior en γ (pertenece a los mencionados números x). El número x_0 debería ser un número inferior en una cortadura A_0 de la secuencia (es decir, γ' sería menor que la cortadura A_0), mientras que resulta claro que ninguna cortadura de la secuencia excede a γ.

Hölder introduce dos propiedades mediante las cuales se define usualmente el supremo (respecto a la secuencia de números (cortaduras) que forman A), y que se tienen para γ:

1) γ es mayor que cualquier número de la secuencia de A;

2) cualquier número menor que γ es excedido por algún número de la secuencia.

Supuesto que exista un número real γ'' "del cual se puedan probar estas dos propiedades, la suposición de que $\gamma'' \neq \gamma$ llevaría a contradicción pues de dos cortaduras que no coinciden una de ellas ha de ser menor que la otra. Luego de aquí se concluye que las dos propiedades definen al supremo de forma única.

Si se dijera -continúa Hölder- que en el dominio de los números reales existe un número que posee, con respecto a la secuencia de números definida las dos propiedades anteriores entonces la crítica de Weyl sería correcta, pues la palabra "existe" se aplicaría a una totalidad no definida constructivamente. Pero en lo expuesto más arriba, incluso Weyl consideraría el uso de "existe" como legítimo, pues la existencia se reclama sólo después de la construcción no-circular de γ.

La única desventaja (si se la quiere llamar así), añade Hölder, es que no se puede dar un algoritmo general para construir γ. Esta demanda es, en general, irrealizable. Frente a esto alega Weyl que es entonces imposible concebir un concepto de número uniforme. A lo que opone Hölder que si bien es cierto que mediante el concepto de cortadura de Dedekind no es posible construir la totalidad de los números reales, es un concepto de número real claro y bien definido.

4. CONCEPCIÓN DEL CONTINUO DE HÖLDER COMO ALTERNATIVA AL PREDICATIVISMO

Este repaso del artículo de Hölder creo que es suficiente como para entender que la idea de Weyl al interpretar la propiedad (o principio) del supremo como algo que necesariamente se refiere a la totalidad de conjuntos de números reales -en vez de entenderse como que es cierto *sólo* para cualquier conjunto de reales- es algo que no se deriva automáticamente de la forma cómo el análisis clásico trata el principio.

Sin embargo, llegados a este punto, quizá el matemático acostumbrado a trabajar con el análisis estándar -entendido como el que acepta el principio del supremo *à la* Dedekind- quiera salvarlo en la medida de lo posible. Si el platonismo presenta muchas dudas -para muchos bien fundadas-, la posición de Weyl también. La solución de Hölder pretende además establecer una interpretación de lo que dice el principio, teniendo en cuenta la construcción llevada a cabo.

El teorema del análisis -al que se refiere Weyl en *El continuo* [WEYL 1918, 59]- que afirma que un conjunto acotado de números reales tiene un límite inferior y otro superior precisos, se podría aceptar, si se entiende que el principio afirma que todo conjunto arbitrario acotado superiormente de reales tiene un supremo, si es definible mediante una ley. ¿Es necesario, por tanto, a la hora de invocar el principio del supremo, suponer la existencia del conjunto de los números reales?. La respuesta, visto lo anterior, es que en efecto no lo es.

Es interesante no obstante resaltar dos cosas. La primera es que, como explica Hölder en una nota refiriéndose a Weyl, si se afirma que existe una ley de una propiedad cualquiera (Hölder escribe a este propósito citando al propio Weyl) no se tiene que llevar aquélla

> al lecho procusteano de los principios de construcción; sino que más bien, si se ha conseguido construir, de la manera que sea, una ley de forma no circular, se está legitimado a reclamar su existencia. No se trata de la posibilidad de su construcción, sino que la reclamación de su existencia se hace a la luz de la construcción conseguida de la prueba dada [MANCOSU 1997, p. 147, n.8].

Esto es precisamente lo que ha hecho Hölder al construir el supremo.

