Dalcín, M. (2018). Nuevos cuadriláteros convexos: un espacio para la formulación de conjeturas y la creación de demostraciones. *Reloj de agua*, *17*, 13-26.

# Nuevos cuadriláteros convexos: un espacio para la formulación de conjeturas y la creación de demostraciones

Mario Dalcín[1]

RESUMEN

En este trabajo se propone una configuración geométrica en la que algunas clases de cuadriláteros permiten dar cuenta de propiedades que no surgen a partir de las clases de cuadriláteros usualmente conocidos. Se trata, además, de una invitación a vivir la experiencia de formular conjeturas, así como a la creación de demostraciones para ellas. El lector considerará su posible uso y la pertinencia de este tipo de vivencias en clase.

PALABRAS CLAVE: nuevos cuadriláteros, conjetura, demostración.

ABSTRACT

In this paper we propose a geometric configuration in which some classes of quadrilaterals allow to account for properties that do not arise from the classes of quadrilaterals usually known. It is also an invitation to live the experience of formulating conjectures, as well as the creation of a proof for them. The reader will consider its possible use and the relevance of this type of experiences in class.

KEYWORDS: new quadrilaterals, conjecture, proof.

## INTRODUCCIÓN

Al hacer una búsqueda en Internet con las palabras *cuadriláteros*, *quadrilaterals* o *cuadriláteros particulares* encontramos en los distintos sitios web una lista de nombres que –a veces con pequeñas diferencias entre una y otra– se repiten: cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio, cometa (romboide), trapecio isósceles, cuadrilátero inscritible, cuadrilátero tangencial, cuadrilátero simple, haciéndose la distinción entre convexos y no convexos, cuadrilátero cruzado o complejo. Al hacer una búsqueda análoga a la anterior en libros de geometría euclidiana como *Advanced Euclidean Geometry* (Johnson, 2007), *An introduction to Modern Geometry* (Shively, 1946), *Estudio de las Geometrías, vols. I y II* (Eves, 1985), *Fundamentos de Geometría* (Coxeter, 1984) o en libros de texto de geometría como *Geometría Moderna* (Moise y Downs, 1986) o *Geometría* (Clemens, O'Daffer, Cooney, 1989) la lista de nombres de cuadriláteros es similar a la ya mencionada.

Si se hace una clasificación de los cuadriláteros convexos tomando como criterio la igualdad y posición de sus ángulos (Dalcín y Molfino, 2014, p. 195) surgen las siguientes clases:

[1] Profesor de matemática egresado del Instituto de Profesores Artigas. Magíster en Ciencias en Matemática Educativa (IPN, México).

i) sin ángulos iguales, ii) un solo par de ángulos consecutivos iguales, iii) un solo par de ángulos opuestos iguales, iv) dos pares de ángulos consecutivos iguales, v) dos pares de ángulos opuestos iguales, vi) solo tres ángulos iguales, vii) cuatro ángulos iguales.

En esta clasificación de los cuadriláteros convexos aparecen tres clases de cuadriláteros desconocidas en las clasificaciones usuales: un solo par de ángulos consecutivos iguales, un solo par de ángulos opuestos iguales, solo tres ángulos iguales.

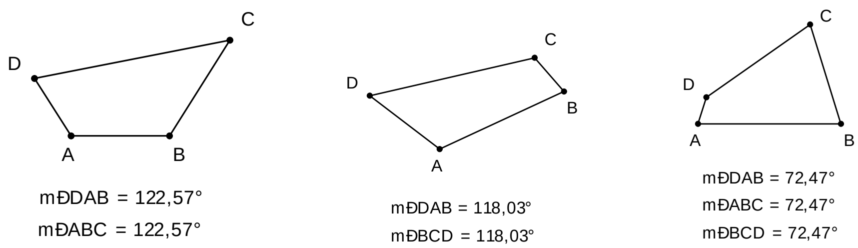


Figura 1. Cuadriláteros con: un solo par de ángulos consecutivos iguales (izquierda), un solo par de ángulos opuestos iguales (centro), solo tres ángulos iguales (derecha).

Si se hace una clasificación de los cuadriláteros convexos tomando como criterio la igualdad y posición de sus lados (Dalcín y Molfino, 2014, p. 194) surgen las siguientes clases: i) sin lados iguales, ii) un solo par de lados consecutivos iguales, iii) un solo par de lados opuestos iguales, iv) dos pares de lados consecutivos iguales, v) dos pares de lados opuestos iguales, vi) solo tres lados iguales, vii) cuatro lados iguales.

