Pagés, D. (2018). La construcción interactiva de nuevo conocimiento en la clase de matemática: el caso de la convergencia de sucesiones. *Reloj de agua*, *18*, 15–27.

La construcción interactiva de nuevo conocimiento en la clase de matemática: el caso de la convergencia de sucesiones

Daniela Pagés[2]

RESUMEN

En este trabajo presentamos algunos elementos de una investigación realizada en el ámbito de la formación de profesores de matemática. Esta consistió en la observación y posterior análisis de clases de Análisis I de tres formadores de profesores, y de entrevistas a algunos de sus estudiantes, durante las que se les solicitó la resolución de algunas tareas relativas al curso. Uno de los objetivos que nos propusimos fue la búsqueda de convergencias y divergencias entre la práctica de los formadores y el trabajo de los estudiantes, en relación con los ambientes de aprendizaje propuestos por los formadores. En este artículo presentamos el marco teórico metodológico utilizado, así como el análisis de un episodio de clase y parte de la entrevista a una estudiante. Reflexionamos acerca de la necesidad de que los formadores de profesores de matemática consideren los aspectos comunicativos de las interacciones en la clase, así como las condiciones epistemológicas de los conocimientos matemáticos a enseñar.

PALABRAS CLAVE: formación de profesores de matemática, triángulo epistemológico, comunicación en la clase, sucesiones convergentes.

ABSTRACT

We present some elements of a research carried out in the context of Mathematics Teacher Education. It consisted in the observation and the later analysis of Analysis I lessons of three Mathematics Teacher Educators, and interviews with some of their students, during which they were asked to solve some problems related to the course. One of the aims we had was the search of convergences and divergences between the teacher educators' teaching practices and their students' work, related to the learning environments proposed by the teacher educators. In this article we present the theoretical methodological framework we used, as well as the analysis of an episode of the lesson and an excerpt from a prospective teacher interview. We reflect on the need for mathematics teacher educators to consider the communicative aspects of interactions in class, as well as the epistemological conditions of the mathematics knowledge to be taught.

KEYWORDS: mathematics teacher education, epistemological triangle, classroom communication, convergent sequences.

INTRODUCCIÓN

Se presentan elementos de una investigación, realizada en el marco del año sabático durante el año 2017, que consistió en el análisis de prácticas docentes de algunos formadores de profesores de matemática, así como la actividad matemática de sus estudiantes en torno a la resolución de problemas. El trabajo fue realizado con tres formadores, de dos institutos públicos de formación de profesores del país, y algunos de sus estudiantes. En este artículo presentamos el análisis de episodios de una de las clases de un formador, así como una parte de la entrevista a una estudiante. Para este trabajo no nos situamos en calidad de jueces de lo que observamos, ni en la consideración de una práctica óptima que pueda ser exitosa. Consideramos que la clase es un lugar muy complejo, que los procesos educativos están sujetos a muchas variables, entre las que el profesor es una de ellas. Sin embargo, nos afiliamos a la idea de que analizar lo que ocurre en la clase nos permitirá ir cerrando la

[2] Magíster en Ciencias en Matemática Educativa. Docente del Consejo de Formación en Educación.

brecha que existe entre lo que la teoría en Matemática Educativa ha elaborado, y está elaborando como campo de estudio, y lo que ocurre de verdad en la clase. La formación de docentes de matemática es objeto de constante debate a nivel internacional, así como particularmente en nuestro país. Stigler y Hiebert (1999) plantean que para que se produzca un mejoramiento de la enseñanza de la matemática se hace necesario cambiar el foco de atención de mirar lo que hace un *buen docente*, a analizar y reflexionar sobre las actividades de las clases de todos los días. Los autores llaman a este principio *Focus on teaching, not teachers*. Coincidimos con estos autores. Por ello, nuestro trabajo se centró en la observación de la práctica docente de formadores de profesores de matemática, con el agregado de la observación de algunos de sus estudiantes resolviendo problemas. Se eligió la asignatura Análisis I de la carrera de profesorado de matemática. Analizamos algunos episodios de clase entre los que fueron videograbados, y algunas de las entrevistas a los estudiantes. Una vez realizados dichos análisis, buscamos posibles convergencias y/o divergencias entre ellos, que nos permitieran establecer vinculaciones entre el pensamiento del profesor y el pensamiento del estudiante. En este artículo solo reportamos el marco teórico metodológico utilizado, y presentamos un ejemplo de análisis de un episodio de clase y de una parte de la entrevista a una estudiante.

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO METODOLÓGICO

Partimos de algunas investigaciones ya realizadas en nuestro país. Entre ellas, Dalcín, Ochoviet y Olave (2017) analizaron el referente epistemológico de los formadores de profesores, en lo que tiene que ver con su vínculo con el conocimiento, y de este con los procesos de enseñanza. Concluyeron que es necesario iniciar proyectos de trabajo que atiendan el diseño y gestión de las clases de matemática, que incluyan la discusión del concepto de: “ser participante activo en la construcción de los aprendizajes” (p. 95).