La segunda cosa a tener en cuenta proviene también de una nota de Hölder, y se refiere a sí mismo a un artículo de Weyl. Esta indicación tiene que ver con los conceptos extensionalmente definidos y los de contenido definido. Hölder reconoce que existen conceptos que aunque precisos, como el de cortadura de Dedekind[29], el de secuencia infinita o el de función, no caen bajo la definición weyliana de conceptos extensionalmente definidos. Sin embargo indica que el propio Weyl está al tanto de esta diferencia, y que la acepta como legítima. Y por tanto se tiene un concepto uniforme de número real a partir de la construcción de Dedekind. Vale la pena citar en este punto al propio Weyl:

> It may well always be that the sense of a clearly and unambiguously determined object concept [*Gegenstandsbegriff*] assigns to the objects of the nature expressed by the concept their sphere of existence. But this does not make the concept an extensionally definite one; that is, it does not ensure that it makes sense to consider the existing objects that fall under the concept as an ideally closed, in itself determined and delimited totality [Mancosu 1997, p. 148, n. 10].

De aquí que Hölder proteste contra el anuncio exagerado de *crisis* en los fundamentos del análisis. A pesar de que como hemos visto Hölder critica a Weyl en aspectos fundamentales, hay que decir que sus posiciones respecto a cómo concebían el conjunto de los números reales clásico no difería mucho. De hecho Hölder escribe lo siguiente:

> In the conception, which Weyl has strongly emphasized, that the continuum cannot be constructed arithmetically, that is, that one cannot arrive at the *totality* of the real numbers (if one does not want to require from the beginning and then use the continuum with certain geometrical axioms), I entirely agree with Weyl. In order for a cut to be given, there must be a law for the division of the rational numbers in two classes. In order to arrive at the concept of the totality of the real numbers, we would then have to be able to overview the totality of the possible laws of such divisions. I have already expressed the aforementioned conception more than thirty years ago (cmp. *Göttingische gelehrte Anzeigen*. 1892. p. 594. note) [Mancosu 1997, p. 147, n. 7].

La postura de Hölder es por tanto una postura que se podría denominar "intermedia". Es constructivista en tanto que afirma la imposibilidad de construir aritméticamente el conjunto de los números reales, pero intenta salvar el principio del supremo clásico, precisamente teniendo en cuenta esta imposibilidad. Se prodría deducir de la posición de Hölder, aquí comentada, que sólo se compromete con la existencia de subconjuntos de reales definidos por una ley, pero no con la de R.

De hecho se prodría resumir la posición de Hölder de forma análoga a como Weyl establece la diferencia entre un juicio y un juicio abstracto. Para Weyl un juicio es de la forma "2 es un número par", y uno abstracto tiene, sin embargo, la forma existencial "existe un número par".

Se puede interpretar que Hölder tiene en mente un "juicio abstracto" (en la formulación de Weyl) no explicitado en su posición respecto al principio del supremo, dando por supuesto que el juicio existencial es lo que da sentido a aquél. De este modo podemos afirmar que Hölder no está de acuerdo con la forma en que Dedekind define el concepto de supremo, para conjuntos de reales arbitrarios, puesto que se opone a la forma de derivar el concepto de número real a partir de la lógica[30]. Porque si bien es cierto que el concepto de "propiedad" no es -como Weyl explica- un concepto extensionalmente definido, el concepto de supremo de un conjunto definido mediante una ley dada, no implica que el concepto de supremo se refiera a propiedades cualesquiera de racionales de un conjunto. Por consiguiente, el concepto de propiedad en relación con el de ley que define un conjunto pueden entenderse, desde el punto de vista de Weyl, como extensionalmente definido.

5. Conclusión

En el teorema que relaciona los conjuntos de números reales acotados y el supremo (o ínfimo) de éstos, no se dice cómo deban ser los posibles conjuntos de reales en cuanto a su cardinalidad: finitos, infinitos numerables o no-numerables. El teorema tampoco presupone la existencia previa del conjunto R de los números reales ("clásico", en el sentido de Dedekind), y basta con considerar para su prueba cualquier conjunto de reales[31] y un real. Es decir, la cardinalidad y la propiedad de ser un *continuo* no es algo que presuponga una totalidad como R existente de antemano, vale decir, no construida.