En esta clasificación de los cuadriláteros convexos aparecen otras tres clases de cuadriláteros desconocidas en las clasificaciones usuales: un solo par de lados consecutivos iguales, un solo par de lados opuestos iguales, solo tres lados iguales.

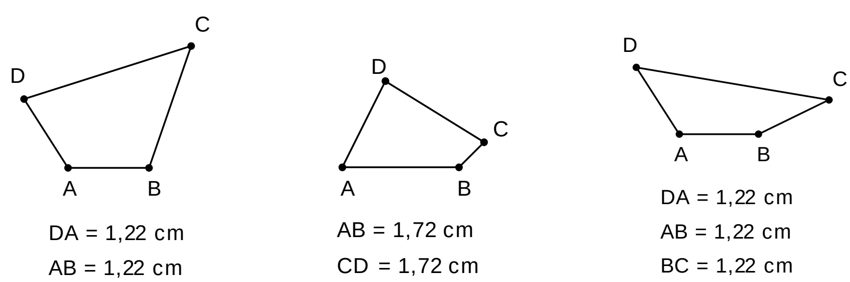


Figura 2. Cuadriláteros con: un solo par de lados consecutivos iguales (izquierda), un solo par de lados opuestos iguales (centro), solo tres lados iguales (derecha)

A continuación se presenta una configuración geométrica en la que intervienen estas seis nuevas clases de cuadriláteros –un solo par de ángulos consecutivos iguales, un solo par de ángulos opuestos iguales, solo tres ángulos iguales, un solo par de lados consecutivos iguales, un solo par de lados opuestos iguales, solo tres lados iguales–, haciendo posible dar cuenta de propiedades que no surgen a partir de las clases de cuadriláteros usualmente conocidas.

## CUADRILÁTERO CONVEXO Y CUADRILÁTERO DETERMINADO POR SUS BISECTRICES

La configuración geométrica que se usará en lo que sigue es la de un cuadrilátero convexo ABCD no tangencial[2] y el cuadrilátero EFGH convexo[3] determinado por sus bisectrices (de acuerdo a la figura siguiente).

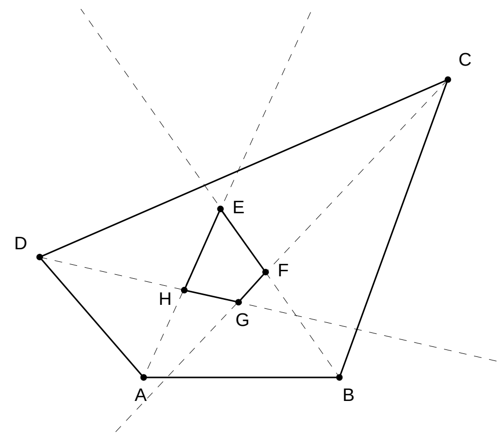


Figura 3. Cuadrilátero convexo ABCD no tangencial y cuadrilátero EFGH determinado por sus bisectrices.

¿Qué se puede observar en dicha configuración? En cada uno de los numerales que siguen se mostrará primero una figura hecha en Geometría Dinámica, de manera que en base a ella el lector tenga la posibilidad de aventurar una conjetura. A la izquierda de la figura aparecerán –cuando sea necesario– algunos datos de partida con los que fue construido el cuadrilátero convexo ABCD no tangencial y a la derecha algunas mediciones de lados o ángulos de EFGH resultante bajo dichas condiciones iniciales.

Con la intención de sugerir ideas, hacer más ágil la lectura, así como dar la posibilidad al lector de poner en juego su propio pensamiento geométrico, los enunciados y las demostraciones de las propiedades se incluirán en el siguiente apartado.

[2] Un cuadrilátero convexo es tangencial cuando admite una circunferencia tangente simultáneamente a sus cuatro lados.

[3] Si ABCD es convexo cada uno de sus ángulos es menor a un ángulo llano, por lo que la suma de dos de sus ángulos consecutivos es menor a 360°. La bisectriz del ángulo A y la bisectriz del ángulo B forman entonces con AB ángulos cuya suma es menor a un ángulo llano, de donde existe la intersección E de dichas bisectrices. Así, la medida del ángulo AEB puede tomar valores positivos y menores a 180°. Lo mismo puede argumentarse para los ángulos BFC, CGD y DHA, resultando el cuadrilátero EFGH convexo.

