González, L., González, D., Noriega, A. y Pérez, T. (2018). Interpretación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. *Reloj de agua*, *17*, 5-11.

Interpretación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Laura González[1], Daniela González[2], Ana Noriega[3], Teresa Pérez[4]

RESUMEN

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas aparece en los programas de primero y segundo año de bachillerato, siendo la representación gráfica de dichos sistemas un tema específico del curso de segundo. Desde la investigación en Matemática Educativa se sostiene que el video es una herramienta que nos permite enriquecer la *descripción de lo que se observa*, al incluir registros visuales y dinámicos. En este sentido, aporta a la visualización de dichas representaciones. El video que diseñamos se estructuró sobre varios ejemplos de sistemas lineales con tres incógnitas en sus representaciones gráfica y algebraica, relacionando lo que se observa gráficamente con lo que los estudiantes ya conocen de los sistemas de ecuaciones, en su representación y resolución algebraica.

PALABRAS CLAVE: video didáctico, visualización, sistemas de ecuaciones lineales, interpretación gráfica, resolución algebraica.

ABSTRACT

Solving a system of linear equations in three variables is a topic in the tenth and eleventh grade math programs, being the graphic representation of these systems a specific topic in the eleventh grade. From the research in Educational Mathematics it is held that video is a tool that allows us to enhance *the description of what is observed* because includes visual and dynamic records. In this sense, it contributes to the visualization of such representations. We set out to make a video that presents several examples of linear systems with three unknowns in their graphical and algebraic representations, relating the graphic representation with what students already know about the systems in their representation and algebraic resolution.

KEYWORDS: didactic video, visualization, systems of linear equations, graphic interpretation, algebraic resolution.

INTRODUCCIÓN

En el marco del curso de Didáctica II de la especialidad matemática del Instituto de Profesores Artigas (IPA) se propuso a los estudiantes el diseño de un video. Este debía ilustrar un concepto o idea matemática presente en el curso en el que los estudiantes realizaban la práctica docente. Entre las pautas para su realización se establecieron: una duración breve, que el video estuviera pensado para el trabajo en clase con el docente, la elaboración de un documento de fundamentación de las elecciones realizadas así como uno de reflexión sobre la experiencia. El video fue presentado en la Escuela de Primavera organizada por el Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación.

El tema elegido surge de la observación en el aula de la necesidad de contribuir con la visualización geométrica de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. Si bien la representación de planos y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas son trabajadas en la mayor parte de los trayectos liceales, hemos notado poco énfasis en el abordaje de la relación que se puede establecer entre estos saberes.

[1] Estudiante avanzada del Instituto de Profesores Artigas en la especialidad Matemática.
[2] Estudiante avanzada del Instituto de Profesores Artigas en la especialidad Matemática.
[3] Estudiante avanzada del Instituto de Profesores Artigas en la especialidad Matemática.
[4] Profesora de Didáctica del Instituto de Profesores Artigas en la especialidad Matemática.

En el programa de primer año de bachillerato del Consejo de Educación Secundaria (CES) se expresa que «la resolución de sistemas se limitará a la aplicación del método de escalerización, enfatizando la noción de equivalencia de sistemas. Se resolverán problemas de convergencia disciplinar vinculados a la economía, a la biología y otros» (CES, 2010a). Si bien en las recomendaciones generales se promueve el uso de tecnología, no se explicita cómo hacerlo para este tema en concreto.

En Ochoviet y Olave (2011) es abordado el pasaje entre estas representaciones, a través de imágenes. Consideramos que la utilización de gráficas dinámicas puede enriquecer el aprendizaje del tema contribuyendo a la vinculación entre las distintas representaciones. Esto será fundamental para su comprensión cuando sea tratado en segundo año de bachillerato. Creemos que el video es un medio adecuado para ello.

En el programa de segundo de bachillerato del CES, en la unidad de geometría analítica en el espacio, se incluyen los tópicos: «coordenadas cartesianas en el espacio, ecuación cartesiana del plano, sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas (escalerización), interpretación geométrica de las soluciones: planos paralelos, planos con un único punto en común» (CES, 2010b).