Para un constructivista como Weyl[32] nada le impide que R se pueda pensar (desde el punto de vista como lo entendería un matemático clásico) como teniendo "agujeros", siempre y cuando se pueda construir algún segmento, i.e., que la propiedad "ser-un-continuo" se pueda adscribir a un conjunto. Dar un segmento tiene que ver con definir mediante una ley un conjunto de reales. Y para Weyl esto es algo de lo que -en principio- se pueden dar ejemplos. Es más, para él, no se puede dar un conjunto de reales sin dar una ley que lo defina; en ese caso, la totalidad de estos conjuntos está bien -en el sentido predicativista de previamente- definida.

Weyl, y también Hölder, son de la misma opinión en cuanto a la imposibilidad de construir aritméticamente la totalidad de los números reales. Esto no significa sin embargo que no se pueda construir parte[33] de esta totalidad, y que se pueda sin objeción afirmar para ella el principio del supremo.

Pero dejando a un lado la verdad o no de la afirmación respecto de si es posible o no construir el conjunto de los números reales aritméticamente, aceptar el principio del supremo en su formulación clásica teniendo en cuenta la propuesta de Hölder, supone trabajar sólo con afirmaciones como: 1) que conjuntos de reales no-numerables sólo pueden ser definidos mediante una ley; 2) que por consiguiente sólo se puede afirmar la existencia una cantidad numerable de conjuntos de reales no-numerables. Lo que conlleva aceptar el axioma de elección[34] entendido éste de forma "débil", es decir, sólo admisible para conjuntos arbitrarios numerables de elementos.

Me gustaría señalar a este respecto algo que creo interesante. Y es que este puede ser, por ejemplo, un adecuado marco de referencia si se quiere trabajar con el principio del supremo clásico, aceptando la tesis de Hölder sin comprometerse con la existencia de R como totalidad.

A pesar de que ciertos aspectos de la posición de Weyl respecto a su crítica del análisis no sea todo lo clara que desearíamos, debemos destacar lo que de original aporta un libro como *El continuo*, inaugurando una nueva forma de pensar el concepto de número real y el análisis. Las fructíferas consecuencias que tuvo y ha tenido para la matemática se dejan sentir todavía hoy, debido a su forma de abordar la cuestión de los fundamentos. Además, su aproximación es quizá, junto con la realista, la que ha tenido más éxito, si se mide éste por la cantidad de preguntas abiertas y respuestas halladas dentro, del desarrollo de la matemática moderna.