1.

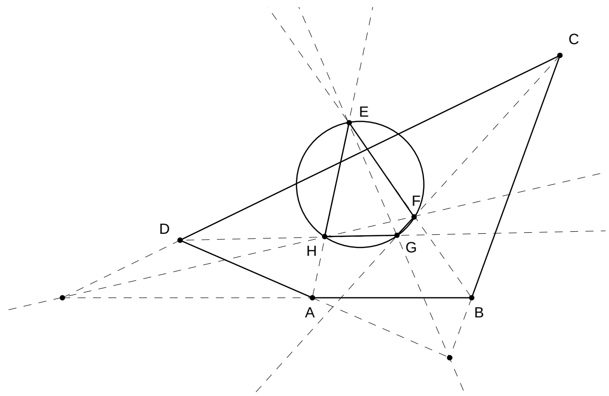


Figura 4. Cuadrilátero convexo ABCD no tangencial con rectas que contienen a sus lados y cuadrilátero EFGH determinado por sus bisectrices con rectas que contienen a sus diagonales.

2.

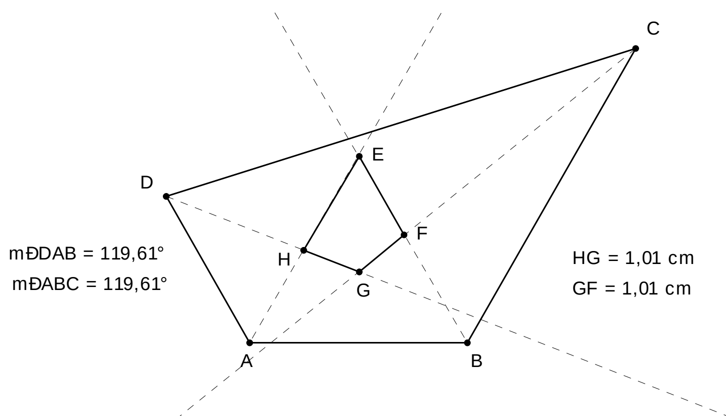


Figura 5. Cuadrilátero convexo ABCD no tangencial con un solo par de ángulos consecutivos iguales y cuadrilátero EFGH determinado por sus bisectrices con un solo par de lados consecutivos iguales.

Esta es una situación en la que aparecen dos clases de cuadriláteros convexos desconocidas en las clasificaciones usuales y que fueron creadas a partir de sendas clasificaciones, atendiendo a la igualdad y posición de ángulos y lados respectivamente.

3.

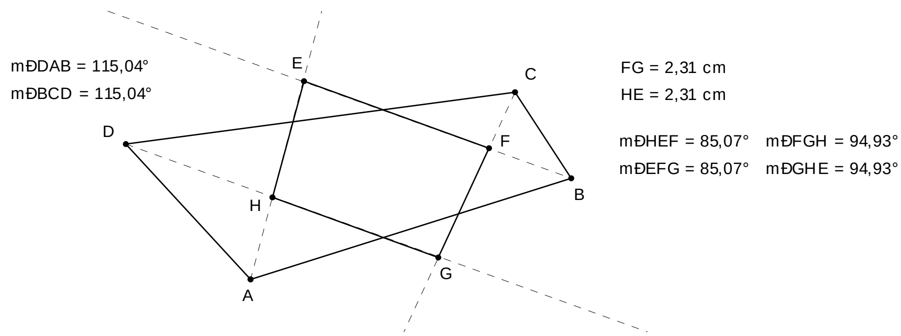


Figura 6. Cuadrilátero convexo ABCD no tangencial con un solo par de ángulos opuestos iguales y cuadrilátero EFGH determinado por sus bisectrices con un solo par de lados opuestos iguales y dos pares de ángulos consecutivos iguales.