Steinbring (1998) parte de los conceptos de conocimiento del contenido (matemático, para este caso) y conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986). Plantea dos modelos posibles de concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, que difieren en cuanto a la relación entre los dos tipos de conocimiento:

– Un modelo lineal y deductivo, por el que el docente posee cierto conocimiento matemático del contenido, lo transforma para su enseñanza, pasando este a ser conocimiento matemático escolar, el que es transmitido por el docente a los estudiantes, y pasa a integrar el conocimiento matemático del estudiante. En este modelo, el conocimiento matemático del contenido y el conocimiento didáctico del contenido tienen funciones diferentes y únicas. El primero se necesita en la primera etapa del proceso, en tanto el conocimiento didáctico del contenido se utiliza en la segunda etapa. Para ejemplificar podemos considerar el siguiente esquema, tomado de Steinbring (1998).

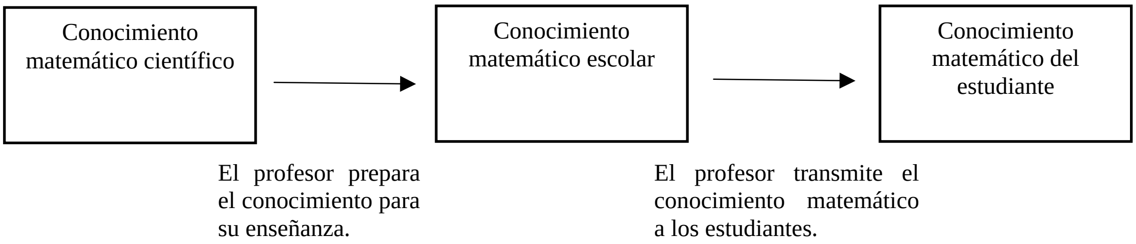


Figura 1. Modelo lineal (Steinbring, 1998, p. 158)

– Un segundo modelo, por el que el docente no puede dirigir directamente el aprendizaje de los estudiantes. Pero sí puede realizar ofertas de aprendizaje a los estudiantes, observar la forma en que realizan las actividades y diagnosticar los logros y, en función de esto, cambiar sus ofertas. Bajo esta concepción funcionan dos sistemas autónomos: el proceso de aprendizaje de los estudiantes y el proceso interactivo de enseñanza entre el profesor y los alumnos. Steinbring representa este modelo con el siguiente diagrama.

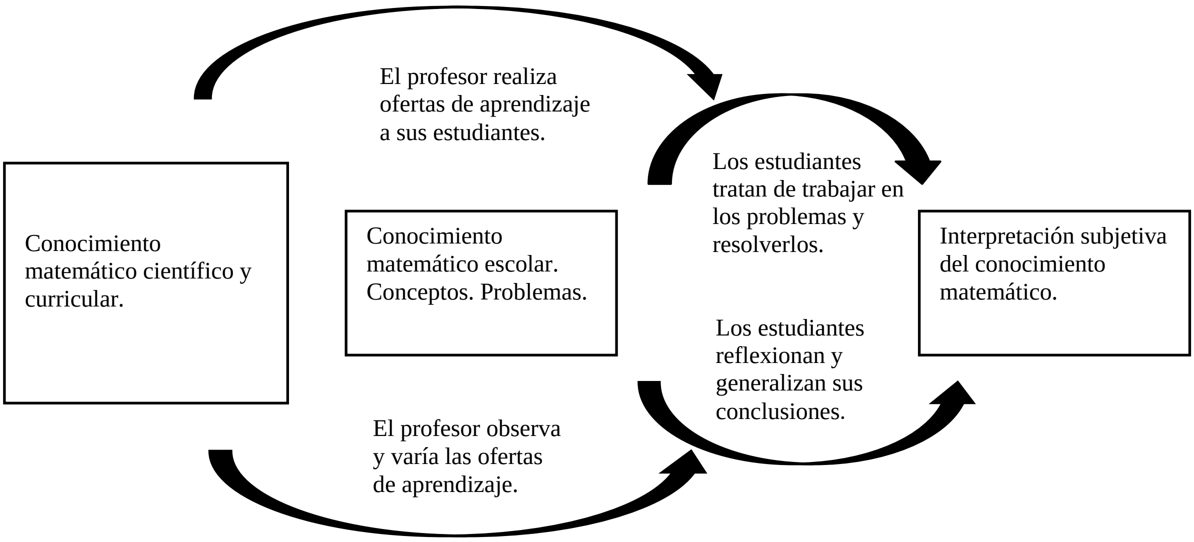


Figura 2. Modelo autónomo (Steinbring, 1998).

El autor señala que el estatus epistemológico del conocimiento matemático escolar ofrecido por el docente a través de las tareas y actividades de la clase es distinto del estatus epistemológico del conocimiento construido por los estudiantes a partir de sus dominios de experiencia. El primero gana significado como un corpus de conocimiento más general, institucionalizado socialmente en los libros de texto y en el currículo, en tanto el conocimiento construido por los estudiantes es de carácter más personal, y se vincula con contextos ejemplares especiales. A partir de esto, Steinbring plantea que el docente debe ser consciente del estatus epistemológico del conocimiento matemático de los estudiantes. Es decir, debe ser capaz de diagnosticar y analizar qué construcciones del conocimiento matemático hacen los estudiantes, y compararlas con lo que intentaba enseñar, para poder variar las propuestas de aprendizaje.