Notas

1. "In his book *Das Kontinuum* (1918), Hermann Weyl initiates a program for the arithmetical foundations of mathematics […]. Modern logical work has made it possible to give considerable substance to Weyl's program, showing it to be surprisingly viable for scientifically applicable mathematics". [Feferman 1998, p. 249].
2. La forma en que nos parece que los conjuntos "pueden" ser definidos razonablemente se precisará más abajo. Veáse § 4, presente artículo.
3. En Weyl [1921], en el epígrafe tercero, se reflexiona sobre las distintas clases de proposiones en matemáticas. Trad. al inglés en [Mancosu 1997, p. 86].
4. Es en este punto donde el predicativismo de Weyl, predicativismo dados los números naturales, aplica su crítica al análisis clásico; y es, por tanto, el punto de bifurcación origen de una nueva corriente en lo tocante a la fundamentación de la matemática.
5. Weyl introduce los racionales como un par doble de naturales que cumple cierta relación.
6. Véase Feferman [1998], artículos: "Weyl vindicated: *Das Kontinuum* seventy years later", "Why a little bit goes a long way: Logical foundations of scientifically applicable mathematics".
7. Además de las mencionadas, Weyl rechaza, en el análisis que ha construido, las proposiciones siguientes: 1) El principio de cortadura de Dedekind: Sean A y B dos conjuntos de números reales, tal que cada número que es elemento de A es más pequeño que cada número de B, y sea además para cada fracción α un número *r* perteneciente a A y un número *n* perteneciente a B, tal que + α no pertenece al dominio *n-r:* entonces existe uno y sólo un número real *c* tal que ningún real de A es mayor que *c* y ninguno que sea elemento de B es menor que *c.* 2) Cada conjunto infinito acotado de números reales tiene un punto de acumulación. Véase Weyl [1918, pp. 58-59].
8. Weyl escribe, refiriéndose a la proposición cuarta, el efecto que tiene su rechazo sobre el principio de Dirichlet. Véase Weyl [1918, p. 60].
9. Feferman recuerda no obstante, que el propio Gödel tenía reservas respecto a su propia posición platónica. Así, en el artículo titulado "The present situation in the foundations of mathematics", encontrado en el *Nachlass* de Gödel, y reproducido en [Gödel 1995, pp. 36-53] con ocasión de una conferencia en 1933, Gödel escribe: "The result of the preceding discussion is that our axioms [of set theory], if interpreted as meaningful staments, necessarily presuppose a kind of Platonism, which cannot satisfy any critical mind and which does not even produce the conviction that they are consistent". Es por tanto evidente que Gödel, no se sabe bien por qué, cambió de actitud al respecto en 1944, fecha de la aparición del artículo arriba referido.
10. Se refiere en particular al sistema de los *Principia* de Russell.
11. Esta formulación no es única, a lo largo del tiempo ha sido escrita de varias maneras. Así, por ejemplo, otra formulación más elaborada es la siguiente: "A definition written in symbols is impredicative if it defines an object which is one of the values of a bound variable occurring in the defining expression." Véase Fraenkel *et al*. [1973, 38].
12. En el artículo "Weyl vindicated: *Das Kontinuum* seventy years later" se puede leer lo siguiente: "In this respect, Russell's ad hoc assumption of the Axiom of Reducibility is seen as a violation of the vicious circle principle, despite the predicative formalism of ramified type theory, "welche Kluft mich trotz allem noch von Russell trennt," and thus the necessity for Weyl to follow the "engeren Verfahren" of restricting to sets of level 0". Véase Feferman [1998, p. 266].
13. Este artículo surge como respuesta a una carta de Otto Hölder (véase más abajo el punto 2.3.).
14. El argumento ofrecido se hace en cierto modo "estándar". Esto es, Weyl utiliza este argumento en sus artículos de 1919, 1921, 1925 y 1946 variándolo levemente o ampliándolo según el caso.

15. Weyl define este concepto del siguiente modo: "Umfangsgleich nenne ich zwei Eigenschaften (natürlicher Zahlen) dann, wenn jeder Zahl, welche die eine besitzt, auch die andere zukommt, und umgekehrt; jeder Eigenschaft korrespondiert eine Menge in solcher Weise, dass umfangsgleichen Eigenschaften dieselbe Menge entspricht" [Denomino entonces extensionalmente equivalentes a dos propiedades (de los números naturales), si todo número que posee una, también posee la otra, y viceversa; a cada propiedad le corresponde un conjunto, de tal manera que propiedades extensionalmente equivalentes se corresponden con el mismo conjunto]. [WEYL 1919, p. 86].
16. En cursiva en el original.
17. Weyl utiliza en vez de supremo, el término *obere Grenze*, que se puede traducir por cota superior. Pero que realmente está pensando en el supremo, se deduce del hecho de que se refiere a *"die obere Grenze",* es decir, *la* cota superior. Así escribe: "Die obere Grenze dieser Menge reeller Zahlen ist selbst die Menge, derjenigen rationalen Zahlen *x* […]". Póngase esto en relación con lo que escribe en WEYL [1918, p. 23].
18. Aparece en MANCOSU [1997, p. 86] con el título "On the new foundational crisis of the mathematics".
19. Aquí existe un error de traducción. En el original alemán dice: "[W]enn es eine reelle Zahl E in der Menge A gibt, unterhalb deren *x* liegt"; lo que debe ser traducido por: "Si existe un número real E en el conjunto A menor que *x* (i.e., con *x* menor que E)".
20. Esto parece ser lo que Weyl tiene en mente, a tenor de lo que escribirá en WEYL [1946, p. 5]: "But the property $\gamma = [x]\ C(x)$ defined by (1) is certainly not identical in its meaning with any of the properties of level 1 because it is defined in terms of the totality of all propertites of level 1". La propiedad en cuestion es la del ínfimo, y (1) se define como: $C(x) = (\exists x)\ \{I(\xi) \cap (x \in \xi)\}$. $\gamma = [x]\ C(x)$ es el ínfimo de un conjunto de números reales no-negativos ξ, e $I(\xi)$ es una función proposicional cuyo argumento se refiere a propiedades de fracciones.
21. Weyl escribe que es "de principio extraordinariamente improbable que sea posible de una manera exacta establecer un concepto extensionalmente definido de k-propiedad, de modo que cada k-propiedad a definir, siguiendo el esquema de más arriba, a partir de la *totalidad* de las k-propiedades sea extensionalmente equivalente a una k-propiedad. En cualquier caso no existe *la sombra de una demostración* de una tal posibilidad" [WEYL 1919, p. 87] [Cursivas en el original].