En esta situación interviene otra clase de cuadriláteros convexos desconocida en las clasificaciones usuales, la de los cuadriláteros con un solo par de ángulos opuestos iguales. A partir de esta clase de cuadriláteros, trazado de bisectrices mediante, se genera un cuadrilátero con un solo par de lados opuestos iguales. El cuadrilátero tiene además dos pares consecutivos de ángulos iguales, lo que hace que tenga un par de lados paralelos. De esta manera la clase de cuadriláteros con un solo par de lados iguales se presenta en un cuadrilátero tradicionalmente conocido.

4.

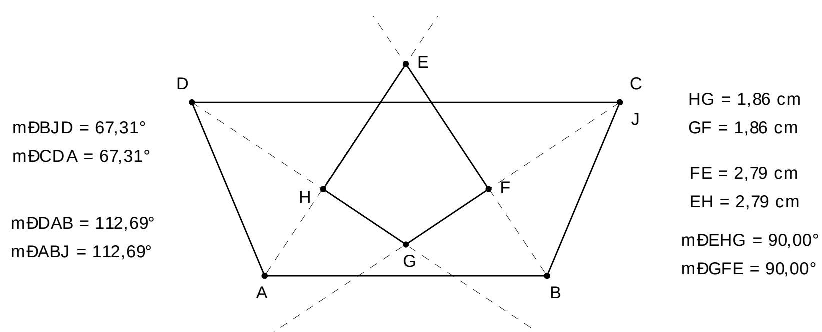


Figura 7. Cuadrilátero convexo ABCD no tangencial con dos pares de ángulos consecutivos iguales y cuadrilátero EFGH determinado por sus bisectrices con dos pares de lados consecutivos iguales y un solo par de ángulos opuestos iguales rectos.

Aquí el par de ángulos opuestos iguales aparece en un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales y que por lo tanto tiene un par de ángulos opuestos iguales. Además aparece en una situación particular en la que dichos ángulos son rectos.

5.

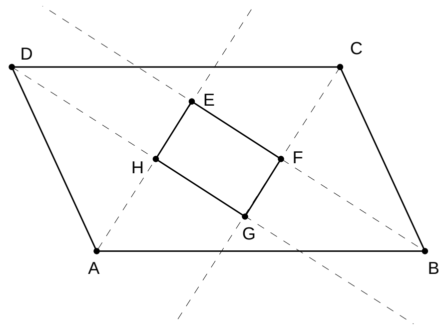


Figura 8. Cuadrilátero convexo ABCD no tangencial con dos pares de ángulos opuestos iguales y cuadrilátero EFGH determinado por sus bisectrices con dos pares de lados opuestos iguales y cuatro ángulos rectos.

Esta situación es bastante difundida y pueden hallarse tutoriales en Youtube de cómo demostrarla.

6.

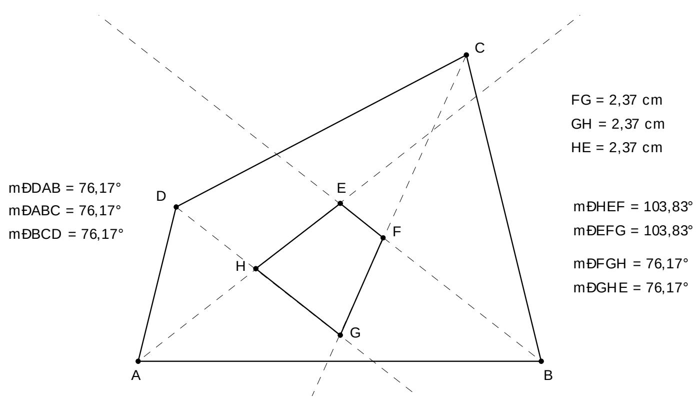


Figura 9. Cuadrilátero convexo ABCD no tangencial con solo tres ángulos iguales y cuadrilátero EFGH determinado por sus bisectrices con tres lados iguales y dos pares de ángulos consecutivos iguales.

La clase cuadrilátero con solo tres ángulos iguales no suele aparecer en la geometría euclidiana, así como tampoco la clase cuadrilátero con solo tres lados iguales. Esta es una situación en la que las nuevas clases originadas a partir de clasificaciones de los cuadriláteros convexos mencionadas al inicio generan nuevas propiedades que no pueden apreciarse cuando hacemos uso exclusivamente de los cuadriláteros generados por las clasificaciones usuales.

7.