Steinbring (1998) señala que, bajo los supuestos del segundo modelo, es necesario para los profesores, un nuevo tipo de conocimiento matemático profesional, que es una mezcla del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. A este componente específico del conocimiento profesional para los profesores de matemática, lo llama *conocimiento epistemológico de matemática en escenarios sociales de aprendizaje* (Steinbring, 1998): "Los profesores seguramente necesitan conocimiento matemático y conocimiento pedagógico; y en el dominio del conocimiento pedagógico, también necesitan conocimiento epistemológico para ser capaces de valorar las restricciones epistemológicas del conocimiento matemático en diferentes escenarios sociales de enseñanza, aprendizaje y comunicación" (p. 160). El autor centra su análisis en la relación epistemológica entre los objetos matemáticos y los referentes de estos, relación que utiliza en el análisis de episodios de clases. Dado el carácter general y abstracto de los objetos matemáticos, la actividad matemática es necesariamente simbólica (D'Amore, 2001; Duval, 1998; Godino y Batanero, 1999; Otte, 2003; Radford, 2004; Steinbring, 2005, citados en Radford, 2006). Pero el conocimiento matemático no puede revelarse por la simple lectura de los símbolos, signos y principios matemáticos, sino a través de su interpretación. Esta interpretación necesita de experiencias y conocimiento implícito, que junto a las actitudes y modos de uso del conocimiento matemático, son esenciales en una cultura. De ahí que el aprendizaje de la matemática requiera de un ambiente cultural. Los estudiantes deben ser introducidos a una cultura matemática apropiada y deben poder participar en ella (Steinbring, 2005). Según Steinbring (2005), la interrelación entre *signos o símbolos* y *objetos o contextos de referencia* es de suma importancia para describir y analizar las interacciones matemáticas de la clase como una cultura. Cada conocimiento matemático requiere un sistema de signos o símbolos para comprender y codificar el conocimiento. Por ejemplo, los signos numéricos para el caso de la aritmética elemental, o los gráficos, las expresiones analíticas, los diagramas, las expresiones verbales para el concepto de función. Estos signos no tienen significado en sí mismos. El significado del signo tiene que ser construido por el sujeto. La forma y estructura de los signos han emergido históricamente y estos son en buena medida convencionales y arbitrarios. El significado de un concepto matemático es construido activamente como interrelaciones entre sistemas de signos o símbolos y campos de contextos de referencia u objetos. Un signo, para ser un *signo matemático*, requiere de dos funciones: semiótica y epistemológica. La función semiótica es la que hace que el signo represente a cierto objeto (matemático, en este caso). Dicho objeto es el referente o contexto de referencia. Steinbring señala que la ausencia de ambigüedad entre el signo y el objeto matemático solo puede alcanzarse si el signo refiere a un objeto dado a priori, cosa que no ocurre con los objetos matemáticos, ya que estos representan relaciones y estructuras que deben ser exploradas, y que están sujetas a la reinterpretación y al cambio de significado. Esta función del signo, de simbolizar nuevas relaciones en el referente (objeto matemático) es la función epistemológica, y depende de la concepción que se tenga acerca del conocimiento matemático. Al principio el signo solo tiene una función semiótica (representar un objeto o concepto), luego aparece la función epistemológica, a través de ser dotado de un conjunto de relaciones entre él y el objeto. Un símbolo matemático se caracteriza, entonces, por poseer en sí mismo una estructura interna relacional. Estableciendo una mediación entre los signos o símbolos y contextos de referencia adecuados, los estudiantes deben construir el significado para los signos. Para que estos signos se conviertan en signos (o símbolos) matemáticos, las conexiones entre ellos y posibles contextos de referencia están determinadas por las condiciones epistemológicas del conocimiento matemático que con ellos se pretende simbolizar. Steinbring (2005) utiliza el *triángulo epistemológico* para representar y analizar esta conexión entre el signo o símbolo, el contexto de referencia y el concepto.

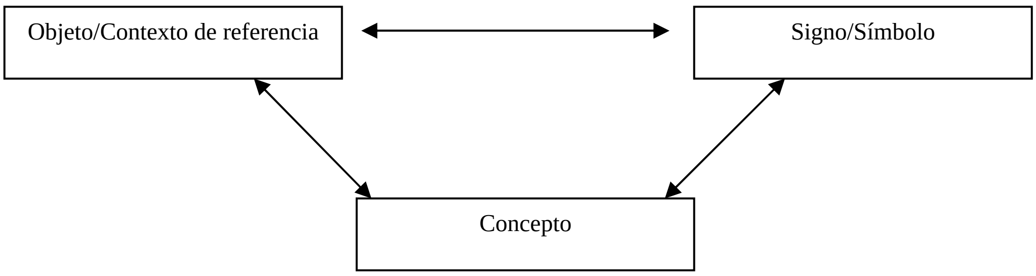


Figura 3. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005, p. 22).