En este caso, no solo está planteada la representación gráfica de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas como tema específico a trabajar, sino que, además, se vincula directamente con los otros temas incluidos en la unidad.

Por lo tanto, en este nivel el video se propone como un medio de representación dinámica para utilizar en el aula luego de haber trabajado con sistemas de ecuaciones y con ecuaciones del plano en el espacio.

MARCO TEÓRICO

Representaciones internas y representaciones semióticas

Según Tamayo (2006), las representaciones son, para las ciencias cognitivas, «cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior» (p. 39).

Para representar objetos utilizamos conjuntos de signos y símbolos que pueden ser internos o externos. A las representaciones externas se les denomina representaciones semióticas, son aquellas elaboradas con propósitos de comunicación, como mapas y dibujos, o también las notaciones simbólicas de uso en las ciencias. Las representaciones internas que «nos permiten mirar el objeto en ausencia total del significante perceptible» corresponden, entre otras, a conceptos, nociones, creencias y pueden ser analógicas, proposicionales o modelos mentales (Tamayo, 2006, pp. 39–40).

Las representaciones analógicas son altamente específicas y pueden ser visuales, olfativas, táctiles, auditivas, entre muchas otras. Las proposicionales son discretas, abstractas y están organizadas con ciertas reglas de combinación, manteniendo una sintaxis. Según Tamayo (2006) los modelos mentales son análogos estructurales del mundo, ya que, siendo dinámicos, procuran mantener la estructura de los objetos que pretenden representar. Estos tienen una ventaja respecto a las representaciones proposicionales y es que no son limitados por una estructura sintáctica. En la construcción de modelos mentales intervienen nuestras percepciones de objetos y fenómenos, discursos empleados en nuestra relación con dichos objetos y los procesos mentales que nos permiten construir imágenes relacionadas con lo percibido.

Las representaciones semióticas son las que incluyen sistemas de escritura (números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etcétera) y cumplen funciones de «comunicación, expresión, objetivación y tratamiento. (...) La pluralidad de sistemas semióticos permite diversificar las representaciones de un mismo objeto y, de esta forma, amplía las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, sus representaciones mentales» (Tamayo, 2006, p. 41).

Debido a la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos, estos requieren ser representados por distintos sistemas de signos que sirven como medio de comunicación y mediación con ellos. Cada concepto necesita ser trabajado en más de un sistema de representación para que el alumno pueda diferenciar al objeto de su representación (Ochoviet, 2000; Tamayo, 2006).

Según Ochoviet (2000), cada representación, junto con sus reglas y la información que acarrea, implica una significación distinta del concepto y su comprensión requiere de distintos grados de formación de quien pretende trabajar con ellos. Las transformaciones al objeto se representan a través de las transformaciones a sus representaciones. Y por eso, debemos plantearnos el objetivo específico de trabajar los pasajes entre los sistemas de representación (Ochoviet, 2000).

En este sentido, ambos autores destacan la importancia de no suponer que dichos pasajes se aprenderán de forma espontánea y directa.

Tamayo (2006) plantea que, a diferencia de lo que se cree usualmente, el proceso de producción de representaciones externas hace posible la comprensión y claridad acerca de las representaciones internas. Es el caso de la visualización.

La visualización

Alsina (2009) refiere a lo planteado por Rowan y Bourne (1994), en el sentido de que la visualización contribuye con el desarrollo de competencias como «saber representar, saber usar lenguajes diversos, apreciar conexiones» y, además, constituye un importante aporte «en relación con la argumentación, la comunicación y el razonamiento» (Alsina, 2009, p. 16).

Pero este aprendizaje no se hará sin aprender y practicar las propias técnicas de visualización. Si no prestamos atención a las confusiones que se pueden generar, su utilización podrá inducir a errores, o a la idea de que la justificación no es necesaria en casos en los que sí lo es (Alsina, 2009).

Según Alsina (2009), la utilización de hardware y software educativo constituye una ventaja para quienes son formados con acceso a dichas herramientas a pesar de que su utilización no puede sustituir la manipulación con material concreto imprescindible para el aprendizaje.