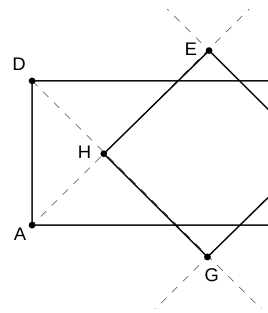


Figura 10. Cuadrilátero convexo ABCD no tangencial con cuatro ángulos iguales y cuadrilátero EFGH determinado por sus bisectrices con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales.

Esta situación también es bastante difundida y pueden hallarse demostraciones en Internet.

## LAS DEMOSTRACIONES DE LAS PROPIEDADES ANTERIORES

Los enunciados y las demostraciones de las propiedades sugeridas en el apartado anterior se incluyen en este, respetando los respectivos numerales.

1.

*ABCD convexo no tangencial. Las bisectrices de ABCD determinan EFGH de la siguiente manera: biz DAB ∩ biz ABC = {E}, biz ABC ∩ biz BCD = {F}, biz BCD ∩ biz CDA = {G}, biz CDA ∩ biz DAB = {H}. Se cumple que: i) el cuadrilátero EFGH es inscritible*; ii) *a) si ABCD no tiene lados paralelos, las rectas que contienen las diagonales de EFGH son bisectrices de los ángulos determinados por las rectas que contienen lados opuestos de ABCD*; ii) *b) si ABCD es trapecio, una de las rectas que contienen las diagonales de EFGH es paralela media de ABCD.*

ABCD convexo → EFGH con i) E + G = F + H (EFGH es inscritible).

ii) EG es bisectriz del ángulo determinado por (DA, BC) y FH es bisectriz del ángulo determinado por (AB, CD).

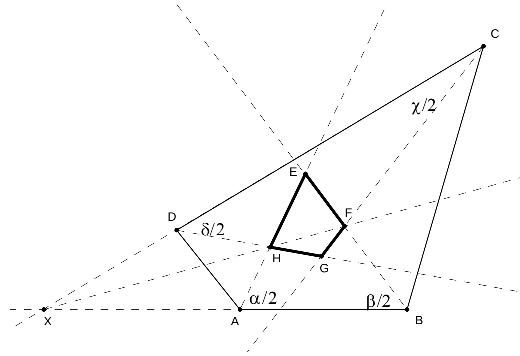


Figura 11. Las rectas que contienen las diagonales de EFGH son bisectrices
de los ángulos determinados por las rectas que contienen lados opuestos de ABCD.

i) Si DAB = $\alpha$ y ABC = $\beta$, en base a los ángulos marcados en la figura: AEB = 180º – ($\alpha$ + $\beta$)/2, CGD = 180º – ($\chi$ + $\delta$)/2 $\rightarrow$ AEB + CGD = 180º.

La referencia más lejana en el tiempo hallada para esta propiedad es en *Exercices de Géométrie comprenant l´exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues* (F. G.–M., 1912, p. 251).

ii) a) AB $\cap$ CD = {X}. F es incentro de XBC, H es excentro de XAD $\rightarrow$ FH es bisectriz de (AB, CD).

ii) b) Si AB//CD, el ángulo AHD es recto. Si M es el punto medio de AD, M equidista de A, H y D, de donde MH = MD y por tanto los ángulos MHD y MDH son iguales, y como el ángulo MDH es igual al ángulo HDC tenemos que MHD y HDC son iguales, además son alternos internos, por lo que MH//DC. Si N es el punto medio de BC, la recta MN es paralela a CD. Por el axioma de Euclides las rectas MH y MN coinciden. En forma análoga se podría decir que las rectas NF y NM coinciden.

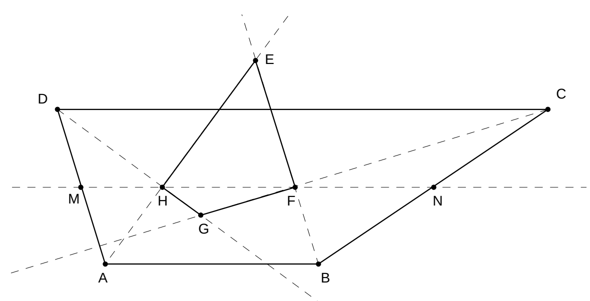


Figura 12. La recta que contiene la diagonal HF de EFGH es paralela media del trapecio ABCD (AB//CD).

2.