    Aquí sin embargo, como vemos, Weyl no hace valer más que su intuición, y aunque ésta sea valiosa, en matemáticas (así como en lógica) no es determinante el considerar algo "extraordinariamente improbable"[*außerordentlich unwahrscheinlich*], y que no exista una demostración tampoco es algo que determine, si consideramos válido -como hace aquí Weyl- el principo del tercio excluso.
22. "[B]elongs so to speak, to a higher level of properties". Veáse MANCOSU [1997, p. 131].
23. Feferman [1998, p. 289] en el artículo "Why a little bit goes a long way: Logical foundations of scientifically applicable mathematics", escribe lo siguiente: "There can be no objection to impredicative definitions when the totality in question is regarded *as having a clear and determinate extent* (cursivas mías)". Esto, parece ser, es lo que exige Weyl a su concepto "k-propiedad".
24. Ramsey afirma que la descripción "el hombre más alto en esta habitación", aunque se defina en términos de una totalidad de la que forma parte, es inocua, pues el objeto sólo se señala, y no se crea. Véase CARNAP [1931, pp. 49-50].
25. El artículo aparece en [MANCOSU 1997, p. 123] con el título "The current epistemological situation in mathematics".
26. El artículo de Hölder aparece en [MANCOSU 1997, p. 143] con el título "The alleged circulus vitiosus and the so-called foundational crisis in Analysis".
27. "Endliche Mengen kann man auf zweierlei Art beschreiben: entweder *individuell*, durch Aufzeigung jedes einzelnen ihrer Elemente, oder *generell*, gesetzmäßig, durch Angabe von Eigenschaften, die den Elementen der Menge und keinen andern Gegenständen zukommen. Bei unendlichen Mengen (darin liegt eben das Wesen des Unendlichen) ist der erste Weg unmöglich" [Se pueden definir los conjuntos finitos de dos maneras: de manera *individual*, mostrando cada uno de sus elementos, o de manera

general, mediante una regla, indicando sus propiedades, de las cuales son poseedores exclusivamente los elementos del conjunto y no otros objetos: para conjuntos infinitos (aquí radica la esencia del infinito) la primera manera es imposible]. Véase Weyl [1918, p. 13].