Este triángulo modela una mediación semiótica entre el signo o símbolo y el objeto o contexto de referencia (como algo que representa a otra cosa), la que a su vez contiene las condiciones epistemológicas del conocimiento matemático. Ninguno de los vértices del triángulo es prioritario ni ocupa un lugar fijo. En el transcurso de una interacción puede construirse una secuencia de triángulos, que muestren las mediaciones que un estudiante, o el profesor, van estableciendo a lo largo de la misma. Las acciones recíprocas entre los vértices del triángulo y las estructuras necesarias para los signos o símbolos y los objetos o contextos de referencia, deben ser producidas activamente por el estudiante, en interacción con sus compañeros y el profesor. Esta producción está sujeta a condiciones epistemológicas. Durante el desarrollo del conocimiento matemático las interpretaciones de los sistemas de signos y los contextos de referencia apropiadamente elegidos pueden cambiar o ser generalizados por los estudiantes o el docente. El triángulo epistemológico permite hacer accesibles las estructuras (invisibles) que representan al conocimiento matemático. Steinbring considera dos dimensiones teóricas para el análisis de episodios de clases: la caracterización epistemológica del conocimiento matemático creado interactivamente, y la interpretación comunicativa del conocimiento matemático. Durante su discurso social los estudiantes y el docente crean interactivamente vínculos entre los signos o símbolos y ciertos contextos de referencia, construyendo así estructuras relacionales del conocimiento matemático escolar. Estas estructuras contienen, a la vez, elementos epistemológicos constitutivos de las condiciones del conocimiento matemático como construcción cultural, y las interpretaciones comunes e individuales que se negocian en la clase. La tensión entre las estructuras relacionales creadas en el discurso social de la clase, y las condiciones epistemológicas del conocimiento matemático como construcción cultural, es abordada a través del *análisis epistemológico socialmente orientado* que presenta Steinbring (2005), y que usamos en este estudio. La relación entre los signos o símbolos y el contexto de referencia puede establecerse: (1) explícita o implícitamente (ser presentada directamente, ser demostrada, o estar presente de forma implícita); (2) individual o interactivamente.

Otro aspecto a tener en cuenta en este análisis es que los diferentes participantes en la comunicación de la clase (diferentes estudiantes y docentes) posiblemente interpreten los signos y símbolos usando distintos contextos de referencia. Se puede observar un mayor acuerdo entre los roles de signos o símbolos y contextos de referencia, a medida que la interacción transcurre. Aunque estos acuerdos pueden ser muchas veces cuestionados y rotos, y son a menudo limitados. La separación entre las proposiciones de los estudiantes y las del docente, así como la visualización de las estructuras epistemológicas, permite analizar dos tipos de construcción de conocimiento: el que comienza con referencias empíricas concretas para los símbolos para luego ir hacia una desconexión mayor entre los signos o símbolos y los contextos empíricos de referencia, logrando un nivel más abstracto de interpretación; o el que deja abierta la tensión entre interpretaciones de signos o símbolos, lo que evita una reducción rápida del significado. Steinbring considera a la construcción de conocimiento matemático en la clase como un proceso interactivo conjunto de final abierto, cuyos resultados no pueden determinarse completamente. Puede suceder que el docente trate de comunicar el nuevo conocimiento a los estudiantes de una forma más o menos directa. Esta acción por sí misma devalúa al nuevo conocimiento como tal, un ejemplo de esto es el efecto Topaze (Brousseau, 1997, citado en Steinbring, 2005). Steinbring (2005) plantea que las relaciones operacionales simbólicas que constituyen el conocimiento matemático no son comunicables de modo directo, sino que deben ser interpretadas activamente por el sujeto que aprende. Lo único que puede comunicarse es cómo un objeto matemático ya hecho encaja en una estructura lógica. Un mensaje explícito (es decir, la comunicación directa, por ejemplo, de una definición o propiedad) no puede contener los múltiples significados o interpretaciones que se le podrían dar, sino que son significantes para los que los estudiantes deben construir significado.

ANÁLISIS DE UN EPISODIO DE CLASE

Para el análisis de los episodios seleccionados de las clases observadas se utilizaron como herramientas: clasificación de algunas proposiciones enunciadas por el formador y los distintos estudiantes; construcción del triángulo epistemológico para algunas intervenciones especiales; análisis de los planos comunicativo y epistemológico, a partir de los anteriores. A partir de esto se llegó a una conclusión general sobre lo analizado para cada formador. Como ya dijimos, en este artículo solo presentamos ejemplos de Análisis Matemático, con el fin de ejemplificar la metodología utilizada.

Presentamos el análisis de un episodio de una de las clases observadas de un formador de profesores (FPM1). Estaban presentes 17 estudiantes. La clase se inicia con una actividad relativa al cálculo del límite de una sucesión con la intención de mostrar la necesidad de nuevas herramientas, como el álgebra de límites. Luego se enuncia y demuestra el teorema relativo a la convergencia de la sucesión suma de dos sucesiones convergentes. Finalmente se trabaja con resultados vinculados con operaciones con sucesiones divergentes. Se completa el enunciado para la siguiente proposición, la que se pide demostrar como tarea domiciliaria.

$$\left.\begin{array}{r} x_n \to +\infty \\ (y_n) \text{ acotada inferiormente} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$$

El FPM1 pide a los estudiantes que conjeturen la conclusión para la proposición:

$$\left.\begin{array}{r} x_n \to +\infty \\ y_n \to l \end{array}\right\} \Rightarrow x_n + y_n \to \ldots$$

Una vez que los estudiantes concluyen que la suma diverge a más infinito, se da la siguiente interacción acerca de su demostración.

246 A4: La primera, si y_n tiende a l ¿podemos decir que está acotada, directamente?
247 FPM1: ¿Está bien eso?
248 A4: Inferiormente s…
249 A15: Pero no sé.
250 A14: Está acotada superiormente.
251 A4: Superiormente, claro.
252 A16: Ta, pero…
253 FPM1: ¿E inferiormente no?
254 A4: Y sí.