*Si ABCD convexo no tangencial tiene un par de ángulos consecutivos iguales, entonces EFGH tiene un par de lados consecutivos iguales.*

ABCD con DAB = ABC $\rightarrow$ EFGH con GF= HG.

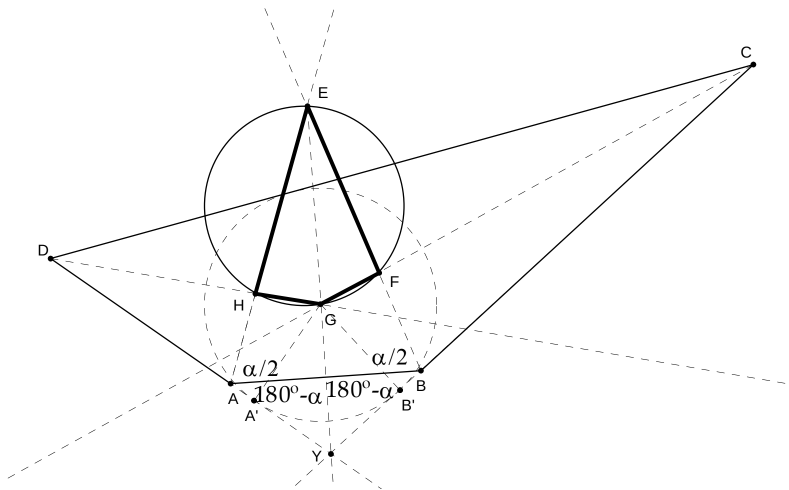


Figura 13. Construcciones auxiliares para demostrar que EFGH tiene dos lados consecutivos iguales.

EAB = ABE = $\alpha/2$ $\rightarrow$ EA = EB

G incentro de CDY $\rightarrow$ GA' = GB'

BAY = ABY $\rightarrow$ YA = YB y YA' = YB' $\rightarrow$ AA' = BB'

$\rightarrow$ Y, E, G pertenecen a la mediatriz de AB $\rightarrow$ AEY = BEY $\rightarrow$ HEG = FEG

EFGH inscritible

$\rightarrow$ HG = GF.

3.

*Si ABCD convexo no tangencial tiene un par de ángulos opuestos iguales, entonces EFGH tiene un par de lados opuestos iguales y dos pares de ángulos consecutivos iguales.*

ABCD con DAB = BCD $\rightarrow$ EFGH con i) GF= EH.

ii) HEF = EFG y FGH = GHE.

ii) si DAB = $\alpha$, calculando los ángulos de acuerdo a la figura se llega a que EFGH tienen dos pares de ángulos consecutivos iguales.

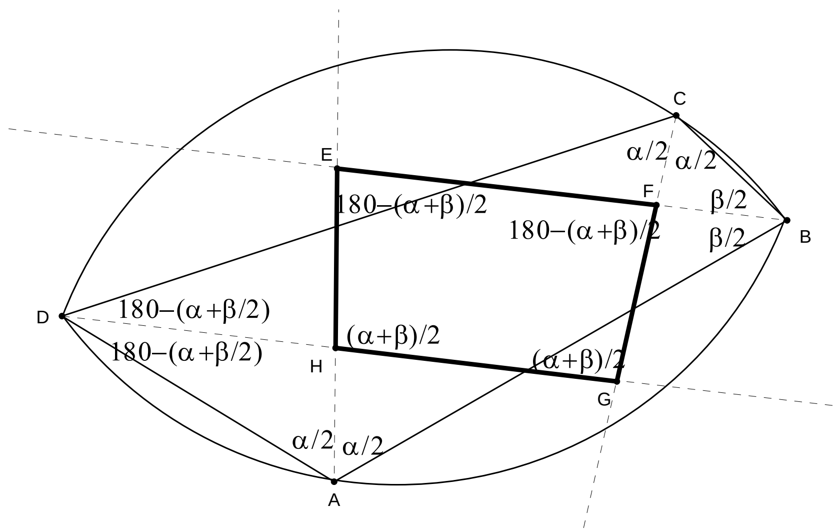


Figura 14. Ángulos usados para demostrar que EFGH tiene dos pares de ángulos consecutivos iguales.

i) se deduce a partir de ii).

4.