28. En Mancosu [1997, p. 143] aparece traducido de este modo el concepto, pues Hölder escribe en su artículo: "Que el conjunto de los números racionales absolutos están divididos completamente en dos clases, de modo que cada número de la primera clase es más pequeño que cualquier número de la segunda y la primera clase no tiene ningún número racional que sea el más grande. Se tiene entonces a través de esta división una llamada cortadura de Dedekind en el dominio de los números racionales y se puede hablar de números "superiores" e "inferiores" de la cortadura". Véase Hölder [1926, p. 246].
29. Quisiera recordar algo que escribe Bernays en [Hilbert, n.d.] (¿recogiendo quizá las ideas de su maestro?) sobre el concepto de número real y la posición axiomática, en referencia a Weyl y a su crítica sobre la existencia de un círculo vicioso en el análisis. La consideración que hace Bernays, es que la posible dificultad a la hora de definir el concepto general de número real de una forma coherente o satisfactoria (recuérdese a este respecto la distinción entre conceptos de contenido definido y extensionalmente definido), no impide la adopción de la definición de cada número real a partir de las cortaduras de Dedekind o de sucesiones convergentes de números racionales: "Die Zahlfolgen und Schnitte dienen dann zwar auch zur Definition der einzelnen reellen Zahlen, aber nicht zur Definition des Begriffs der reellen Zahl. Vielmehr ist dem Begriffe nach eine reelle Zahl einfach ein Ding des betrachten Systems". [Las sucesiones y las cortaduras sirven ciertamente como definición de los números reales individuales, pero no como definición del concepto de número real. Más bien un número real es, según el concepto, simplemente un objeto del sistema considerado].
30. "Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne" [En tanto que denomino a la aritmética (álgebra, análisis) un parte de la lógica]. [Dedekind 1961, p. 8].
31. Quizá conviene distinguir aquí, la diferencia entre "para cualquier conjunto de reales" y "para todo conjunto de reales". El sintagma "para cualquier", no debe entenderse de forma impredicativa, es decir, considerando existente una totalidad como R.
32. El Weyl de *El continuo*, para ser precisos.
33. Escribo *parte*, adoptando, para expresar la idea más claramente, un punto de vista realista.
34. Nótese que, como escribe Ferreirós [2011], el axioma de elección considerado de esta forma no capturaría totalmente la idea de la existencia de conjuntos arbitrarios de elementos (cuasi-combinatorialismo).

Bibliografía

Carnap, R. (1931) *"Die logizistische Grundlegung der Mathematik"*. *Erkenntnis 1*, 91—105. [English translation: "The logicist foundation of mathematics". En: P. Benaceraff y H. Putnam (eds.) (1987) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings.* Cambridge, Cambridge University Press, pp. 41-52].

Chihara, C. S. (1973) *Ontology and the vicious-circle principle*. Ithaca, Cornell University Press.

Dedekind, R. (1961) *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Braunschweig, Vieweg. [Versión en castellano: Dedekind, R. (1998) *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid. Alianza Editorial. Traducción e introducción José Ferreirós.]

Feferman, S. (1998) *In the light of logic*. New York. Oxford University Press.

Ferreirós, J. (2011). "On arbitrary sets and ZFC". *The Bulletin of Symbolic Logic*, *17(3),* 361-393

Fraenkel, A. A., Bar-Hillel y Lévy, A. (1973) *Foundations of set theory*. Amsterdam, Elsevier.

Gödel, K. (1981) *Obras completas*. Ed. J. Mosterín. Madrid, Alianza Universidad.

GÖDEL, K. (1995) *Collected Works*. [S. Feferman, Editor-in-Chief]. New York, Oxford University Press.

HILBERT, D. (n.d.) *Nachlass*. "Bernays über Weyls Kritik der Analysis". Cod. Ms. 685, Nr.3, Bl. 13-20.

HÖLDER, O. 1926. "Der angebliche Circulus Vitiosus und die sogennante Grundlagenkrise in der Analysis". *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physische Klasse, 78*, 243–250.

MANCOSU, P. (1997) *From Brouwer to Hilbert*: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s New York. Oxford University Press.

WEYL, H. 1918. *Das Kontinuum*. Leipzig, Veit & Comp.

WEYL, H. 1919. "Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *28*: 85-92

WEYL, H. 1921. "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik". *Mathematische Zeitschrift, 10*, 37-79.

WEYL, H. 1925. "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik". *Symposion 1,* 1-32

WEYL, H. 1946. "Mathematics and logic. A brief survey serving as preface to a review of *The Philosophy of Bertrand Russell*". *American Mathematical Monthly, 53*, 2-13.