En este contexto, el papel del docente se vuelve fundamental para la selección y secuenciación de dichas herramientas, ya que la oferta abruma, y no está pautada con objetivos educativos necesariamente. La colaboración entre profesores se vuelve imprescindible para esta tarea de selección de forma colectiva y que no se convierta en un trabajo individual desbordante (Alsina, 2009).

En este sentido, Alsina (2009) concluye que las descripciones visuales contribuyen a hacer entender mejor las propiedades, el cómo y también el porqué de lo que se visualiza.

Nos planteamos, entonces, realizar un video que presentará varios ejemplos distintos del tema a trabajar, permitiéndonos mostrar el conjunto solución de cada una de las ecuaciones del sistema representado como plano y las soluciones del sistema como ternas que se corresponden con puntos de intersección de dichos planos, poniendo énfasis en el pasaje entre uno y otro registro de representación.

Los objetos que se representan en este video tienen tres dimensiones, mientras que la herramienta nos permite representarlos en dos dimensiones. Es por eso relevante el aspecto dinámico que permite el video sobre la utilización de una imagen estática.

Diseño del video

Como sostienen Morales y Guzmán (2015), la imagen en movimiento es una característica esencial del video como medio de comunicación. El otro aspecto que consideran relevante es que la imagen «no depende en esencia de la lectura para transmitir un significado» refiriéndose a los textos escritos y el potencial uso de relatos en audio (p. 1).

En lo que refiere al primer aspecto, utilizamos el software de geometría dinámica GeoGebra, que nos permite representar figuras 3D y animarlas, permitiendo la visualización desde diferentes puntos de vista.

En este caso se decidió no utilizar el recurso del relato en audio, ya que se entendió que se propone vincular la representación analítica y gráfica del sistema de ecuaciones, por lo que se hace necesario escribir en lenguaje matemático las expresiones algebraicas; hacerlo en términos de relato no mejoraría la comprensión. También se eligió registrar las conclusiones verbales en forma de texto escrito, dado que es lo habitual cuando el docente realiza los registros en clase. Para la realización del video se utilizó el software Camtasia estudio.

Guion del video

Según Morales y Guzmán (2015), el guion del video es el aspecto crucial en la elaboración del recurso. Allí se conjugan la precisión y detalle de la información matemática a incluir, con las imágenes, animaciones, transiciones que permitirán contribuir a la construcción de imágenes conceptuales adecuadas.

Para trabajar el pasaje de la representación algebraica a la gráfica, partiremos de un sistema compatible determinado de tres ecuaciones lineales de tres incógnitas en su representación algebraica, explicitando el conjunto solución. Se recordará qué significa resolverlo algebraicamente y se preguntará cómo se podrían representar gráficamente el sistema y su solución. Se marcará su primera ecuación y aparecerá la leyenda «Representemos todas las ternas que verifican esta ecuación». Se representará el plano que corresponde a dicha ecuación y aparecerá la leyenda: «El conjunto solución[5] de cada ecuación del sistema representa un plano del espacio». Se seguirán representando los otros planos y aparecerá la leyenda: «Los tres planos se intersecan en el punto A = (–3, 2, 5), ya que sus coordenadas verifican las tres ecuaciones».

Luego se analizará un caso de un sistema compatible indeterminado. Se representarán cuatro planos correspondientes a las ecuaciones del sistema y se verá que se intersecan en una recta. Aparecerá la leyenda: «Las coordenadas de cada punto de la recta intersección verifican las cuatro ecuaciones del sistema»; «Este conjunto de ternas conforma el conjunto solución, que es infinito. El sistema es compatible indeterminado».

Por último, se analizará un caso de un sistema incompatible. Se representarán los planos correspondientes a las ecuaciones del sistema y se verá que no tienen puntos en su intersección. Se leerá: «No hay ningún punto que pertenezca a los tres planos a la vez. No existen ternas que verifiquen las tres ecuaciones simultáneamente»; «El conjunto solución es vacío. Es sistema es incompatible».

Luego se presentarán tres ejemplos más para la visualización de otros casos. Un sistema incompatible con tres planos paralelos y uno secante a ellos; uno incompatible con tres planos paralelos y un compatible indeterminado en el que las tres ecuaciones representan el mismo plano. En esta parte se interactúa con los estudiantes, solicitando que indiquen la solución.