*Si ABCD convexo no tangencial tiene dos pares de ángulos consecutivos iguales, entonces EFGH tiene dos pares de lados consecutivos iguales y un par de ángulos opuestos iguales rectos.*

ABCD con DAB = ABC y BCD = CDA $\rightarrow$ EFGH con i) EF= EH y FG = GH.

ii) EFG = GHE = 90º.

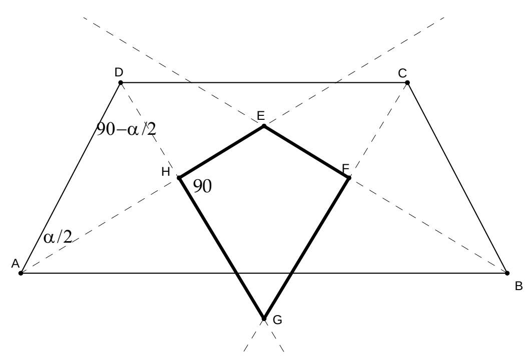


Figura 15. Ángulos usados para demostrar que EFGH Tiene un par de ángulos opuestos iguales rectos.

i) se cumple de aplicar dos veces lo demostrado en 2.

ii) surge a partir de los ángulos como se ve en la figura.

5.

*Si ABCD convexo no tangencial tiene dos pares de ángulos opuestos iguales, entonces EFGH tiene dos pares de lados opuestos iguales y cuatro ángulos iguales.*

ABCD con DAB = BCD y ABC = CDA → EFGH con i) EF= GH y FG = HE.

ii) HEF = EFG = FGH = GHE.

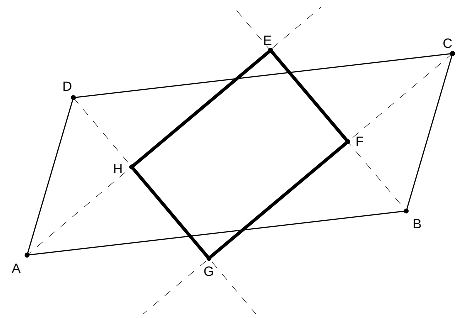


Figura 16. ABCD con dos pares de ángulos opuestos iguales y
EFGH con dos pares de lados opuestos iguales y cuatro ángulos iguales.

ii) aplicando 4i) se tiene que los cuatro ángulos son rectos.

i) se deduce de ii).

6.

*Si ABCD convexo no tangencial tiene solo tres ángulos iguales, entonces EFGH tiene tres lados iguales y dos pares de ángulos consecutivos iguales.*

ABCD con DAB = ABC = BCD → EFGH con i) FG = GH = HE.

ii) HEF = EFG y FGH = GHE.

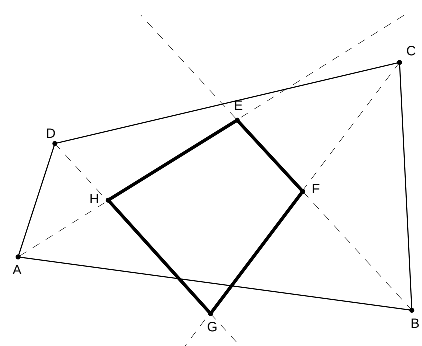


Figura 17. ABCD con solo tres ángulos iguales y EFGH con un par de
lados opuestos iguales y dos pares de ángulos consecutivos iguales.

i) si ABCD tienen tres ángulos iguales entonces tiene:

a) un par de ángulos consecutivos iguales, de donde se puede deducir de acuerdo a lo demostrado en 2 que EFGH tiene un par de lados consecutivos iguales,

b) un par de ángulos opuestos iguales, de donde se puede deducir de acuerdo a lo demostrado en 3i) que EFGH tiene un par de lados opuestos iguales,

de a) y b) tiene tres lados iguales.

Si ABCD tiene un par de ángulos opuestos iguales, de acuerdo a lo demostrado en 3ii) podemos deducir que EFGH tiene dos pares de ángulos consecutivos iguales.

7.

*Si ABCD convexo no tangencial tiene cuatro ángulos iguales, entonces EFGH tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales.*

ABCD con DAB = ABC = BCD = CDA $\rightarrow$ EFGH con i) EF = FG = GH = HE.

ii) HEF = EFG = FGH = GHE.