Esta transcripción nos indica la fragilidad que tiene la interacción y, sobre todo, al menos en este caso, las intervenciones de algunos estudiantes. A4 plantea que si la sucesión (y_n) es convergente, entonces está acotada. Este es un teorema que ya han visto. Pero el FPM1, en lugar de aceptar la intervención de A4, la devuelve en forma de pregunta a la clase, buscando posiblemente la justificación. Allí aparece la duda de A4, y la intervención de A14, de que está acotada superiormente (cosa que no es útil para utilizar el teorema anterior en la demostración). El FPM1 pregunta si no está acotada inferiormente, pero la justificación esperada (de acuerdo a nuestra interpretación) no aparece. En cambio, se da el aporte de A15, lo que da inicio a la siguiente interacción:

255 A15: si está acotada inferior, eh, si tiene, si es decreciente, ya va a estar acotada inferiormente porque tiende a l, entonces todos los valores van a ser mayores que l. Después, si es creciente, va a haber un…, el y_0 va a ser el menor valor. Y ahí ya va a estar acotada inferiormente.
256 FPM1: Y, ¿si no es creciente ni decreciente?
257 A15: Y, si no es creciente ni decreciente (inaudible)…
258 FPM1: ¿Vieron lo que dijo el compañero recién? ¿Siguieron el razonamiento? Dice, si la (y_n) fuera decreciente entonces l sería una cota, ¿inferior era tu razonamiento?
259 A15: Sí.
260 FPM1: Sí. Y si la (y_n) es creciente el y_0 sería una cota inferior. Ta. Estoy de acuerdo. Eh ¿para qué sirve? Eso que me estás diciendo. Después analizamos el caso en que…
261 A15: Para ver que está acotada inferiormente como está ahí arriba, en el teorema 1.

262 FPM1: Entonces, según lo que dijiste, sería para el caso en que (y_n) es ¿decreciente?
263 A15: No, son los dos.
264 A4: Si es creciente o decreciente, va a estar acotada inferiormente.
265 A15: Y si está acotada inferiormente cae en el teorema de arriba.
266 FPM1: Ahí está, en cualquiera de los dos casos está acotada inferiormente y entonces, estaría en las condiciones del teorema, lo puedo aplicar, y así que $x_n + y_n$ tiende a más infinito.
267 A4: Pero faltaría, si no fuera creciente ni decreciente.
268 FPM1: Faltaría ese caso.
269 A15: Sería constante.
270 FPM1: No, pero…
271 A15: Para que tienda a *l* tiene que ser constante.
272 A4: Puede ir salpicando, ¿no? Salpicando y converger, pero no, entonces en ese caso no es creciente, ni decreciente.
273 FPM1: Tenemos un ejemplo que dimos veinte mil veces, relacionado con eso, ¿cuál era?
274 A4: $\frac{1}{(-1)^n}$ o algo así creo.
275 FPM1: $\frac{1}{(-1)^n}$ (inaudible)
276 A15: $\frac{(-1)^n}{n}$
277 FPM1: $\frac{(-1)^n}{n}$, que esa no era, ni creciente ni decreciente y convergía a cero.
278 A4: Ahí va.
279 FPM1: Que era un ejemplo de una convergente que no es creciente ni decreciente. Podría ser algo así, la (y_n).
280 A4: Pero podríamos demostrar que tiene un máximo y un mínimo, ¿no?
281 FPM1: No sé, ¿se podrá demostrar? ¿Quién tiene un máximo y tiene un mínimo?
282 A4: Esa, por ejemplo. Y algunas parecidas, o todas esas. Que no sean crecientes ni decrecientes pero a la vez convergentes.
283 FPM1: Pero cuando decís “tiene un máximo y un mínimo”, ¿a qué te referís? ¿Quién tiene un máximo y un mínimo?
284 A4: El recorrido de las sucesiones.
285 FPM1: ¿Sí?
286 A4: Porque si es convergente y no es creciente ni decreciente, está acotada.
287 FPM1: Les propongo que miren un poco lo que ya hemos hecho porque el problema es que esto que están planteando ya lo discutimos y tenemos un resultado vinculado con esto. Que no quisiera volver a reproducir lo que ya discutimos. Entonces, ¿cuál es el resultado? Que en realidad habría que ponerlo en juego acá.

Desde el punto de vista epistemológico, nos parece que la primera de las intervenciones de A15 (L255) muestra, por un lado, una forma de argumentación que no es común (al menos en el curso no parece que se haya utilizado), que consiste en la separación en casos: si la sucesión convergente es creciente, o es decreciente (A15 no considera en principio otros casos, por lo que podríamos pensar que está pensando en un universo de sucesiones monótonas). Esta es una forma personal de construir relaciones, que A15 utiliza más allá de resultados a los que ya se abordó en el curso (lo que permite interpretar que tal vez este resultado no cobró significado para A15). Podemos construir el triángulo epistemológico para lo que plantea A15:

Contexto de referencia

Las sucesiones convergentes decrecientes mantienen sus términos mayores que el límite. Las sucesiones crecientes tienen a su primer término como cota inferior. Pares de sucesiones monótonas convergentes.