APLICACIÓN Y CONCLUSIONES

Con este video intentamos aportar una herramienta para la labor docente (González, González y Noriega, 2017). Su realización y el estudio del marco teórico abordado nos permitieron redimensionar la importancia de esta herramienta para la visualización al trabajar con distintos registros de representación semiótica y los pasajes entre ellos. Se puede acceder al video a través del siguiente código:

[5] Se utilizará el término solución para referirse a cada terna (o eventualmente otra representación de la terna como podría ser un punto) que verifica una ecuación y conjunto solución para el conjunto de ternas que verifican todas las ecuaciones del sistema.

El desafío más importante a la hora de realizarlo fue el tiempo requerido para interiorizarnos con el software y el manejo necesario para diseñar y secuenciar los elementos que se habían decidido plasmar. En ese sentido, nuestra inexperiencia generó que durante la confección del video tuviéramos que modificar el guion que nos habíamos planteado inicialmente por motivos estéticos y didácticos.

Por esta razón, somos conscientes de que se hace necesario trabajar en equipo y compartir este tipo de herramientas y experiencias en la comunidad docente para enriquecer nuestro trabajo y adaptarnos al nuevo manejo en tecnologías.

El video no fue aplicado en la práctica. Sugerimos, sin embargo, trabajarlo en primer año de enseñanza media superior como cierre del tema resolución de sistemas lineales de ecuaciones con tres incógnitas para familiarizar a los estudiantes con las representaciones gráficas. Y en segundo de EMS luego de la introducción a la representación de planos en el espacio, vinculándolo a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación gráfica. En ambos niveles, sugerimos que los estudiantes puedan verlo con tiempo y discutirlo en grupos para que luego expliciten sus conclusiones e indiquen las soluciones a las que arribaron en los últimos ejemplos.

Según De Guzmán (1996, citado por Cantoral y Montiel, 2003) los intercambios sociales y personales son centrales para los procesos de codificación y decodificación implicados en la visualización. Cantoral y Montiel (2003) concluyen que esto implica que:

> […] la visualización sea un proceso que hay que aprender con las personas a nuestro alrededor y en la inmersión e inculturación en el tejido histórico y social de la matemática. La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta. (p. 2)

Apoyándonos en estas ideas, entendemos que el video aporta en el contexto de una actividad interactiva mediada por el docente.

Referencias

Alsina, C. (2009). Elogi de la visualització: l'aprenentatge del pensament visual en matemàtiques. *Revista d'Innovació i Recerca en Educació*, *3* (2), 13–20. Recuperado de: http://www.raco.cat/index.php/REIRE/article/view/141134/192551

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003) Visualización y pensamiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16.* Recuperado de: http://www.tbu.uan.edu.mx/_Lib_Art_En/_Arts/%28Cantoral-Montiel2003%29-ALME16-.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010a).Programa de primer año de bachillerato reformulación 2006. Ajuste 2010. Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/ces/images/stories/reformulacion06/ajustesprogmat2010/ajustes2010progmat4ref2006.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010b).Programa de segundo año de bachillerato reformulación 2006. Ajuste 2010. Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/ces/images/stories/reformulacion06/ajustesprogmat2010/ajustes2010progmatncomun5ref2006.pdf

González, D., González, L. y Noriega, A. (2017). *Sistemas de ecuaciones con tres incógnitas. Representación gráfica* [MP4]. Recuperado de: https://youtu.be/8uFEACrp-wU

Morales, L. y Guzmán, T. (2015). El vídeo como recurso didáctico para reforzar el conocimiento. *Memorias del Encuentro Internacional de Educación a Distancia. Año 3, núm. 3, diciembre 2014–noviembre 2015.* Recuperado de: http://www.udgvirtual.udg.mx/encuentro/encuentro/anteriores/xxii/168-427-1-RV.htm

Ochoviet, C. (2000). Los registros de representación semiótica: El caso de las funciones. (Trabajo inédito). En *Guía de Didáctica II de la especialidad Matemática. Plan 2008*. Profesorado Semipresencial, CFE.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2011). *Matemática 4*. Montevideo: Santillana.

Tamayo, Ó. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, *XVIII*(45), 37–49.