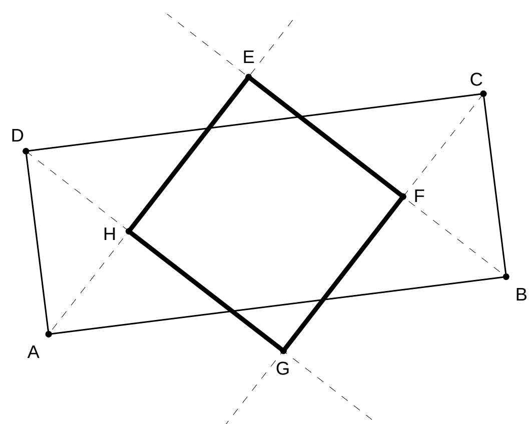


Figura 18. ABCD con cuatro ángulos iguales y EFGH con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales.

ii) por lo visto en 5 los ángulos son rectos.

i) AEB, AHD y BFC son triángulos rectángulos isósceles $\rightarrow$ AE – AH = BE – BF.

## LAS PROPIEDADES VISTAS EN CONJUNTO

En el siguiente cuadro resumimos el conjunto de propiedades enunciadas y demostradas en los apartados anteriores.

| ABCD convexo no tangencial | | | | EFGH | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ángulos | Lados | | Lados | Ángulos |
| Sin ángulos iguales | - | - | → | - | E+G=F+H |
| Solo un par consecutivo Iguales | A=B | - | → | FG=GH | E+G=F+H |
| Solo un par opuesto iguales | A=C | - | → | FG=HE | E+G= F+H<br>E=F<br>G=H |
| Dos pares consecutivos iguales | A=B<br>C=D | AD=BC | → | EF=HE<br>FG=GH | E+G= F+H<br>F=H=90° |
| Dos pares opuestos iguales | A=C<br>B=D | AB=CD<br>AD=BC | → | EF=GH<br>FG=HE | E+G= F+H<br>E=F=G=H=90° |
| Solo tres iguales | A=B=C | | → | FG=GH=HE | E+G= F+H<br>E=F<br>G=H |
| Cuatro iguales | A=B=C=D | AB=CD<br>AD=BC | → | EF=FG=GH=HE | E+G= F+H<br>E=F=G=H=90° |

Cuadro 1. Resumen de las propiedades demostradas en apartados anteriores.

## REFLEXIÓN FINAL

Incorporar clases de cuadriláteros desconocidas en las clasificaciones usuales fue fructífero porque:

a) permitió generar propiedades que no existen cuando solo se consideran los cuadriláteros tradicionales;

b) en la configuración usada en este caso –cuadrilátero convexo, cuadrilátero determinado por sus bisectrices y cuadrilátero determinado por las bisectrices de sus ángulos externos– aparecen clases de cuadriláteros convexos tradicionalmente conocidos y clases de cuadriláteros nuevos, lo que permite apreciar qué agregan las nuevas clases a las usualmente manejadas;

c) posibilitó vivenciar la matemática –en este caso la geometría euclidiana– como un espacio de creación, tanto en la formulación de conjeturas como en la elaboración de demostraciones que las fundamentaran.

Considero que esta experiencia de trabajo geométrico puede ser adaptada parcial o totalmente al trabajo en clase, sean estas de bachillerato o formación docente, en la medida que son pocos los conceptos que intervienen. Además de posibilitar a estudiantes y docentes la experiencia de los aspectos señalados previamente, esta situación geométrica habilita la construcción de figuras dinámicas bajo ciertas condiciones y hace posible un genuino trabajo de formular conjeturas y de crear demostraciones que le den sustento.

## REFERENCIAS


Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1989). *Geometría*. Wilmington: Addison–Wesley Iberoamericana.

Coxeter, H. S. M. (1984). *Fundamentos de Geometría*. México D.F.: Limusa.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2014). *Geometría Euclidiana en la formación de profesores. Exploración inicial del plano. 3ª edición*. Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Eves, H. (1985). *Estudio de las Geometrías. Vols I y II*. México D.F.: Uteha.

F. G.–M. (1912). *Exercices de Géométrie comprenant l´exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*. Tours: Maison A. Mame/ Paris: J. de Gigord.

Johnson, R. A. (2007). *Advanced Euclidean Geometry*. New York: Dover.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington: Addison–Wesley Iberoamericana.

Shively, L. S. (1946). *An introduction to Modern Geometry*. New York: John Wiley & Sons.