Signo

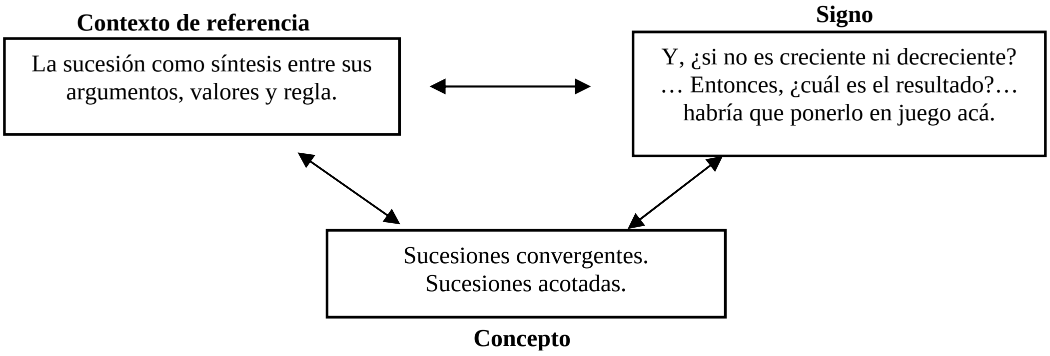
Si es decreciente, ya va a estar acotada inferiormente porque tiende a *l*, entonces todos los valores van a ser mayores que *l*. Después, si es creciente, va a haber un…, el y_0 va a ser el menor valor. Y ahí va a estar acotada inferiormente.

Sucesiones convergentes. Sucesiones acotadas.

Concepto

Las intervenciones de A15 nos llevan a pensar que puede estarse apoyando en las sucesiones monótonas convergentes ya estudiadas en el curso (en el material Sucesiones II aparece el tratamiento de la convergencia, y en particular de los pares de sucesiones monótonas convergentes), y también en una representación geométrica que le indique que si una sucesión es convergente y monótona decreciente, necesariamente sus términos "se amontonan a la derecha del límite". Pero resulta interesante, porque parece ser que A15 ha elaborado una relación personal (aunque puede ser que ya la tuviera elaborada), que le da a su intervención el carácter de símbolo matemático, ya que expresa relaciones que surgen de su contexto de referencia y le permiten elaborar (aunque parcialmente) una argumentación. El FPM1 pregunta a A15 si así ha cubierto todos los casos, o más bien, qué sucede si la sucesión (y_n) no es creciente ni decreciente. A15 responde: "Sería constante" (L269), y agrega: "Para que tienda a *l* tiene que ser constante" (L271). A lo que aparece la intervención de A4: "Puede ir salpicando, ¿no? Salpicando y converger, pero no, entonces en ese caso no es creciente, ni decreciente." Esto introduce la posibilidad de ver otros casos, lo que al mismo tiempo complica la situación de abarcar todos en la demostración. Aparece aquí (sugerido por el FPM1) un ejemplo ya tratado en clase, de una sucesión convergente que no es creciente, ni decreciente ni constante. Esto lleva a A4 a proponer nuevamente la conclusión de la acotación, y la siguiente sugerencia del formador a los alumnos de que busquen un resultado al que han llegado con anterioridad. Desde el punto de vista epistemológico, el análisis de la fundamentación que plantea A15 nos hace pensar que para él, en este momento, es más importante la necesidad de convencer(se) que de arribar a una conclusión lógica. Esto lo interpretamos a partir de la división, para dar sus argumentos, en varios casos, de acuerdo a la monotonía de la sucesión. Otro aspecto que aparece en este episodio se relaciona con la identificación de las sucesiones con sus expresiones analíticas. Esto es señalado por Sierpinska (1990), como uno de los obstáculos para la identificación del universo de las sucesiones, y que puede dificultar la comprensión del concepto de convergencia. La autora se refiere a la focalización en la sucesión como una regla para producir números, y no como una "síntesis entre sus argumentos, valores y regla” (p. 31). En las intervenciones ocurridas durante el episodio considerado, todas las referencias a sucesiones son formuladas a través de sus expresiones analíticas. Especialmente aparece una dificultad para abordar el caso de las sucesiones convergentes que no son monótonas.

Consideremos ahora las intervenciones del FPM1, quien reacciona a las ideas de los estudiantes formulando preguntas, y finalmente una sugerencia. Particularmente cuando plantea: “Y, ¿si no es creciente ni decreciente?” (L256). “Les propongo que miren un poco lo que ya hemos hecho… Entonces, ¿cuál es el resultado?… habría que ponerlo en juego acá” (L287). Podemos englobar estas intervenciones mediante el siguiente triángulo epistemológico:



Y nuevamente esto nos muestra las diferencias entre las formas de pensar y argumentar del formador (que en este caso representa la comunidad matemática), y de los estudiantes. En particular, la relación de desigualdad que se da (inevitablemente), a partir de las características de la comunicación en la clase: “La comunicación con el docente que sabe sobreimpone la interacción matemática” (Steinbring, 2005, p. 79). Y esta termina con la propuesta de buscar entre lo ya visto, el resultado necesario para concluir la demostración.

ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA A UNA ESTUDIANTE

Analizaremos la resolución del siguiente problema:

Determina si la siguiente sucesión converge, diverge u oscila, explicando por qué: $(a_n)/\ a_0 = 3$ y $a_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{a_n}$

La estudiante presenta la siguiente resolución escrita:

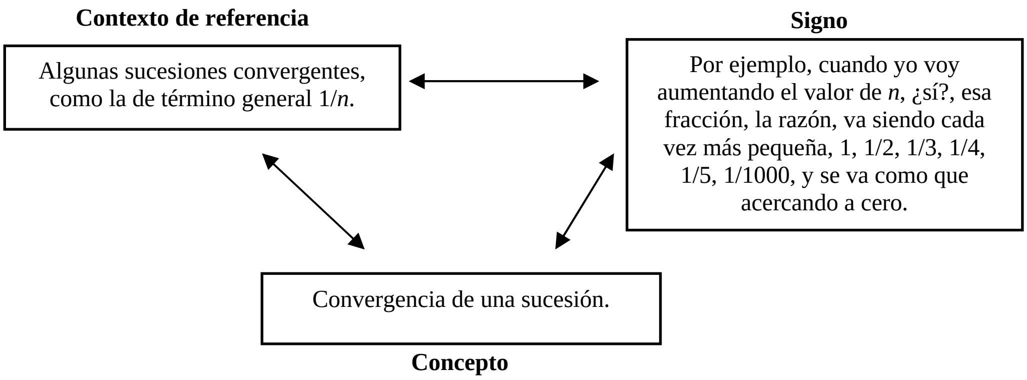
$$a_0 = 3$$
$$a_1 = a_{0+1} = 4 - \frac{3}{3} = 4 - 1 = 3$$
$$a_2 = a_{1+1} = 4 - \frac{3}{3} = 4 - 1 = 3$$
$$a_3 = a_{2+1} = 4 - \frac{3}{3} = 3$$
$$a_n \leq a_{n+1}$$
$$a_n \geq a_{n+1}$$

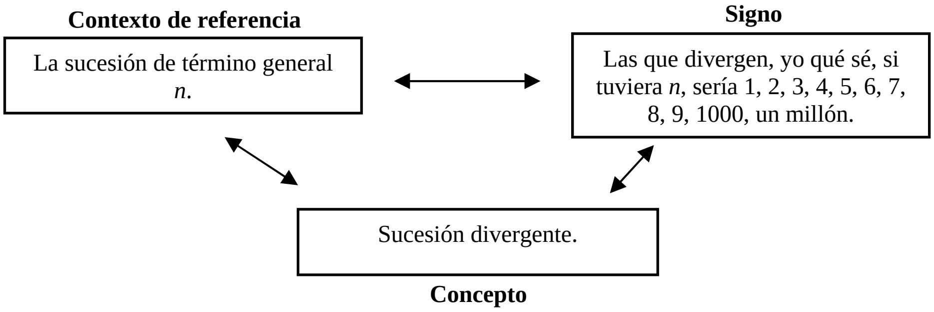
Lo dejo y vuelvo al otro ejercicio porque no me acuerdo lo de C, D u O. Veo que da 3 y siempre todos los a_n *van a dar 3 y es constante.*

Se da la siguiente interacción en la entrevista:

> A: En este, por ejemplo, me pasó que, empecé a hacer a_0, a_0 ya está, a_1, a_2, a_3, y me di cuenta que si seguía, este, iba a seguir dando 3, 3, 3, 3, 3 siempre. Porque el anterior siempre es 3, entonces acá dio 3, 3, esto siempre va a ser 1, 4 menos 1 va a ser 3. Eso me dio el primero. Ta, y puse acá que lo dejo y voy al otro ejercicio porque no me acordaba lo de si converge, diverge u oscila. Me acuerdo, bien, que cuando converge, ta, converge a un número, por ejemplo, yo qué sé, si fuera 1/*n*, ta, esa, por ejemplo.
>
> E: Vos decís que si fuera 1/*n* sabrías que converge. A ver esa idea, ¿podés desarrollarla?
>
> A: Bien. Por ejemplo, cuando yo voy aumentando el valor de *n*, ¿sí? esa fracción, la razón, va siendo cada vez más pequeña. 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/1000 (con sus dos manos muestra como algo que se va haciendo más chico), y se va como que acercando a cero.
>
> E: En ese caso, ¿qué dirías?
>
> A: En ese caso diría que converge a cero.
>
> E: ¿Y este no sabés qué decir porque no pasa eso?
>
> A: No me acuerdo. Después están, por ejemplo las otras, las que divergen, yo qué sé, si tuviera *n*, sería 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1000, un millón (señala con sus manos como hacia arriba).
>
> E: ¿Y por qué sería que diverge esa? ¿Cuál sería tu explicación si le tenés que decir a alguien por qué converge o por qué diverge? Por qué converge ya me dijiste.
>
> A: Bien, por qué diverge, porque voy aumentando el *n* y puedo encontrar siempre otro mayor, a partir de uno, yo pongo el número mil y voy a encontrar otro correspondiente mayor a ese mil, por ejemplo.
>
> E: Mayor a ese. Esa es tu idea de que diverge.
>
> A: De diverge a más infinito. Ta, entonces acá tengo 3, 3, 3, y no me acuerdo cómo, oscilar, para mí como que no oscila.
>
> E: ¿Y qué idea tenés de oscilar?
>
> A: Tenía una idea de oscilar pero se me fue cambiando a través del año. Claro, porque uno siempre dice oscila "así" (mueve un dedo en zigzag), pero podría ser así (nuevamente hace zigzag) y tender a cero. Por ejemplo, podría ser el menos 1 a la *n*, por *n*, todo esto sobre 1. Entonces acá sería, para los pares sería 1/2, después vendría 1/3, menos 1/3, después vendría 1/4, después menos 1/5, pero sin embargo, a pesar de que suba y baje (hace gestos de nuevo con sus manos), esa converge. Porque está lo de tomar lo del valor absoluto y entonces, ahí (junta las palmas de sus manos), sigue convergiendo a cero, y sin embargo me hace, va haciendo así (acompaña con las manos que sube y baja). La idea de oscilar que yo tenía de antes que hacía así (repite el gesto con las manos), se me fue.
>
> E: Claro, cambiaste durante el año. Bien. ¿Y si esta (señalando la primera) la hubiéramos definido distinto? Suponete que yo te hubiera dicho que el a_0…
>
> A: Porque después me estaba acordando también de esto, de lo de los límites y eso, de lo de si es creciente o decreciente. Eso también lo usábamos. Porque me acuerdo que tuvimos en la clase, se supone que si el, por ejemplo si a_n es menor o igual a a_{n+1}, si el próximo es más grande y siempre pasa esto, sería creciente. Bien, y si fuera al revés, sería decreciente. Pero con esta, como es igual, sería como creciente y decreciente, porque son siempre iguales, entonces, como que esto no me sirve.

Podemos apreciar que Analía no tiene una idea sobre el comportamiento de las sucesiones constantes. O al menos, sus ideas sobre la convergencia y la divergencia de sucesiones, le resultan un obstáculo para clasificar una sucesión constante. Esas ideas parecen tener referencia en algunos ejemplos, posiblemente de sucesiones monótonas. Veamos el triángulo epistemológico para esos conceptos.





Analía presenta, también, algunos obstáculos señalados por Sierpinska (1990), como considerar a las sucesiones convergentes como aquellas que se aproximan a un número, sin tomar en cuenta que la aproximación sea "tanto como queramos", y considerar que una sucesión es convergente cuando un número finito de términos se acercan a un número (no tomando en cuenta la condición: "casi todos los términos"). Además, Analía posee una concepción dinámica del límite (Cornu, 1991): "u_n tiende a l"; "u_n se aproxima a l"; "la distancia de u_n a l se hace pequeña"; "los valores se aproximan más y más a un número". Queremos resaltar que Analía, como lo señala Steinbring (1998) cuando describe los dos modelos sobre concepciones de enseñanza, establece contextos para hablar de las propiedades o para resolver los problemas. Por ejemplo, cuando habla de la convergencia o divergencia, lo hace a partir de ejemplos. Por un lado esto significa que no tiene un significado del límite como una relación estructural y, además, que utiliza un contexto para desarrollar su pensamiento.

CONCLUSIONES

Hemos presentado un episodio de clase y el trabajo parcial de una estudiante, solo con la intención de ejemplificar el análisis epistemológicamente orientado de interacciones de clases que tomamos de Steinbring (1998, 2005). Nos parece importante reparar en el punto de vista de este autor, para quien el nuevo conocimiento matemático, en tanto conjunto de estructuras relacionales, se constituye de modo interactivo y necesita, para enriquecerse, de la atención del profesor, tanto al aspecto comunicativo como a las condiciones epistemológicas del conocimiento que se va desarrollando.

> La construcción interactiva de nuevo conocimiento es un proceso frágil en el sentido de que, en última instancia, su éxito no puede ser forzado o garantizado. Como todo acto creativo, constructivo, la creación de nuevo conocimiento está sujeta al esfuerzo continuo de producir algo que aún no se conoce y que aún no existe en esa forma. (Steinbring, 2005, p. 79)

Allí es donde creemos que la labor del docente resulta fundamental, para lo que debe ser consciente, tanto de la fragilidad del proceso comunicativo, como de las condiciones epistemológicas relativas al conocimiento matemático. Esto permitiría que el formador esté atento a modificar las ofertas de aprendizaje a sus estudiantes, de modo que ellos puedan "ser participantes activos en la construcción de los aprendizajes". (Dalcín et al., 2017, p. 95), considerando esto en un escenario de intercambio entre los formadores y sus estudiantes, en el sentido en que lo plantea Steinbring.

La apertura que los formadores de Análisis I hicieron de su clase para la realización de este trabajo es un paso importante hacia la discusión de estas u otras cuestiones que hacen a la formación de los futuros docentes, en este caso en esta asignatura. Consideramos valioso abrir la puerta a los colegas para poder hablar de lo que hacemos en la clase, más allá de ponerse de acuerdo en los materiales a usar o en el orden en que se tratarán los temas del curso. Estamos convencidos de que este camino posibilitará una profundización de la reflexión sobre las prácticas de todos los formadores de profesores de matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–156). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academics.

Dalcín, M., Ochoviet, C. y Olave, M. (2017). *Una mirada a las prácticas de los formadores de la especialidad matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza*. Montevideo: Consejo de Formación en Educación. Recuperado de: http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/publicaciones/2017/invest_2.pdf.

Radford, L. (2006). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial,* 7–21. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/335/33509902.pdf.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), 157–189.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction—an epistemological perspective.* Berlin: Springer.

Stigler, J. W. y Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap.* New York: The Free Press.